

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

9261 - найдем ~~простые~~
простые числа, произведение
которых даст 9261, число нечетно $\Rightarrow$ на 2 не дел.

9261		3
3087		3
1029		3
343		7
49		7
7		7

11

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2 \Rightarrow \text{нужные числостности.}$$

3 тройки 3 семёрки и 2 единицы.

1 3 3 3 2 2 2 Всевозможная комбинация будет

$$\frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3} = 5 \cdot 7 = 35$$

$$\text{Ответ: } 35$$

$$\frac{7!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 = 70$$

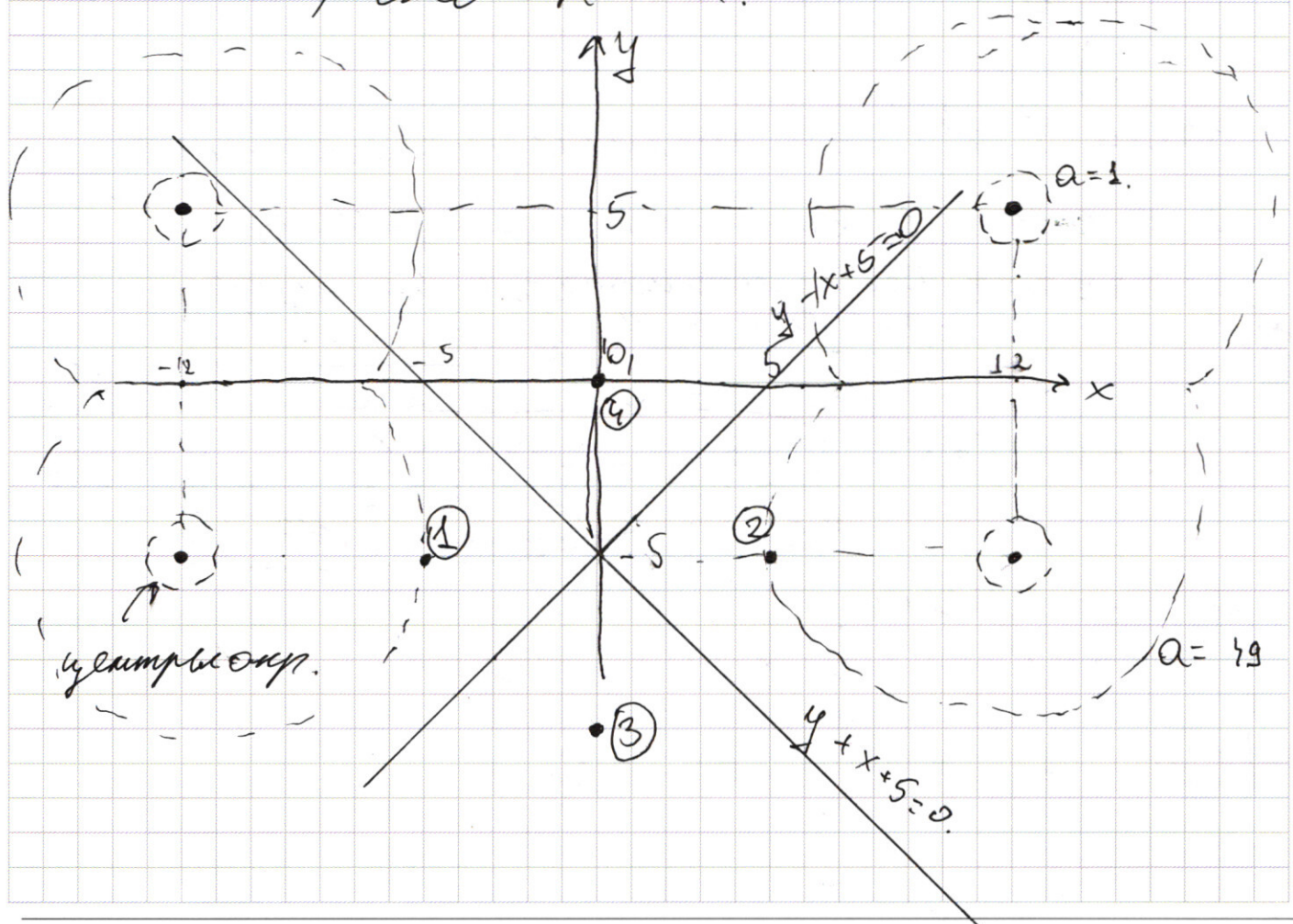
№5. Ответ: ~~35~~ 70.

a - ? 2 река.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. \end{cases}$$

Геометрический смысл первого уравнения есть длина отрезка, перпендикулярного Ox или Oy с концами на прямой $x + y + 5 = 0$
 $y - x + 5 = 0$;

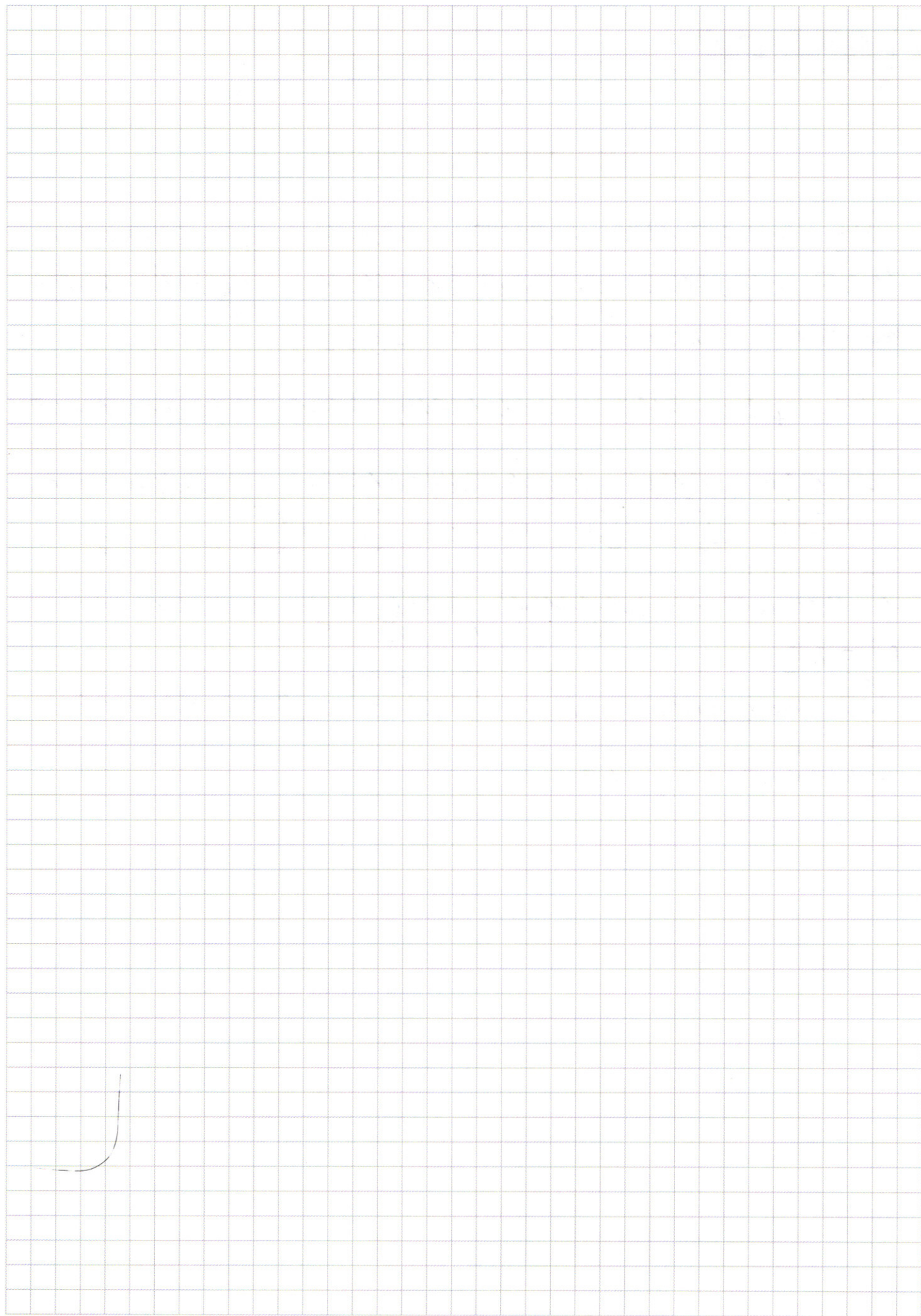
Графиком второго уравнения
будет отраженный симметрично
ОХ и ОУ на все ~~4~~3 оставшиеся
четверти графика $(x-12)^2 + (y-5)^2 = 9$,
то есть окружности, или
ее фрагмента на 3й четверти
с центром $M_2(12; 5)$ радиусом R
таким, что $R^2 = 9$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Из графика ~~можно~~ можно заметить
что первую уравнению удовлетвор.
точки с коорд. $(\pm 5; -5 \pm 5)$.

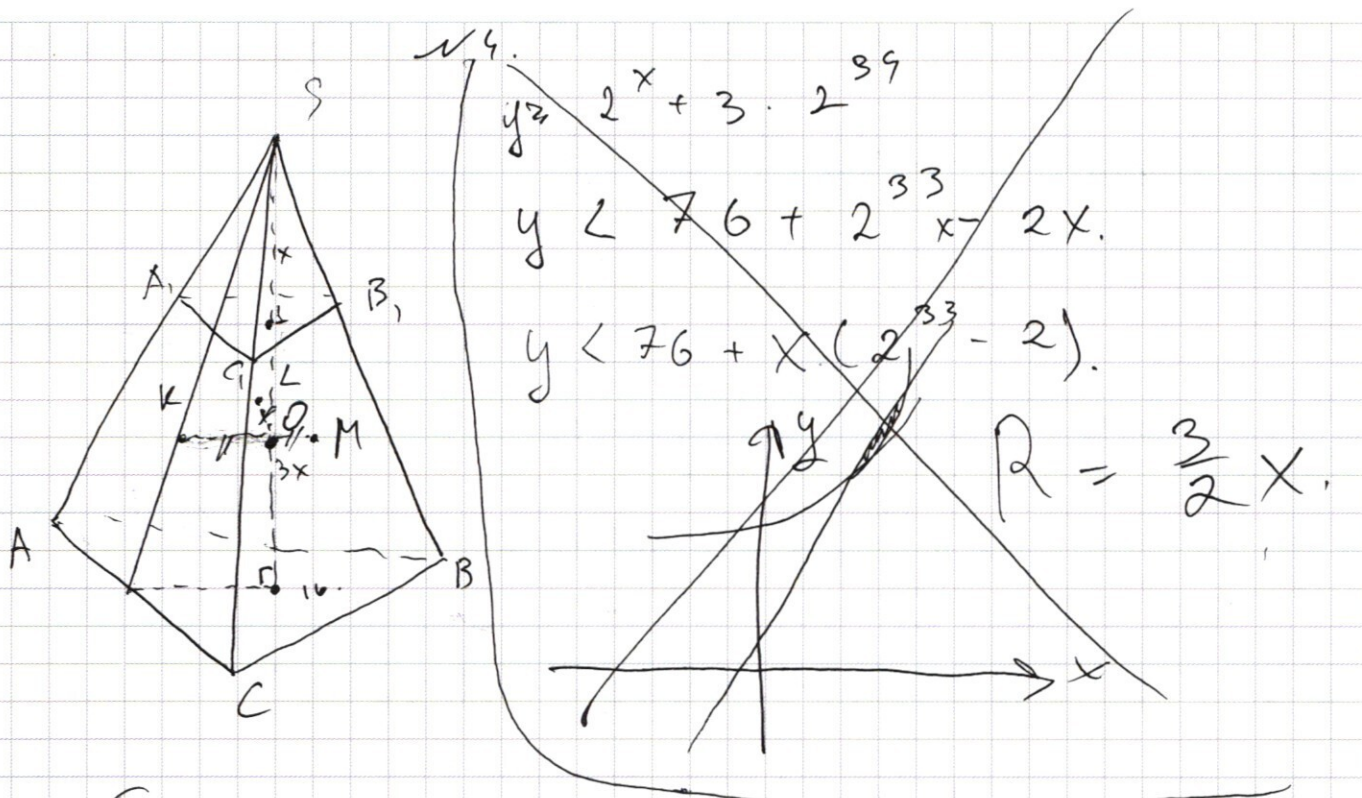
Из условия симметрии 2 решения
будет при пересечении окружностей
точек (1) и (2) или (3) и (4), тогда
в первом случае радиус равен 7 $\Rightarrow$
 $a = 49$,
во втором $R = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \Rightarrow a = 169$.
Ответ: 49; 169.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Пусть сечение с площ. 16
будет AB_1C , с площ. 1: A_1B_1C ,
 $SA_1B_1C \sim SA_1B_1C \Rightarrow SH_1 : SH = \left(\frac{S_{AB_1C}}{S_{ABC}} \right)^{\frac{1}{2}}$
 SH и SH_1 - высоты $\Rightarrow SH = 4x$; $SH = x$
 $HH_1 = 2R$, т.к. O лежит на SH , т.к.
 SH падает в ортоцентр $\triangle ABC$ и
~~касательная~~ радиус KA_1B_1C падает
в ортоцентр $\Rightarrow R = \frac{3}{2}x$.
 $OK = OM = R = \frac{3}{2}x \Rightarrow \tan \angle KSO = \frac{\frac{3}{2}x}{\frac{3}{2}x + 1x} = \frac{3}{5}$
 $\angle KSO = \arctan \frac{3}{5}$.

III. к. $KO = KL = KM$, $OH \perp (ABC)$, то
 $(KLM) \parallel (ABC) \Rightarrow \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \left(\frac{\frac{5}{2}x}{4x} \right)^2 = \left(\frac{5}{8} \right)^2$
 $S_{KLM} = 16 \cdot \frac{5^2}{8 \cdot 8} = \frac{5^2}{4} = \frac{25}{4}$, где S_{KLM} - S сечения.

Ответ: возраст $\frac{3}{5}$; $\frac{25}{4}$.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}, x > 0; y > 0.$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0.$$

$$D_y = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ 4-x \end{cases}$$

1е ур-е: $y(2x)$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-\ln x^6} = 2^{-\ln 2x^6} \cdot x^{-\ln 2x^6}$$

$$2^{\ln 2x^2} = x^{\ln \frac{1}{2}}$$

$$4^{\ln 2x} = x^{-\ln 2}$$

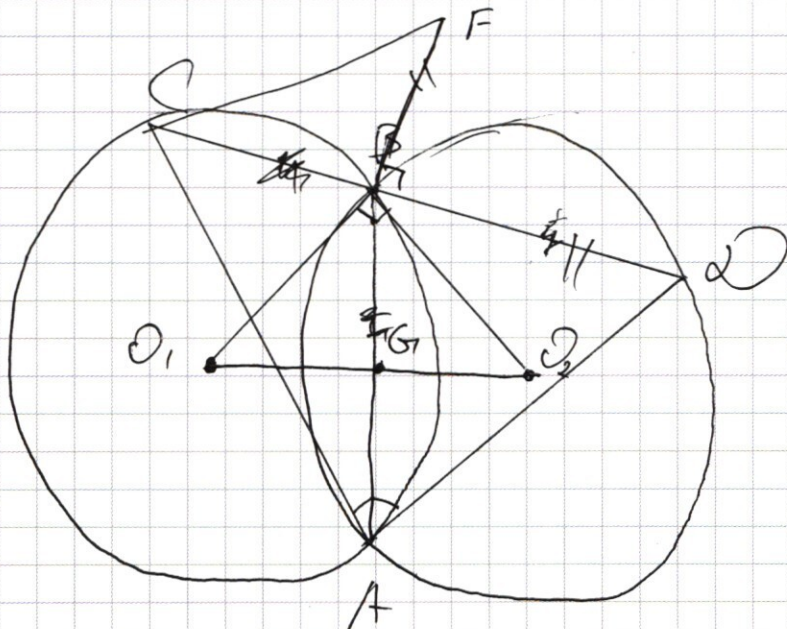
возраст. $x < 1$: возраст; $x > 1$ убыв.

~~возраст~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.

$$R = 10$$



O_1, O_2 - центры окр.

$\angle BDA = \angle BCA = 45^\circ$ т.к. отпираются
на одинаковые дуги AB (по симметрии)
 $\angle O_1 B O_2 = 90^\circ$, т.к. $O_1 B$ и $O_2 B$
явл. касат. и R радиусы.

$$O_1 B = O_2 B \Rightarrow \angle B O_1 O_2 = \angle B O_2 O_1 = 45^\circ$$

Значит по 3 углам $\triangle ACD \sim \triangle O_1 B O_2$
 $O_1 O_2 \cap AB = G$ по симметрии

$$BG = AG = \frac{R}{\sqrt{2}}, \text{ т.к. } O_1 O_2 \perp AB.$$

$$AB = 2R \cos 45^\circ = \frac{2R}{\sqrt{2}}; \Rightarrow \text{коэф. погр. } K = 2.$$

$$AB = CB = BD = \frac{2R}{\sqrt{2}} \text{ коэф. погр. } CF = \sqrt{\left(\frac{2R}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{2R}{\sqrt{2}}\right)^2} =$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{4}{2} R^2 = 2R = \underline{\underline{20}}$$

~~8 ACE~~ Answer: 20.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin(4x) \sin(14x)$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \cos$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0.$$

$$y^2 - 4y + 4 - (x^2 - 8x + 16) - (x^2 + xy - 12) = 0.$$

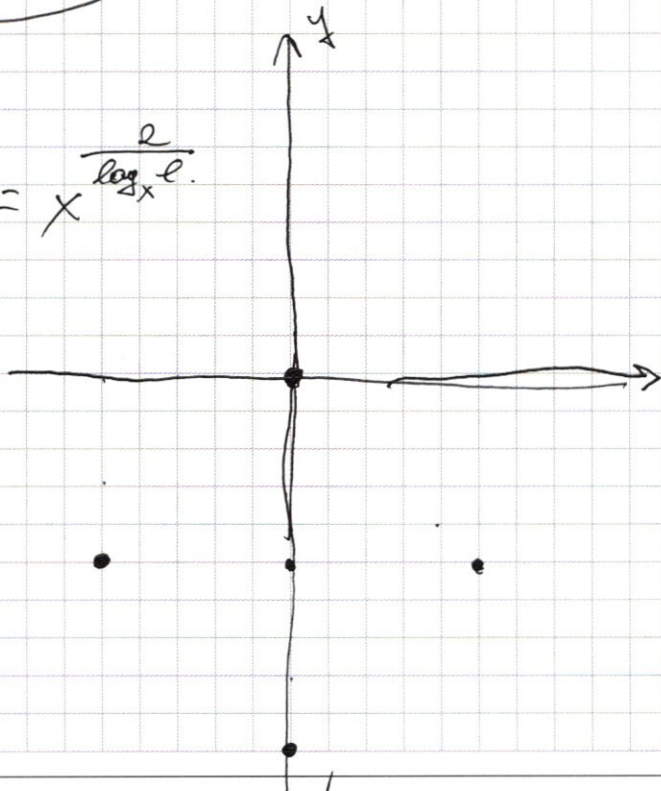
$$(y-2)^2 - (x-4)^2 - (x^2 + xy - 12) = 0.$$

$$(y-2)^2 - (x-4)^2 - (x^2 + xy - 12) = 0.$$

$$\boxed{\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0. \end{matrix}}$$

$$-(x^2 + xy - 12) = -(x^2 + xy + y^2) + (xy + y^2 + 12)$$

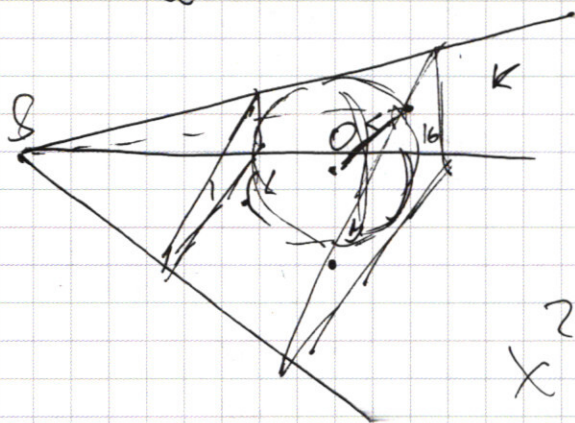
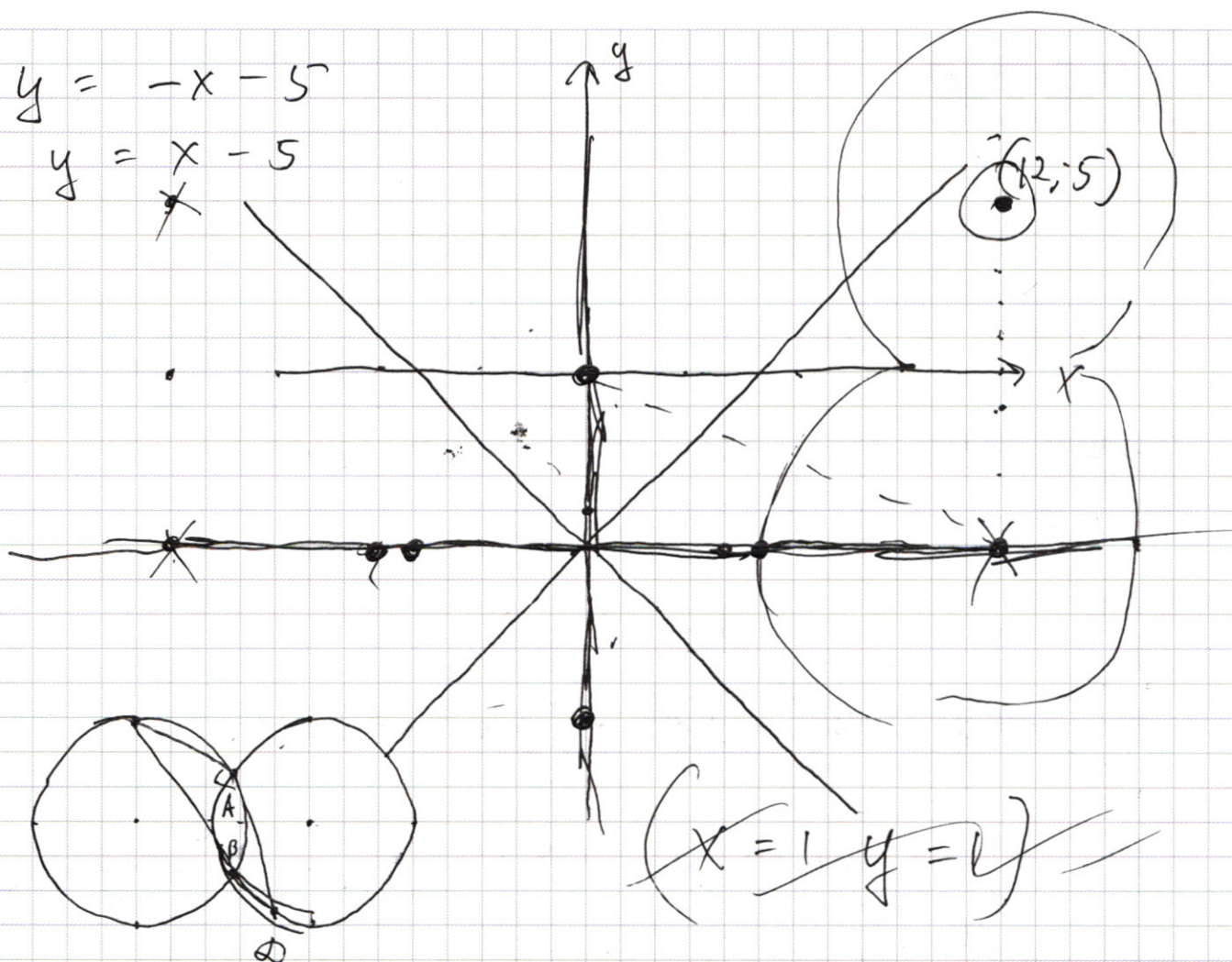
$$x^{2 \ln x} = x^{\frac{2}{\log_x e}}$$



$$\begin{aligned} (x^y)^{-\ln x^2} &= \\ &= x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y \\ &= x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = \ln(y/x^2) = 1 \\ &= x^{2 \ln x} \cdot y^{4 \ln x} = \ln \frac{y}{x^2} = 1 \end{aligned}$$

$$y = -x - 5$$

$$y = x - 5$$



$x \neq 1$

$$x^{2 \ln x} = \frac{1}{y^{4 \ln x + \ln \frac{y}{x^7}}}$$

$$x^{2 \ln x} = y^{-4 \ln x - \ln \frac{y}{x^7}}$$

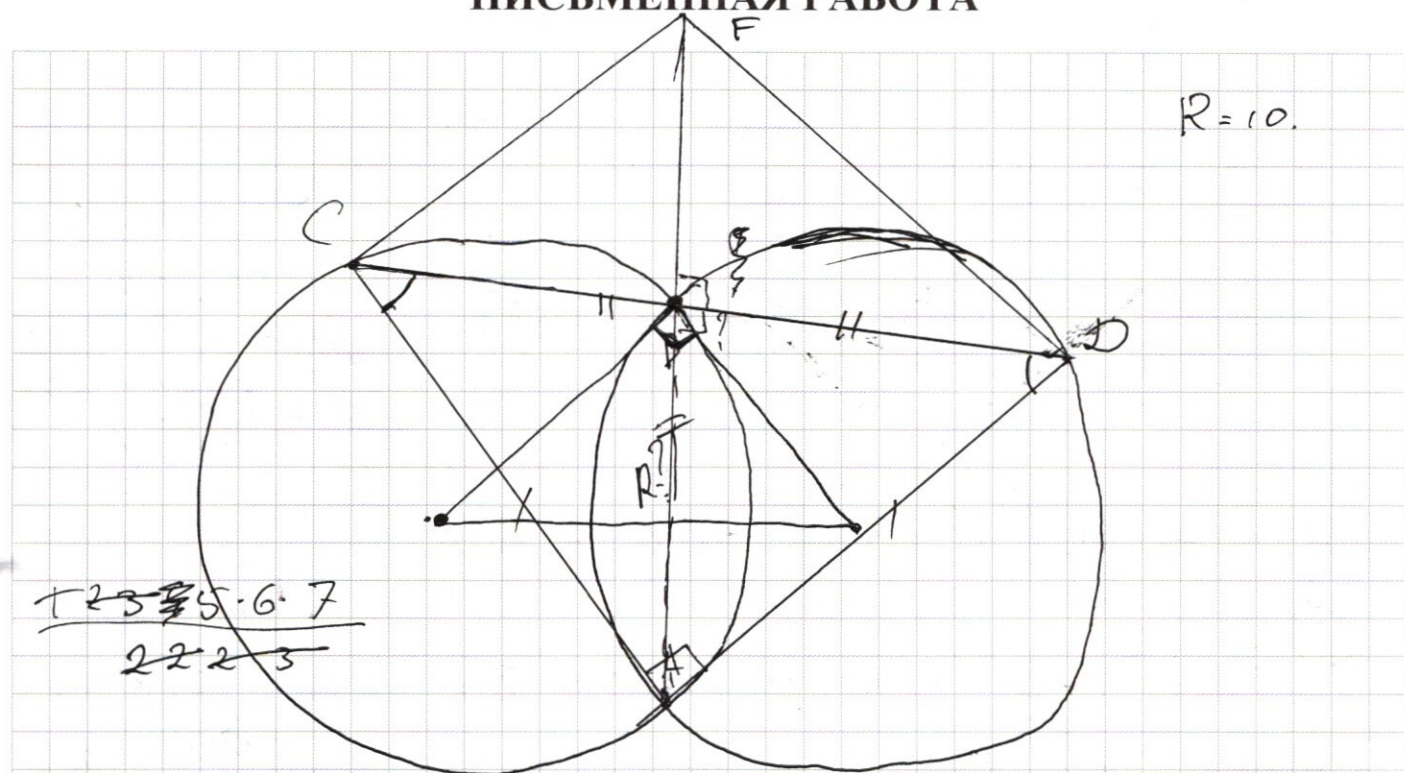
$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-\ln x^4 - \ln \frac{y}{x^7}} = 1$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-\ln \frac{y}{x^3}} = 1 \quad C$$

$$x^{2 \ln x} = y^{-\ln \frac{y}{x^3}}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{\cos 9x}{\cos 5x} = \frac{\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x}{\cos 5x} = (\cos 4x - 1) \cos 5x - \sin 4x \sin 5x$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1) - \sin 5x (\sin 4x - 1) + \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x =$$

$$\cos 5x (2 \cos 4x - 1) + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1 + \sin 4x) \approx \sin 5x (\sin 4x - 1 - \cos 4x)$$

$$1015x = 4$$

$$\sinh x$$

$$-6 \ln x = -6 \ln 2x + \ln x$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0, \quad x > 0, y > 0$$

$$1 - \frac{x}{y} - 2\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 8\frac{x}{y^2} - \frac{4}{y} = 0.$$

$$1 - \frac{1}{y}(x+4) + \frac{2}{y^2}(4x-x^2) = 0.$$

~~$$1 - \frac{1}{y}(x+4) + \frac{2}{y^2}x(4-x)$$~~

~~$$\frac{\ln y}{y} = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2} = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2} = 1$$~~

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0.$$

$$D = x^2 + 8x + 16 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ 4-x \end{cases}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$\frac{16}{2} \cdot x^{-\ln x} = 2 \cdot x^{\frac{\ln 2}{x^6}}$$

$$2^{-\ln x + \ln(2x^6)} = 2^{-\ln(2x^6) + \ln x^6}$$

$$2^{\ln 2x^2} = x^{\ln \frac{1}{2}}$$

~~$$2x^6 \ln x = 2x \ln \frac{2}{x^6}$$~~

~~$$6 \ln x = 6 \ln 2x$$~~

~~$$x = 2x$$~~

~~$$(16 - 8x + x^2)$$~~

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)$$

$$x^{-6 \ln x} = 4x^{-6 \ln 2x}$$

$$x^{-6 \ln 2x} = x^{-6 \ln 2x}$$

$$4 = x^{\log_x 4} \Rightarrow x^{-6 \ln x} = x^{-6 \ln 2x + \log_x 4}$$