

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

???

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

+

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

Загаза на нинге

- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

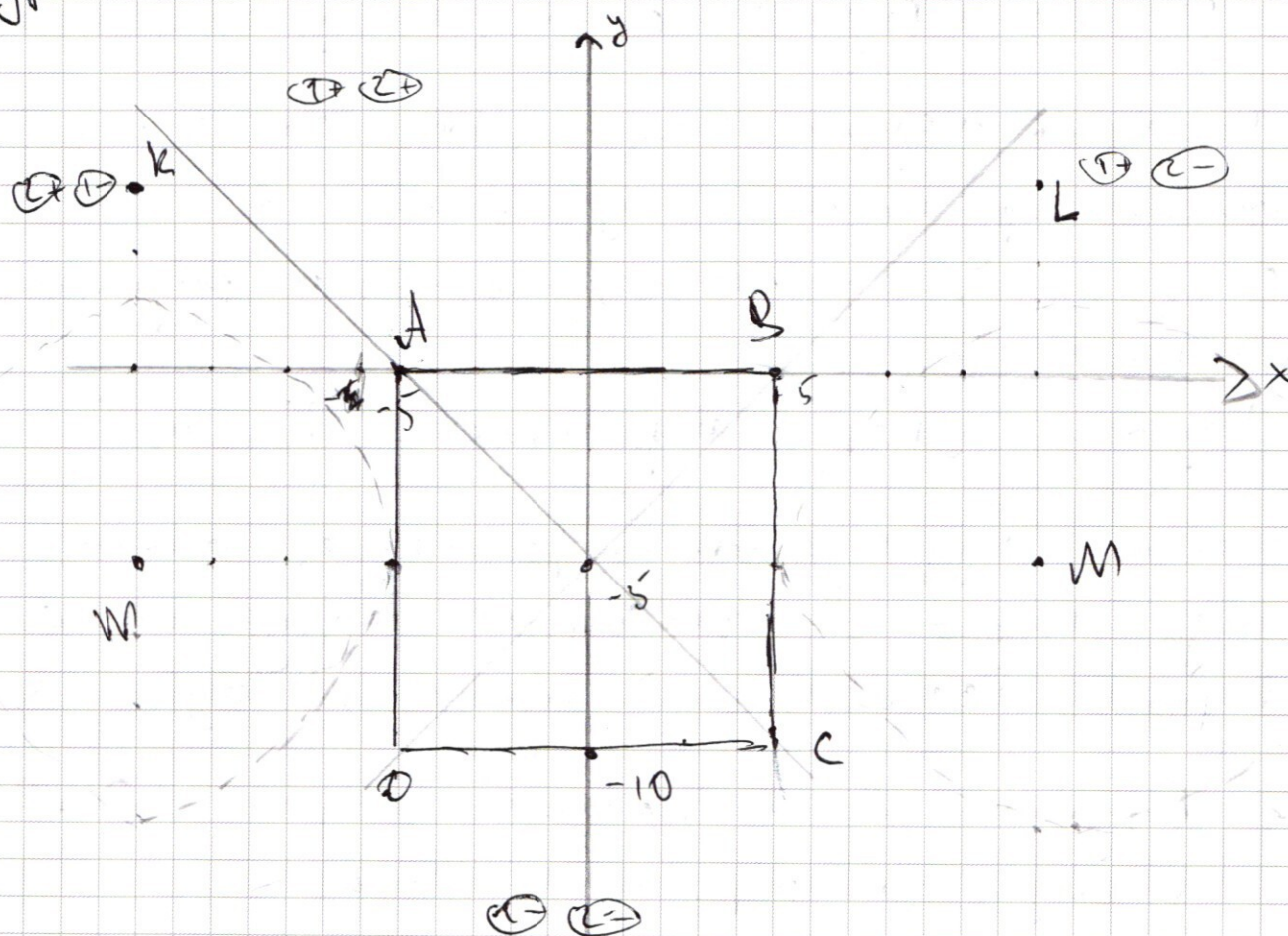
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

Раскроем модули и нарисуем график этого уравнения.



1) ~~1+2+~~ 1+2+

2) 1+2-

$$x+y+5+y-x+5=10 \Rightarrow$$

$$2y=0 \Rightarrow y=0$$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10 \Rightarrow x=5$$

$$3) \quad 1-2-$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$2y = -20$$

$$y = -10$$

$$4) \quad 2+1-$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

И, получив такое рисунка видно, что график ^{вернее} "линии" уравнение - квадрат.

Отметим его вершины, как A, B, C, D

$$2) \quad (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \rightarrow \text{(это ур-е окружности)}$$

Раскрыв модули получим, что это 4

касается окружности с центрами в

$(12; 5)$ $(12; -5)$ $(-12; 5)$ $(-12; -5)$ и радиусом равным $\sqrt{a}$

Назовем центры окружностей K, L, M, N

Система будет иметь 2 решения, только когда только 2! Окружности будут касаться квадрата. Рассмотрим случаи по возраст. a.

1) Окружности N и M касаются сторон AD и BC

$$\Rightarrow \text{радиус этих окр.} = 12 - 5 = 4 \Rightarrow$$

$$4 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 16 \quad \text{эт}$$

2) Окружности K и L касаются в точках A и B, тогда $\sqrt{a} = 13$ $\sqrt{a} = \sqrt{12^2 + 5^2}$, но в этом случае окружности M и N будут пересекать стороны квадрата

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) Окружности M и N касаются вершин B, C, A, D , $\Rightarrow$ решение 4 - не подходит

4) Окружности K, L касаются вершин D, C .

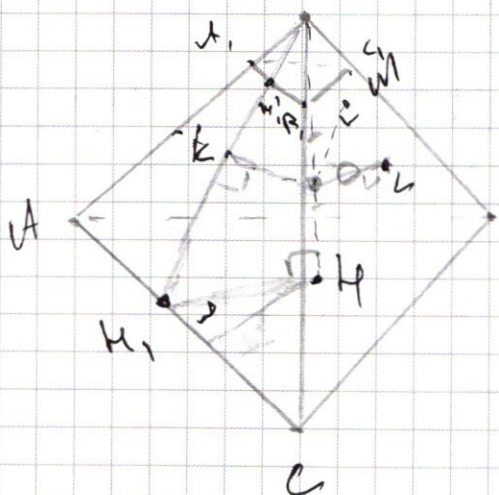
Тогда $z = \sqrt{15^2 + 14^2} \Rightarrow a = 15^2 + 14^2 = 514$

Ответ: $a = 49, a = 514$

Б4

Для упрощения чертежа не будем прорисовывать сферу. Она «вписана» в пирамиду $SABC$, в основании которой лежит

$A \neq C, S = 16$



1) $SK \cap AC = H_1$

2) SKH_1 - уг-уг. трз.

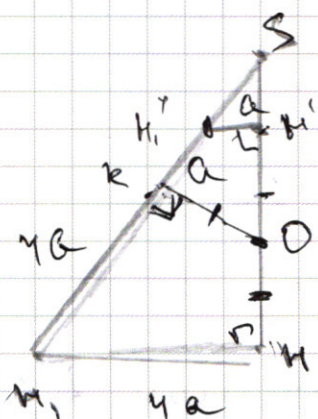
3) $SL \cap BC = H_2$

4) $SM \cap AB = H_3$

5) Плоскость верхнего $\Delta = A, B, C$, пересечения A, B, C с $SH = H'$, $SH' \perp A, B, C$, $SH \cap AB = H'$

6) $H, K : H', K' = \sqrt{16} : \sqrt{1} = 4 : 1, HK \perp AC, H'K' \perp AC$

4) Термическая и SKH, и все элементы
у данно 20 1



g) $\mu_{\text{KOH}} - p/\delta \Rightarrow$

$$\angle OKH = \angle OKK = 90^\circ$$

$$\hookrightarrow K \subseteq H_1 = \hookrightarrow K \subseteq H_1 \Rightarrow$$

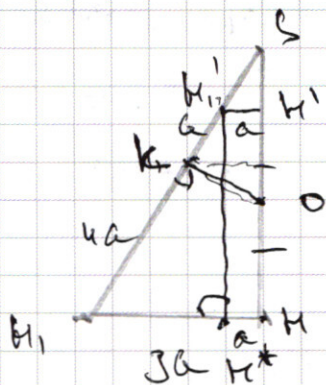
$$\underline{D} \quad H, k \kappa - p/\delta \Rightarrow H, k = H, \text{ bei } -4a$$

8) $\Delta O K' K - p \parallel O \Rightarrow \angle O K K' = \angle O K' K \Rightarrow$

$$\angle h_1' k h_1' = \angle h_1' k h_1' \Rightarrow \angle h_1' k h_1' - p/\delta \Rightarrow$$

$$k k_1' = k_1' k = a$$

10) Термический и еще раз



a) $H', H'' \perp H, H \Rightarrow$

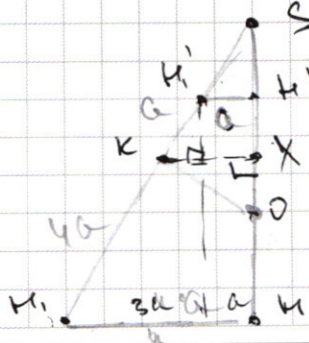
$$\Delta K, K^* K, \sim S K K, \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{kg} \sin(kSO) = \sin(kSH_1) =$$

$$= \sin(k^*H_1, H_1) = \frac{3a}{4a+a} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$$

12) Термический и электрический



13) Сечение KLM в сферу симметрии
будет || треугольнику A, B, C, K
 ABC

14) Действия пунктов 4-12

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

можно повторить для ΔSHH_2 и ΔSHH_3 и
получить такие же результаты (из соображений
симметрии) $\Rightarrow$ коэффициент подобия $\forall$ для всех
3-х Δ - одинаковый $\Rightarrow$ площади будут относиться
се, как k^2 . каждем k .

15) $KX: KX \perp SH$, ~~используя~~ ~~соотношения~~

(подобия) $\Rightarrow \frac{KA}{SA} = \frac{K}{S} \Rightarrow \frac{4a}{5a} = \frac{K}{S} \Rightarrow \frac{4}{5}a = K \Rightarrow K = \frac{4}{5}a$

$\frac{SH}{KH} = \frac{SH'}{KH'} \Rightarrow \frac{SH}{KH} = \frac{SH'}{KH'} \Rightarrow \frac{5a}{4a} = \frac{a}{KX} \Rightarrow \frac{5}{4}KX = a \Rightarrow KX = \frac{4}{5}a \Rightarrow K = \frac{4}{5}a$

$\Rightarrow k = 1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} \Rightarrow$

$k^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$, $1 \cdot \frac{64}{25} = \frac{64}{25} = S$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

$S_{\text{треугольника}} = \frac{64}{25}$

52

$\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 4x \cos 2x + 2\sin 4x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2\sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$$2\sin 4x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 4x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$2(\cos 2x - \sin 2x)(\sin 4x - (\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x)) = 0$$

$$2(\cos 2x - \sin 2x)(\sin 4x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sin 4x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 2\sin(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2})\cos(\frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0 \end{cases} \quad | k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \\ \frac{3x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \\ x = \frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{20} \\ x = \frac{2\pi k}{5} + \frac{4\pi}{36} + \frac{\pi}{12} \end{cases} \quad | k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{36} + \frac{2\pi k}{5} \right\} | k \in \mathbb{Z}$

5.1

$$5261 = 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \Rightarrow$$

возможные 8-значные числа будут состоять из 2-х наборов: 4, 4, 4, 3, 3, 3, 1, 1
4, 4, 4, 3, 3, 1, 1, 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим набор Ш1. ^{6-зн}
Рассмотрим на кол-во разных чисел, состоящих из 3-х тысяч и 3-х единиц, затем рассмотрим кол-во расстановок 1-х единиц в 6-значном числе и перемножим первое число на второе, тем самым найдем кол-во чисел.

кол-во чисел (6-зн. чис. с 3), вычислим по формуле

333777
337377
337737
337773
373377
373737
373773
377337
377373
377733

→ таких чисел всего 10 ⇒
из соображений симм. 6-зн
чисел, начинающихся с 7-

того же 10 ⇒ всего 6-зн чисел - 20

кол-во возможных ^{6-зн} единиц в 3-зн числе.

Фиксируем расположение первой единицы, тогда если она первая, то вторую можно поставить 7-го слос, 2 - 6, 3 - 5 и т.д. ⇒

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 \Rightarrow \text{кол-во}$$

чисел из набора 1 - 28 · 20 = 2800 5600

не утратить общности заменим ~~тройки~~
~~из набора 2~~ в рассуждении о наборе
 1 тройки на единицы, тогда
 получим следующее для набора 2.
 Но 2 и 3 можно разложить в 3-х.
 कैसे уже 28.2 способами, т.к. ком-
 батен "порядок" $\Rightarrow$

Общее число: $28 \cdot 20 + 56 \cdot 20 =$
 $= 16800$

Ответ: 16800 чисел

~~или~~ $\sqrt{3}$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(x^4)}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \quad (1)$$

~~или~~ $(1) \quad y^2 + y(-4-x) + 3x - 2x^2 = 0$

$$D(y) = (4+x)^2 - 4(3x-2x^2) = 16 + 8x^2 + x^2 - 32x + 8x^2 =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{4+x \pm (3x-4)}{2} = \begin{matrix} 2x \\ -x+4 \end{matrix}$$

1) $y = 2x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(16x^6)^{-\ln x} = 2x (\ln 2x^6)$$

$$\text{то } 16x^6 \text{ то } (16x^6)^{\ln x} \cdot \left(\frac{2}{x^6}\right)^{\ln 2x} = 1, \text{ что}$$

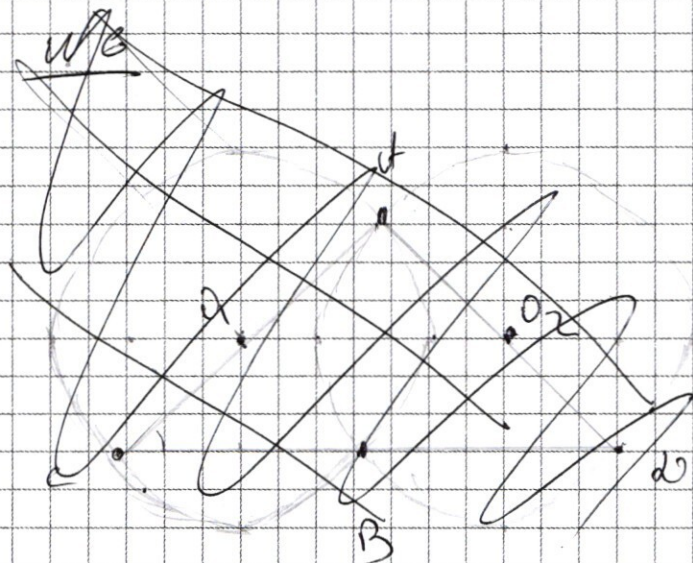
т.е.

$$\Rightarrow f(x) = (16x^6)^{\ln x} \cdot \frac{2}{x^6}^{\ln 2x}$$

$f(x)$ — возрастает, как
произведение 2-ух

Р функций, $\forall x > 0$

$$f(x) > 1$$



$$2) y = x - x + 4$$

$$((x+4)^4 \cdot x^2)^{\ln x} \cdot \left(\frac{x+4}{x^4}\right)^{\ln (x+4)} = 1$$

Заметим, что тригонометрические функции —

единственные корни уравнения будут
любым пара $x=2, y=4$, т.к. и $y \geq x > 0$

(0,3)

Ответ: $\sqrt[3]{2}$

Ответ: $x=2, y=2$



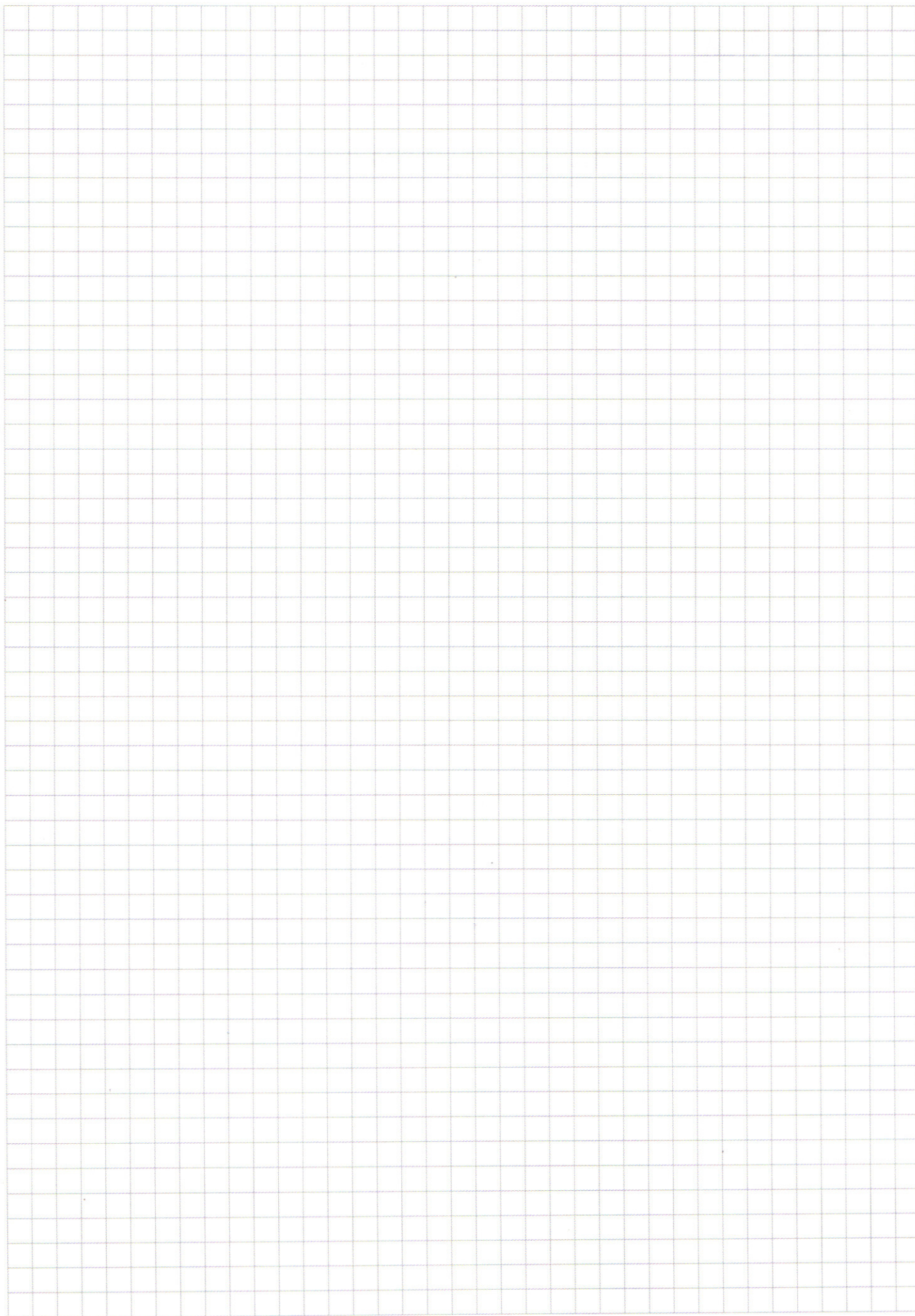
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

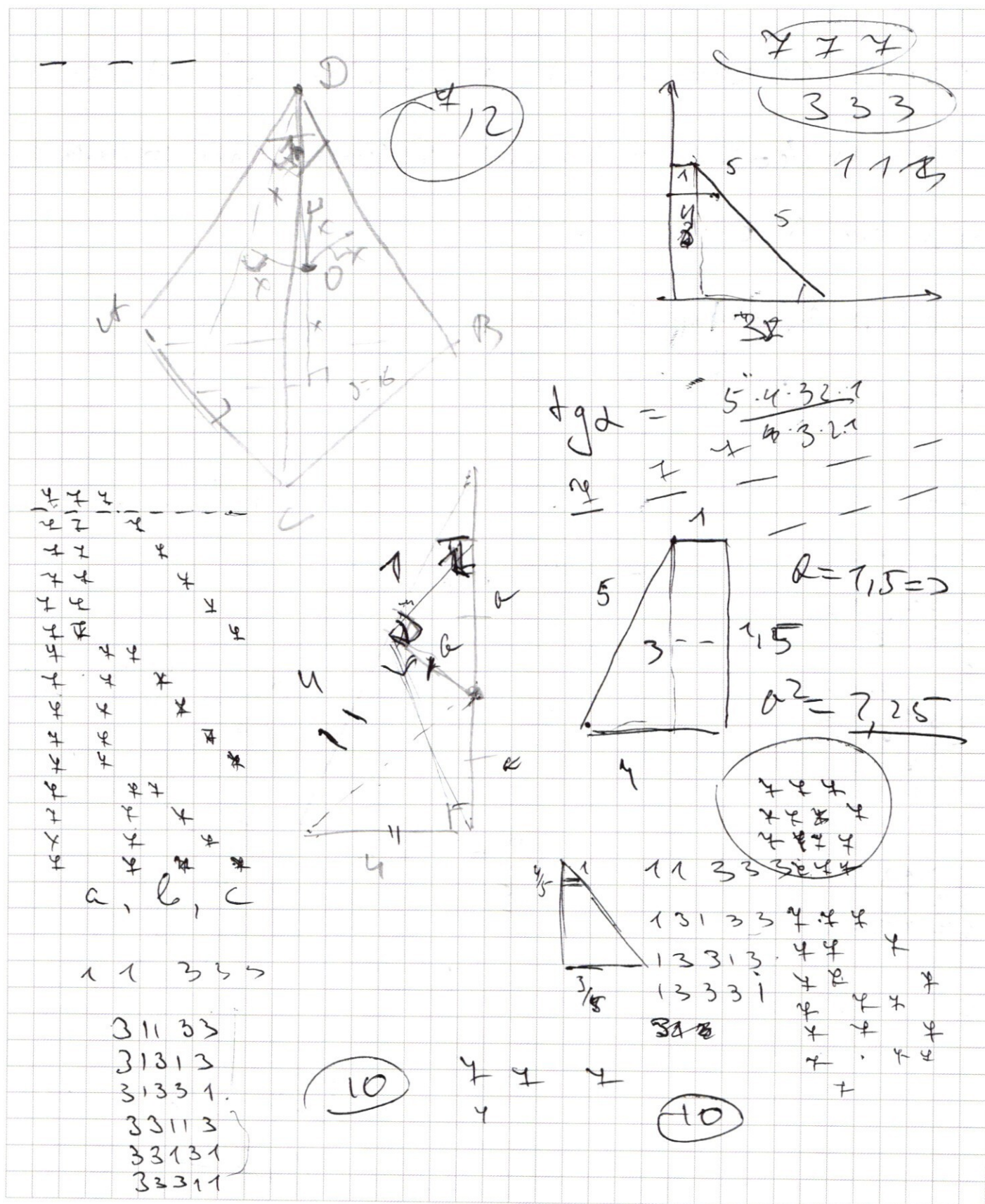
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$-2\sin 4x \sin 2x + 2\sin 4x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

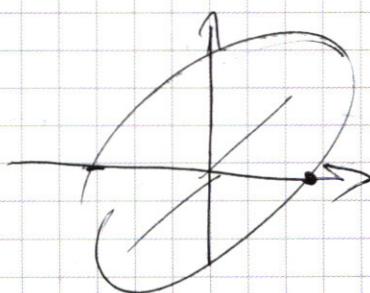
$$2\sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2\sin 4x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\sin(k+\pi) = \sin k \cos \pi + \cos k \sin \pi$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

~~4 4 4 3 3~~
~~3 5 3 4 4 4~~
~~3 3 4 3 4 4~~
~~3 3 4 4~~
~~3 3 3 4 4 4~~
~~3 3 3 4 4 4~~
~~3 3 4 4 3 4~~
~~3 3 4 4 4 3~~
~~3 4 3 3 4 4~~
~~3 4 3 4 3 4~~
~~3 4 3 4 4 5~~
~~3 4 4 3 3 4~~
~~3 4 4 3 4 3~~
~~3 4 4 4 3 3~~



$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

211

$$x = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{5}$$

$$2\pi k$$

$$\frac{\pi}{18} - \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{36} - \frac{9\pi}{36} = -\frac{11\pi}{36}$$

$$4 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$$

$$\frac{x^2 3}{5}$$

$$\frac{60}{84} = \frac{5}{7}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $9261 : 3$ $161 : 3 = 80 + 21 = ?$

$3843084 : 3$

71113

$10425 : 3$

32340

$260 + 63$

$343 : 4$

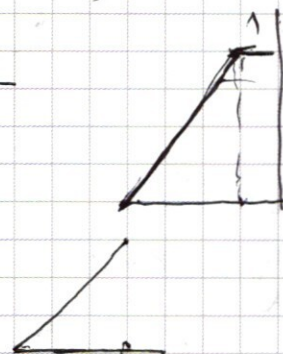
34374

$45 : 4$

$x + y + 5 > 0$

$y - x + 5 < 0$

$7.7.7.3.3.3$



1) Нельзя в записи быть не может 1)

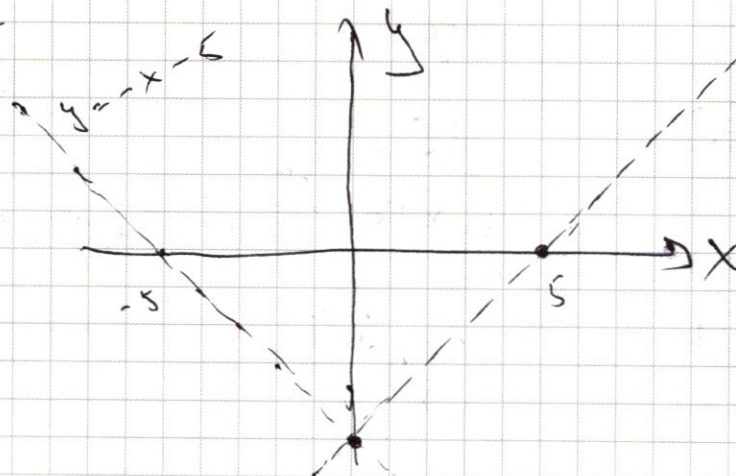
2) 3 3 3 3 3 3 ~~4 4~~ в записи
только тройка

$7 7 7 \quad 3 3 3 \quad 1 1$

$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10$

$y = -x - 5$

$x + y + 5 + y - x - 5$



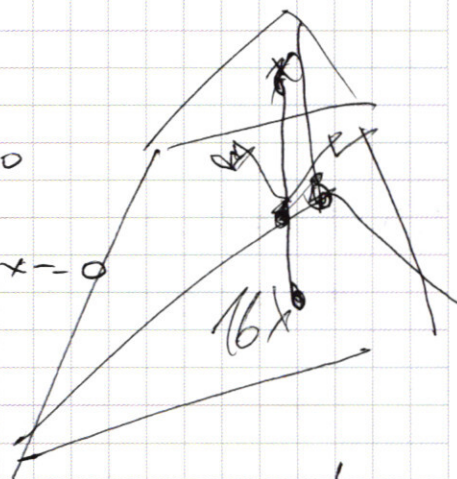
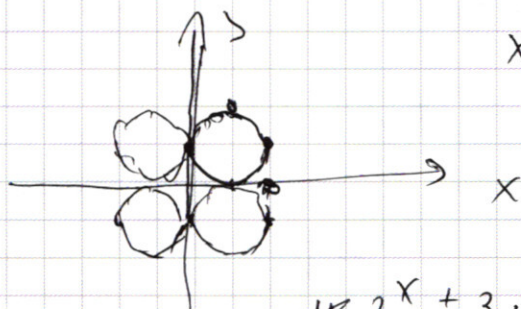
$$(1x+12)^2 + (1y-5)^2 = a$$

$$1x-12)^2 + 4$$

$$(1x+1)^2 + (1y-1)^2 = 1$$

$$x=2 \quad y=0$$

$$x^2 y = 2x = 0$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2^{33} - 2x \quad | -2^{33}$$

$$2^x + 3 \cdot 6 \cdot 2^{33} - 2^{33} \leq y < 76 - 2x$$

$$y = 2x$$

$$y = -x + 4$$

$$1 = \left(y \ln \left(\frac{y}{x+1} \right) \right) \cdot (x^2 y^4) \ln x$$

$$a^{\log a b} = b$$

$$1 = \left(2x \ln \left(\frac{2}{x+1} \right) \right) \cdot (16x^6) \ln x$$

$$2^x + 4 \cdot 5 \cdot 2^{33} \leq y - 2^{33} < 76 - 2x$$

$$\ln(x) \uparrow$$

$$16x^6 \uparrow \quad \ln \ln x =$$

$$\log_e 2 \Rightarrow$$

$$\underline{2 \ln 2 \cdot 16 \ln 1 = 1? \quad \ln 1 = 0}$$

$$a^{\log a b}$$

$$\ln 1 = 0$$

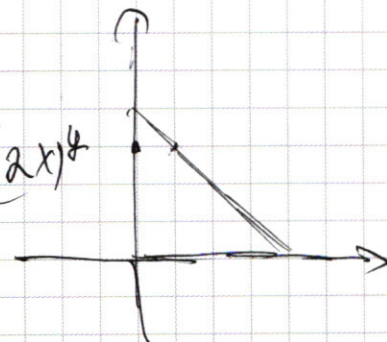
$$2x \ln \left(\frac{2}{x_0} \right)$$

$$\frac{d(y)}{(2x)^4} = \frac{2}{x^6}$$

$$\frac{2}{x_0} \cdot \frac{1}{(2x)^4}$$

$$\left(\frac{2}{x^2} \right) \ln(2x)$$

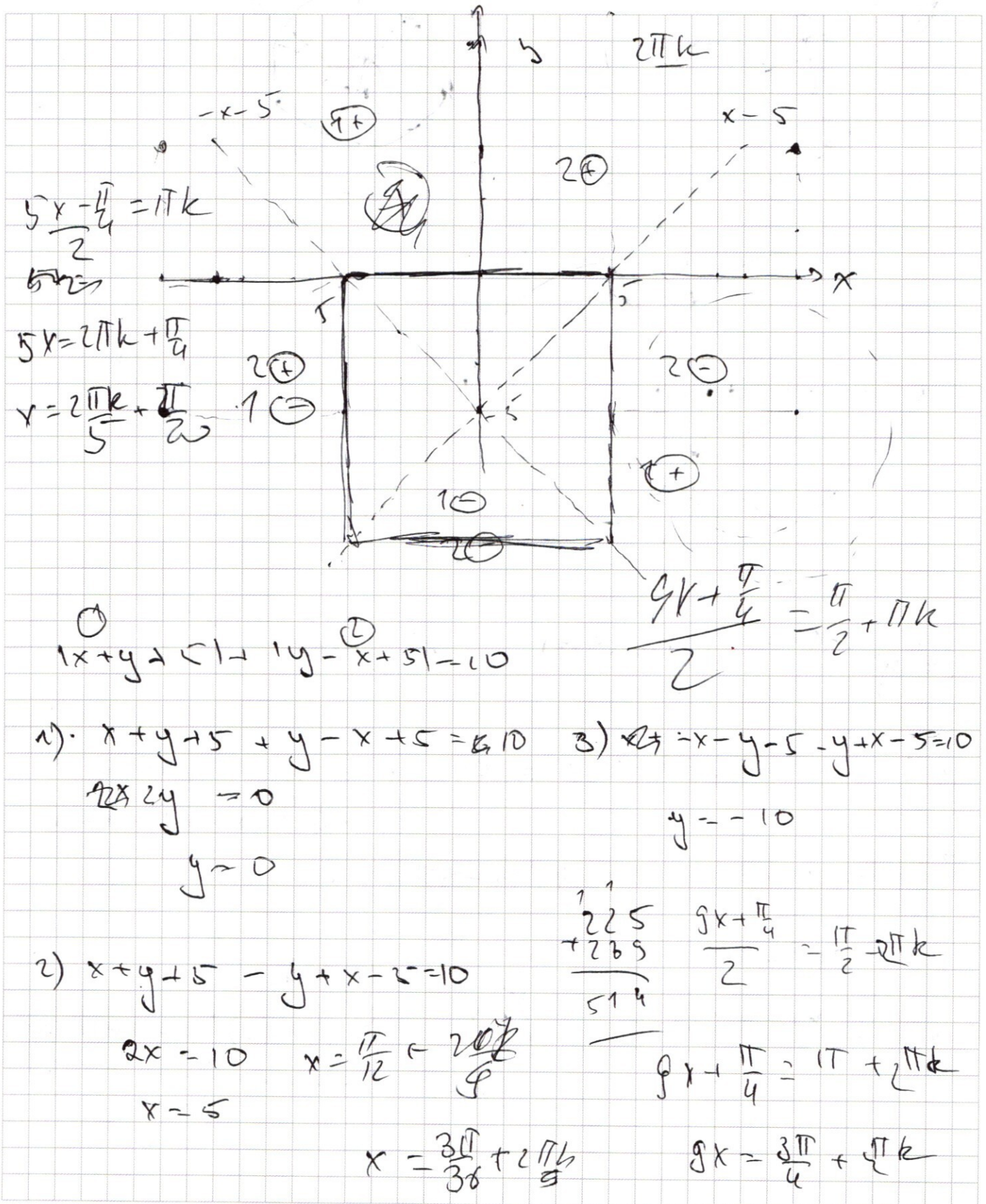
$$(2x)^4$$

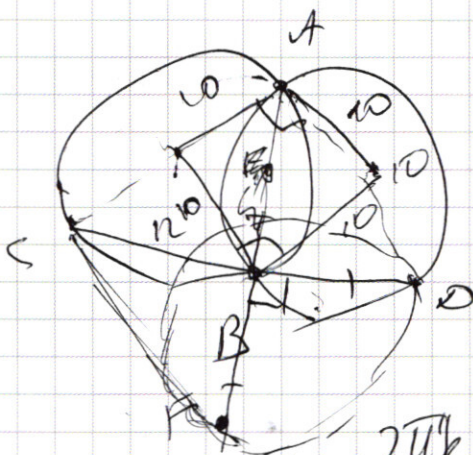


$$\left(\frac{2}{2x} \right)^4$$

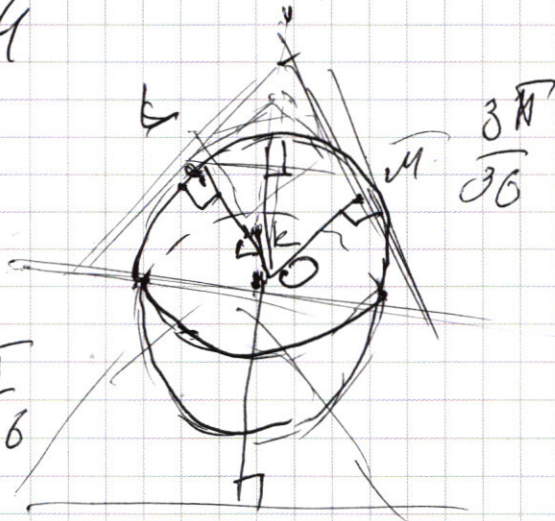
$$(2x)^4 = \frac{2}{x_0} \cdot \frac{1}{(2x)^4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

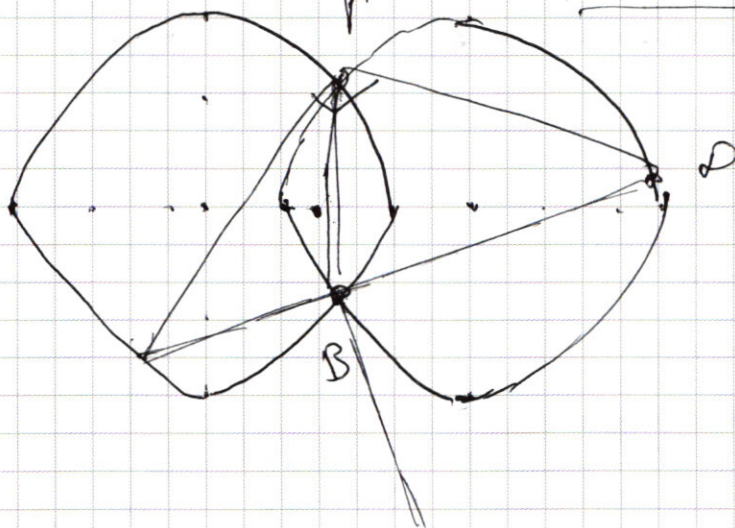




$$9k + \frac{\pi}{4} = \pi \pm \pi k$$



$$x = \frac{2\pi k}{9} + \frac{\pi}{9} \pm \frac{\pi}{36}$$



$$\frac{1}{x^2 y^4 \ln x} = y^{\ln(\frac{1}{x^2})}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{1}{x^2})}$$

$$a^{\log a} = b$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$D(y) = x^2 + 8x + 16 - 4(2x - 2x^2) =$$

$$= 8x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y_{1,2} = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} = \begin{cases} 2x \\ -x+4 \end{cases}$$

$$(y-2x)(y+x-4)=0$$