

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases} \quad \text{ОДЗ:} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

✗ (1) упр-е: $(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$, на ОДЗ обе части больше 0, тогда возьмем лог. логарифмы от обеих частей.

$$\ln((x^2 y^4)^{-\ln x}) = \ln(y^{\ln(\frac{y}{x^7})})$$

$$-\ln x \cdot 2(\ln x y^2) = \ln(\frac{y}{x^7}) \cdot \ln y$$

$$-2\ln x(\ln x + 2\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\ln y$$

$$-2(\ln x)^2 + (-4\ln x \ln y) = (\ln y)^2 - 7\ln x \ln y$$

$$2(\ln x)^2 - 3\ln x \ln y + (\ln y)^2 = 0$$

$$\text{Пусть } \ln x = t, \text{ тогда}$$

$$\ln y = a, \text{ тогда } 2t^2 - 3at + a^2 = 0$$

$$t = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 8a^2}}{4}; \quad t = \frac{3a \pm \sqrt{a^2}}{4}; \quad t = \frac{3a \pm a}{4}$$

$$\begin{cases} t = a \\ t = \frac{1}{2}a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y \\ \ln x = \frac{1}{2}\ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y & ① \\ x = \sqrt{y} & ② \end{cases}$$

① $x = y$, подставим в (2) упр-е

$$x^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x=0 - \text{пост. корень, но не подх под ОДЗ} \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} - \text{решение.}$$

② $x = \sqrt{y}$ подставим в ур-е (2)

$$y^2 - y\sqrt{y} - 2y + 8\sqrt{y} - 4y = 0$$

$$(8-y)\sqrt{y} = y(6-y)$$

$y=0$ - корень, но не подх под ОДЗ.

$\exists y \neq 0$

$$(8-y) = (6-y)\sqrt{y}. (*)$$

$$64 - 16y + y^2 = y \cdot 36 - 12y^2 + y^3$$

$$y^3 - 13y^2 + 52y - 64 = 0.$$

$$f(y) = y^3 - 13y^2 + 52y - 64$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -13 & 52 & -64 \\ 4 & 1 & -9 & 16 & 0 \end{array}$$

$$(y-4)(y^2 - 9y + 16) = 0.$$

$$(*) \quad 8-y = 6\sqrt{y} - y\sqrt{y}$$

$$\exists k = \sqrt{y}, k > 0$$

$$k^3 - k^2 - 6k + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r|rrrrr} & 1 & -1 & -6 & 8 \\ 2 & 1 & 1 & -4 & 0 \end{array}$$

$$(k-2)(k^2 + k - 4) = 0$$

$$\begin{cases} k=2 \\ k = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}, \text{с учетом } y \geq 0$$

$$\begin{cases} k=2 \\ k = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = 4 \\ y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 2 \\ y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

Ответ: $(2; 2); (2; 4); (\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9+\sqrt{17}}{2})$.

№ 1

№ - кол-во восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Зная в записи числа, мы можем использовать цифры 1, 3 раза цифру 7, а так же либо 3 раза цифру 3, либо цифру 3 и цифру 9. Других способов быть не может, т.к. разложение числа на простые множители может произвестись лишь 1 способом, а произведение $3 \cdot 7 = 21$ и $7 \cdot 7 = 49$ больше 9 и не могут быть ~~записаны~~ использованы как цифра при записи числа.

№ - кол-во таких чисел, без использования цифры 9.

№₂ - кол-во таких чисел, содерж. цифру 9.

тогда $N = N_1 + N_2$

~~$N_1 = 8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 8^3 \cdot 7^3 \cdot 6^2$~~
~~вумантос расстоковви трук~~
~~вумантос расстоковви семерк~~
~~вумантос расстоковви единиц.~~

~~Эти числа $\neq$ сост из 2х единиц, $\neq$ 3х трук и 3х семерк.~~

~~$N_2 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 8^4 \cdot 7^2 \cdot 6^2$~~

~~Эти числа состоят из 3х единиц, трук, девятка, и 3х семерк.~~

есть C_8^2 способов расставить 2 единицы по 8 местам.

тогда $N_1 = C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8! \cdot 6!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 6!} =$
 $= \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6} = 56 \cdot 10 = 560$

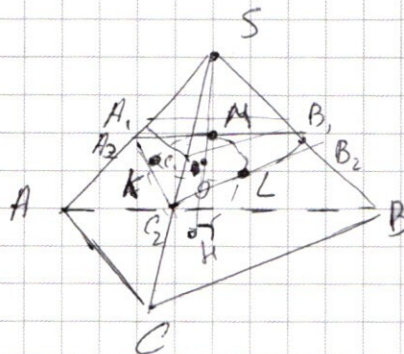
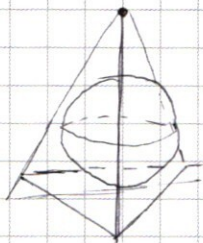
$N_2 = C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 8 \cdot 7 \cdot \frac{6! \cdot 7!}{3! \cdot 3!} =$
 $= 8 \cdot 7 \cdot \frac{5 \cdot 6 \cdot 4}{6} = 2 \cdot 560 = 1120$

$N = 1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$\exists \{A, B, C\} \perp SH$
 $ABC \perp SH$

$$S_{A,B,C} = 1$$

$$S_{ABC} = 16$$

$A, B, C, S \sim ABCS$

$$k = \frac{|SM|}{|SH|} \quad k^2 = \frac{S_{A,B,C}}{S_{ABC}}$$

$|SM| = |SH| - 2R$, где R - радиус окружности.

$$\frac{|SH| - 2R}{|SH|} = \sqrt{\frac{1}{16}}$$

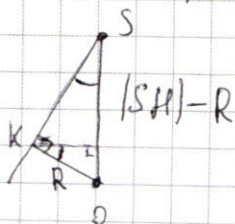
$$4(|SH| - 2R) = |SH|$$

$$3|SH| = 8R$$

$$R = \frac{3}{8}|SH|$$

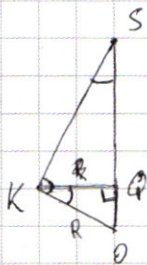
$\exists A_2, B_2, C_2$ - сечение $SABC$ плоскостью KLM

$\triangle SOK$



$$\sin(\angle KSO) = \frac{R}{|SH| - R} = \frac{\frac{3}{8}|SH|}{\frac{5}{8}|SH|} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin(0.6)$$



$$\sin(\angle QKO) = \frac{QO}{R}$$

$\angle QKO = \angle OSK$ (как углы со стороны $\perp$ стороны)

$$QO = R \sin(\angle KSO) = 0,6 R.$$

Аналогично $\angle OSK = \angle QSM = \arcsin(0,6)$.

$$\left. \begin{array}{l} SO \perp QK \\ SO \perp QL \end{array} \right\} SO \perp (KML)$$

$$SABC \sim SA_2B_2C_2$$

$$k^2 = \frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}} \quad k = \frac{|SH| - R - QO}{|SH|}$$

$$S_{A_2B_2C_2} = \left(\frac{\frac{8}{3}R - R - \frac{3}{5}R}{\frac{8}{3}R} \right)^2 \cdot 16 = 16 \left(\frac{8 - 3 - 0,9 \cdot 2}{8} \right)^2 =$$

$$= 2(15 - 1,8) = 32,2 = 6,41 = \frac{10,24}{64} \cdot 16 = 2,56.$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin(0,6)$

$S_{A_2B_2C_2} = 2,56$ - площадь сечения $SABC$ плоскостью KLM .

$$S_{A_2B_2C_2} = 2,56$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\begin{aligned} \sin 5x - \cos 5x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin 5x \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$\sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) \text{ аксиоматично}$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\cancel{\sin \alpha + \beta} \quad \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$\sin 7x = \sin(4x + 3x) = \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x$$

$$\exists x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} : \text{не корни; } y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} - \text{не корни}$$

$$\exists x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \text{ тогда разделим обе части на } \cos 4x$$

$$2 \sin 4x \cdot \cos 3x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \sin 3x \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\cos 4x = \cos\left(2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(2\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 & (1) \\ \sin 7x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$(2) \quad \sin 7x = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\cos\left(7x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\begin{cases} 7x - \frac{\pi}{2} = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x - \frac{\pi}{2} = -2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9}k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k \\ x = \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9}k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ответ: } \left\{ -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}; \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}k; \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi}{9}k \right\}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

~5

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$[(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2] = a \quad (2)$$

требуется, что график 2 уравн предст из себя 4х окр с коорд. центра, $(12; 5)$, $(-12; -5)$, $(-12; 5)$, и $(12; -5)$, и радиусами a ~~на~~ ~~исследует~~ ур - в (1)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$1) \quad \begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x \geq -5 \end{cases}$$

$$x^2 + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$y=0, \quad \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases} \quad \begin{matrix} -x \leq 5 \\ x \leq 5 \end{matrix}$$

$$y=0, \quad x \in [-5; 5].$$

$$2) \quad \begin{cases} x+y \leq -5 \\ y-x \leq -5 \end{cases}$$

$$-x-y-5+x-y-5=10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10, \quad \begin{cases} x-10 \leq -5 \\ -x-10 \leq -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq 5 \\ x \geq -5 \end{cases}$$

$$3) \quad x+y+5 - y + x-5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$\begin{cases} 5 + y + 5 > 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

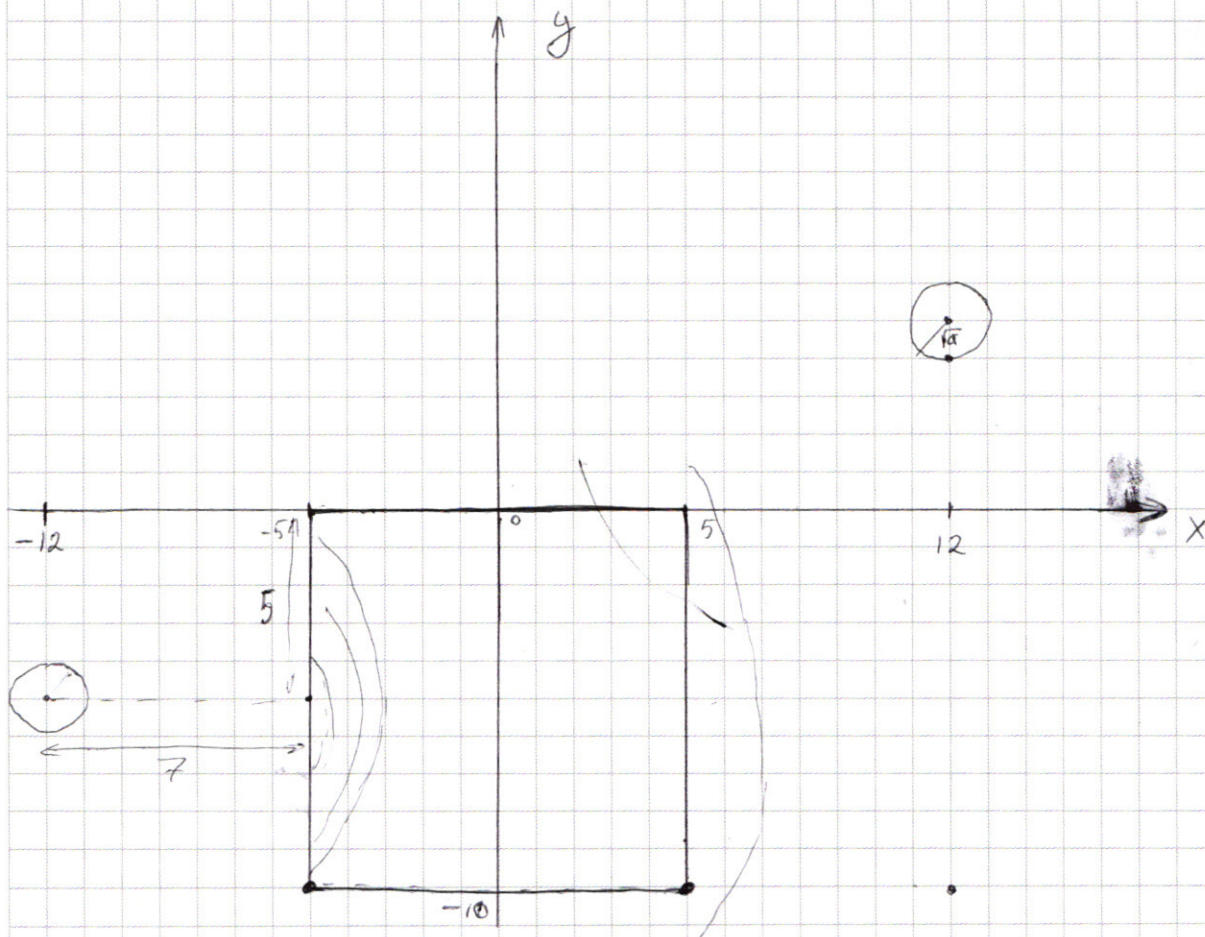
$$\begin{cases} y > -10 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$4) \quad -x-y-5 + y - x + 5 = 10$$

$$x = -5$$

$$y \leq 0$$

$$y > -10$$



1) имеет ровно 2 решения.

$$\begin{cases} \sqrt{a} > 7 \\ \sqrt{a} \leq \sqrt{49+25} \\ \sqrt{a} < \sqrt{49+25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a} > 7 \\ \sqrt{a} < \sqrt{74} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 49 \\ a < 74 \end{cases}$$

это значит, когда левая кр. пересек левую сторону квадрата в 2х точках, а правая окружность не имеет пересек с квадратом.

2) имеет ровно 2 решения, если левая кр. не пересек квадрат, а правая пересек в 2х местах.

$$\begin{cases} \sqrt{a} > \sqrt{25+49} \\ \sqrt{a} < \sqrt{17^2+15^2} \\ \sqrt{a} > \sqrt{17^2+25} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 74 \\ a < 189+225 \\ a > 189+25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 214 \\ a < 414 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + (2^{32} - 1)2x$$

$\log_2$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}x - 2x$$

$$f(x) = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

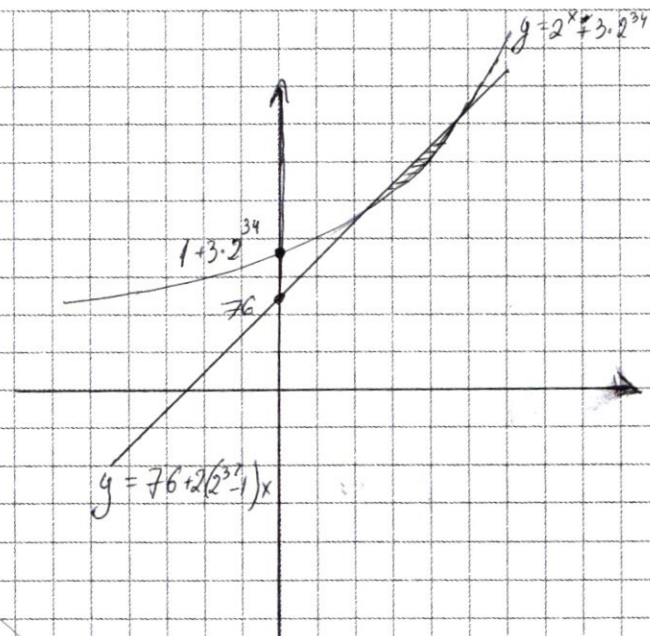
$$g(x) = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$g'(x) = 2^{33} - 2$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2$$

$$2^{33} - 2 = 2^x \ln 2$$

$$2^{33} - 1 = 2^{x-1} \ln 2$$



$$x_0 = \log_2 \left(\frac{2^{33} - 2}{\ln 2} \right)$$

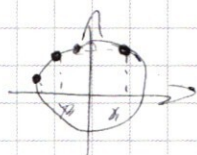
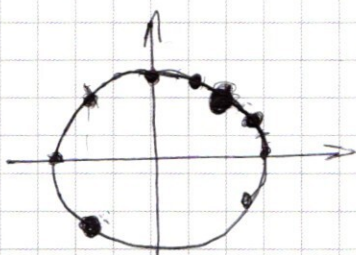
из некоторого значения x_0 . $g(x)$ растёт быстрее,
чем $f(x)$, после x_0 . $g(x)$ растёт медленнее
чем $f(x)$, следовательно если при x_0
 $f(x_0) > g(x_0)$, система не имеет реш,
если $f(x_0) = g(x_0)$, есть и x_0 ; $f(x)$ - целые,
система имеет реш, в всех остав-
ших случаях придётся думать дальше.

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}x - 2x$$

$$2^{33} - 2 = 2^x \ln 2$$

$$2^{33} - 2 = (76 + 2^{33}x - 2x - 3 \cdot 2^{34}) \ln 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$5x + 3x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2x + \frac{\pi}{4}$$

$$\sin 7x = \sin(4x + 3x) =$$

$$= \sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x.$$

$$\begin{cases} \sin 4x \cdot \cos 3x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin 3x \cdot \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \cos 4x \neq 0. \end{cases}$$

$$\sin 4x \cos 3x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) + \sin 3x \cos 4x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos 4x (\sin 3x \sin(2x + \frac{\pi}{4}) - 1) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = a$$

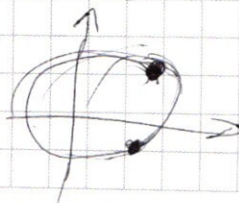
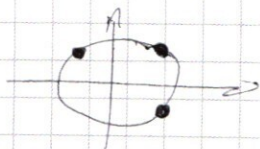
$$4x = 2a - \frac{\pi}{2}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \cos x \cos \frac{\pi}{2} + \sin x \sin \frac{\pi}{2}$$

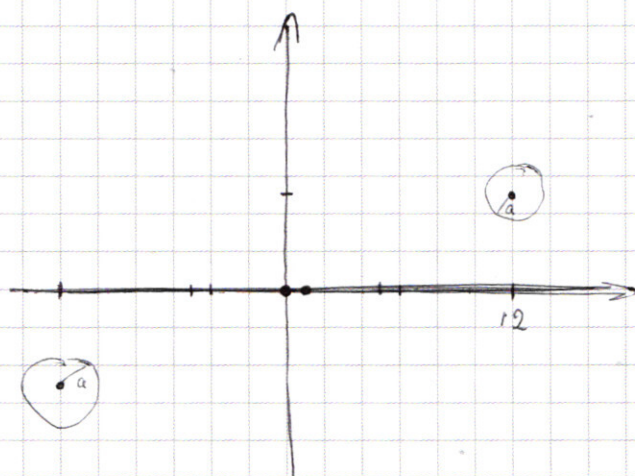
$$\sin x$$

$$\sin 7x = \cos(7x - \frac{\pi}{2}) \cos 2a - \frac{\pi}{2} = \sin 2a.$$

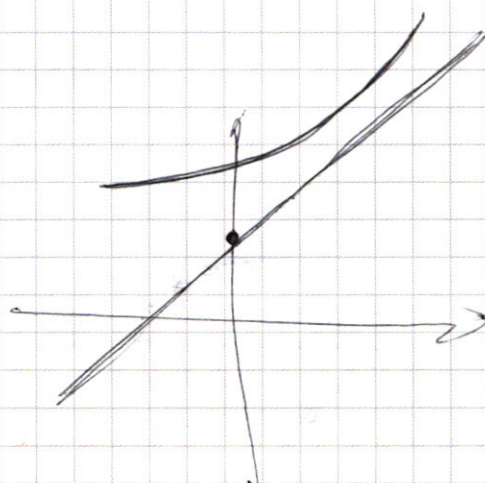


$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$



$$y = 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$$



$$76 + x - 2(2^{2x} - 1)$$

Σ расс. от y до $x+5$ и до $x-5=10$.

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x^2 + y^2 + 25 + 10x + 10y + 2xy + y^2 + x^2 + 25 - 2xy - 10x + 10y = 50$$

$$2x^2 + 2y^2 + 20y + 2||| = 50$$

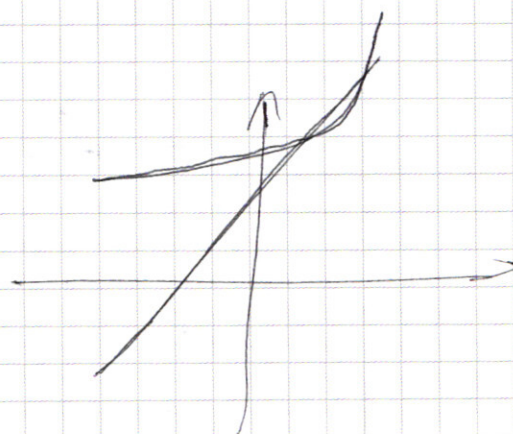
$$x^2 + y^2 + 20y - 50 = -|||$$

$$\exists x+y > -5 ; y-x > -5$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$y=0, \quad y > x-5, \\ y > -x-5$$

$$y=0, \quad x \leq 5$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

$$2 \left(\frac{1}{2} \sin 5x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x \right) =$$

$$\begin{aligned} \sin 5x - \cos 5x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sin 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \left(\sin 5x \cos \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{4} \cos 5x \right) = \\ &= \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

аналогично $\sin 9x + \cos 9x = \sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right)$

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x &= 0 \\ \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x &= 0. \end{aligned}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$+ \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x \\ \alpha = \frac{x + y}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha - \beta = y \\ \beta = \frac{x - y}{2} \end{cases}$$

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x + y}{2} \right) \sin \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(\frac{(9+5)x}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) =$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0.$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\begin{aligned} \text{Р.4: } & \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \\ & = \sin \alpha (\cos \beta + \sin \beta) - \cos \alpha (\sin \beta + \cos \beta) = \\ & = (\sin \beta + \cos \beta) (\sin \alpha - \cos \alpha) \end{aligned}$$

$$\alpha + \beta = x \quad \alpha = \frac{x+y}{2}$$

$$\alpha - \beta = y \quad \beta = \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x + \cos y = \left(\sin \frac{x-y}{2} + \cos \frac{x-y}{2} \right) \left(\sin \frac{x+y}{2} - \cos \frac{x+y}{2} \right)$$

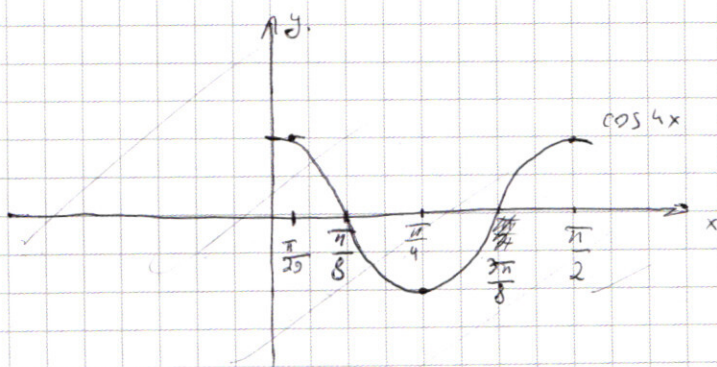
$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$\cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) + \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \alpha \cos \beta = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$2 \cos 7x \cdot \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$-\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sim 3. \quad (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0. \end{matrix}$$

$$-\ln x \cdot 2 \ln x \cdot y^2 = \ln \frac{y}{x^2} \cdot \ln y.$$

$$-2 \ln x (\ln x + 2 \ln y) = \ln y (\ln y - 2 \ln x).$$

$$-2(\ln x)^2 + 4 \ln y \cdot \ln x = (\ln y)^2 - 2 \ln y \ln x.$$

$$2(\ln x)^2 - 3 \ln x \ln y + (\ln y)^2 = 0.$$

$$\ln x = t$$

$$\ln y = a$$

$$2t^2 - 3at + a^2 = 0$$

$$t = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4 \cdot 2a^2}}{4} =$$

$$= \frac{3a \pm |a|}{4} = \frac{3a \pm a}{4}$$

$$t = a \quad t = \frac{1}{2}a$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln y. \\ \ln x = \frac{1}{2} \ln y. \end{cases} \quad \begin{cases} x = y & ① \\ x = \sqrt{y} & ② \end{cases}$$

$$① \quad x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$2x(2 - x) = 0$$

$$\begin{matrix} x = 0 & - \text{не подходит по ОДЗ.} \\ x = 2 \end{matrix}$$

$$② \quad y^2 - y\sqrt{y} - 2y^2 + 8\sqrt{y} - 4y = 0$$

$$-y^2 + (8 - y)\sqrt{y} - 4y = 0$$

$$\sqrt{y}(8-y) = y(y+4) \quad // \quad y = 2 - \text{и.к.}$$

$$y \neq 8$$

$$\sqrt{y}(8-y) = y^2(y+4)^2$$

$$8y - 16y^2 + y^3 = y^4 + 8y^3 + 16y^2$$

$$y^4 + 7y^3 + 32y^2 + 8y = 0$$

$$y^3 + 7y^2 + 32y + 8 = 0$$

	1	7	32	8
-2	1	85	22	
-4	1	3	20	
-8	1	-1		

$$y^2 + 7y + 32 = 0$$

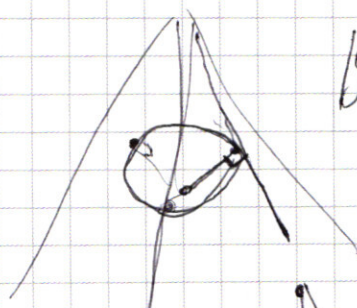
$$y = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4 \cdot 32}}{2} - \text{нет корней}$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \uparrow$$

нас интересует $y > 0$.

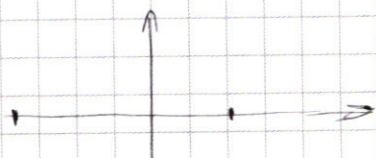
$$f(0) = 32 > 0 \Rightarrow \text{мы } y > 0 \quad f(y) \neq 0$$

Ответ: (2; 2).

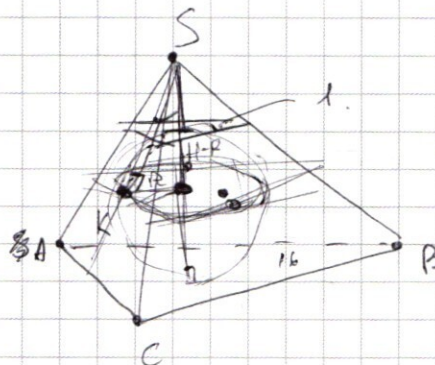
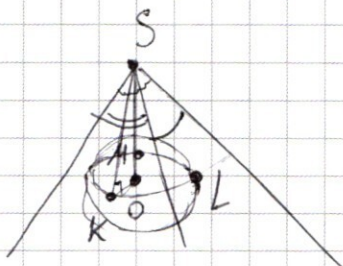


$$|y+15| + |y-5| = 10$$

$$|y-5| + |y+15| = 10$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin(\angle KSO) = \frac{R}{H-R} =$$

$$= \frac{R}{H}$$

$$= \frac{\frac{3}{8}H}{\frac{5}{8}H} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$h_1 = H - 2R$$

$$k^3 = \frac{\frac{1}{3}H \cdot 16}{\frac{1}{3}(H-2R)} = \frac{16H}{H-2R}$$

$$k^2 = 16$$

$$\frac{H}{H-2R} = 4$$

$$H = 4H - 8R$$

$$R = \frac{3}{8}H$$

$$\angle KSO = \arcsin(0,6)$$

$$\frac{S_{\text{сек}}}{16} = k^2 = \left(\frac{H-R}{H} \right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{8}H}{H} \right)^2 = \frac{25}{64}$$

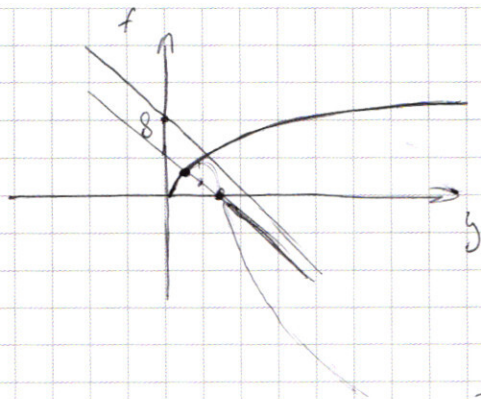
$$S_{\text{сек}} = \frac{2^4 \cdot 25}{2^6} = \frac{25}{4} = \underline{\underline{6,25}}$$

$$\left(\frac{3,2}{8} \right)^2 = \frac{3,2 \cdot 3,2}{64} \cdot 16 = \frac{10,24}{4}$$

$$10,24$$

$$2^8 = 256$$

$$\begin{array}{r} 3,2 \\ \times 3,2 \\ \hline 6,4 \\ + 9,6 \\ \hline 10,24 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} \sqrt{17} \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ + 17 \\ \hline 189 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times 15 \\ \hline 75 \\ + 75 \\ \hline 225 \end{array}$$

$$y^2 - 9y + 16 = 0.$$

$$\begin{array}{r} 225 \\ + 189 \\ \hline 414 \end{array}$$

$$y = \frac{+9 \pm \sqrt{81 - 64}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}.$$

$$\begin{array}{r} 189 \\ + 25 \\ \hline 214 \end{array}$$

$$x = -4$$

$$x^2 = 16$$

$$x = 4$$

$$8 - y = 6\sqrt{y} - y\sqrt{y}.$$

$$\sqrt{y} = k$$

$$8 - k^2 = 6k - k^3$$

$$k^3 - k^2 - 6k + 8 = 0.$$

	1	-1	-6	8
1	1	0	-6	2
2	1	1	-4	0

$$(k-2)(k^2+k-4) = 0.$$

$$k^2 + k - 4 = 0$$

$$k = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} =$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$k^2 = y = \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17}{4} =$$

$$= \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y^2 - 6y + 8 = 0.$$

$$y(y-6) = 0.$$

$$y^2 - 2y - 4y + 16 - 4y = 0$$

$$y^2 - 6y + 12 = 0.$$

$$y^2 - 2y - 4y + 16 - 4y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$n = 8$ - кол-во знаков числа.

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ 9 \\ \hline 0261 \\ 18 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$9261 = 3^2 \cdot 1029$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ 9 \\ \hline 129 \\ 12 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 843 \overline{) 33} \\ 33 \\ \hline 13 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ 28 \\ \hline 63 \end{array}$$

$9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow$ чтобы в произведении цифр числа было равно 9261, число должно состоять из 3 тройки, 3 семерки и 2 единицы, т.к. еще влезет на произвед., и ~~не~~ может состоять из других цифр, т.к. так же может состоять из девятки влезет $2 \times$ тройки.

Без девятки: $3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

2 - "1"

3 - "3"

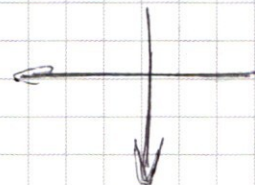
3 - "7"

$3 \cdot 3 \cdot 2$

$$\begin{array}{r} 1 \overline{) 33} \\ 33 \\ \hline 77 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 3 \\ 7 \end{array}$$

~~$8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$~~ $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$



$$\cancel{111} 8 = \frac{7}{11} + \times 5 + \frac{7}{11} - \times 6$$

3 3 2 2 1 1 1 1

1; 1; 3; 3; 3; 7; 7; 7.

$$\underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} = 8^3 \cdot 7^3 \cdot 6^2$$

с 9: 111 339 777

$$\underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underline{8} \cdot \underline{7} \cdot \underline{6} = 8^4 \cdot 7^2 \cdot 6^2$$

$$A = 8^3 \cdot 7^3 \cdot 6^2 + 8^4 \cdot 7^2 \cdot 6^2 = 8^3 \cdot 7^2 \cdot 6^2 (7 + 8) = \\ = 15 \cdot 8^3 \cdot 7^2 \cdot 6^2 = 15 \cdot 64 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 8 = 15 \cdot 49 \cdot 36 \cdot 256 =$$

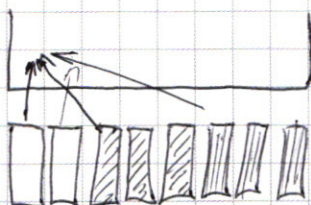
~~8~~ ~~8~~ ~~3~~ $3^8 = (81)^2 =$

$$3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

~~XXX~~
~~XXX~~
~~XXX~~

$$\frac{1 \ 1 \ 3 \ 3 \ 3 \ 7 \ 7 \ 7}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}$$

$$\frac{1 \ 3 \ 7 \ 1 \ 3 \ 7 \ 7 \ 7}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}$$



3/1 C

$$9 \cdot 8 = 72$$

1 1 3 3 3 7 7 7
1 1 3 3 7 7 7 3
1 1 3 3 7 7 3 7
1 1 3 3 7 3 7 7
1 1 3 7 3 7 7 3
1 1 3 7 3 7 3 7
1 1 3 7 3 3 7 7

1 7 3 3 7 7 3
1 7 3 3 7 3 7
1 7 3 3 3 7 7

$$\frac{81}{81} \cdot \frac{81}{81} = \frac{648}{6561} \\ C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \\ = \frac{8 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{2 \cdot 6} = \\ = 560$$

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \\ = 8 \cdot 7 \cdot \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{6} = \\ = 20 \cdot 8 \cdot 7 = \\ = 560 \cdot 2$$