

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

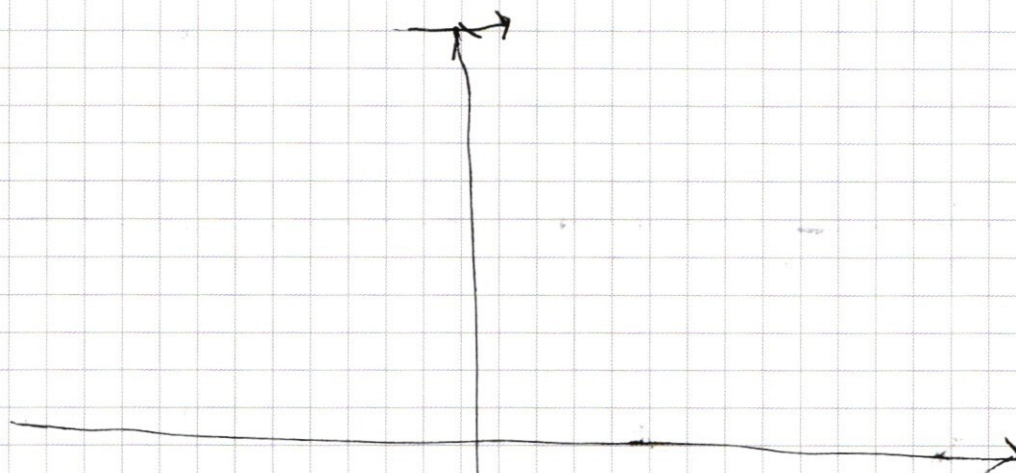
имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x$$

$$\frac{1}{2} \sin 7x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\frac{\sin 7x \sin \left(4x + \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} - \cos 4x = 0$$

$$\frac{\sin 7x}{\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} = 1$$

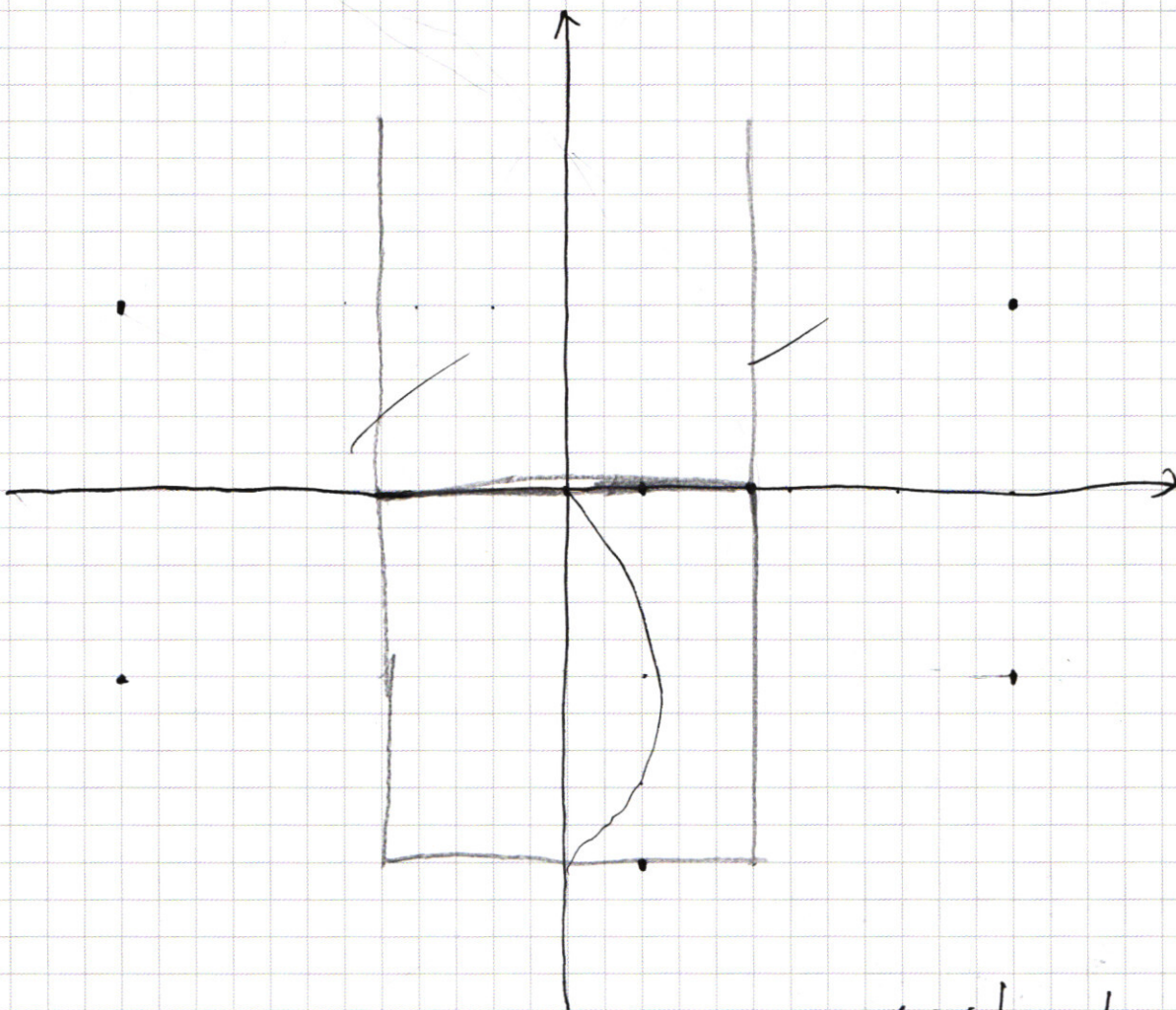
$$\sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$7x =$$

$$\left| \sin 9x + \frac{\pi}{4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\cos 4x = 0$$

$$\cos 4x \left(\frac{\sin 7x}{\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)} - 1 \right) = 0$$



$$x+y+5-y+11-5=0$$

$$2x=10 \quad x=5$$

$$-5+10+5+|10+5+5|=16$$

$$x=-5 \quad y=10$$

$$x=2 \quad |7+y|+|y+1|=10$$

$$x=3$$

$$2y-7+y-1+5=0$$

$$-y+4-y-3 \quad 2y=20$$

$$|y+5|+|y+1|=10$$

$$|y+5|=5$$

$$x=6$$

$$y=-10$$

$$1 \quad |6+y|+|y+4|=10$$

$$2+y+5+y-1+5=10$$

$$2y+10=10$$

$$2y=0$$

$$x=-10$$

$$|y-15|+|y+15|=$$

$$2y+10=10$$

$$15-$$

$$x=5, -x$$

$$x=$$

$$17-77$$

$$170+70 \cdot 49$$

$$189+225=514$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 60 - \cos 30 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -\frac{1}{2} \sin 2x \cdot \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = \frac{1}{2} \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$-\sqrt{2} \cos 9x = -\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x$$

$$-\frac{1}{2} \sin 4x \cdot \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\sin 4x (\sqrt{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \sin 7x) + -\cos 2x (\sqrt{2} \cos 2x - \frac{1}{2} \sin 7x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 4x) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\begin{cases} (x^2 - y^2)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy + 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy + 4 - 2x^2 + 8x - 8 + 4 - xy$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 + 4 - xy = 0$$

$$x^{2-\ln x} y^{4-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\frac{1}{x^{2-\ln x}} \cdot \frac{1}{y^{4-\ln x}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\frac{1}{x^{2-\ln x}} = \frac{y^{\ln \frac{y}{x^2}}}{y^{4-\ln x}}$$

$$\ln \left(\frac{y}{x^2} \right) = \ln y - \ln x^2$$

$$a^2 - 2b^2 - ab + 8 - 2a - 2b$$

$$x^{\ln 2} \ln x = y^{\ln y/x^2}$$

$$a^2 - 2b^2 - ab - 2a - 2b - 6(a+2) + 4(a-2) - 2b^2$$

$$\begin{aligned} & \stackrel{a}{=} \stackrel{b}{=} \\ & (y-2)(x-2) \\ & xy + 4 - 2x - 2y \end{aligned}$$

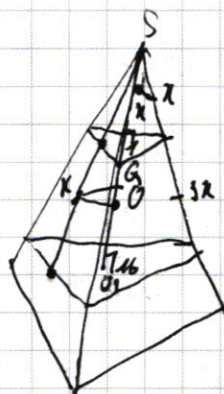
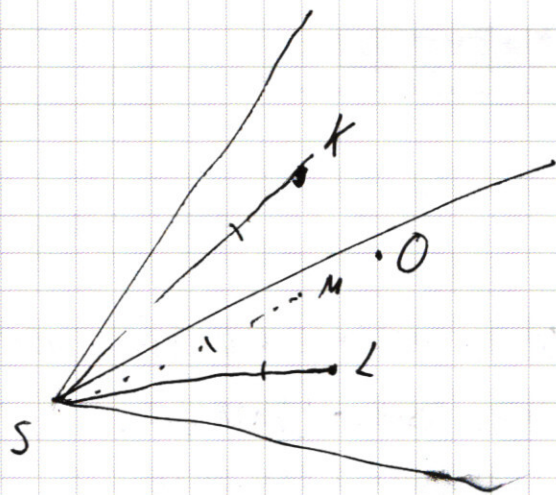
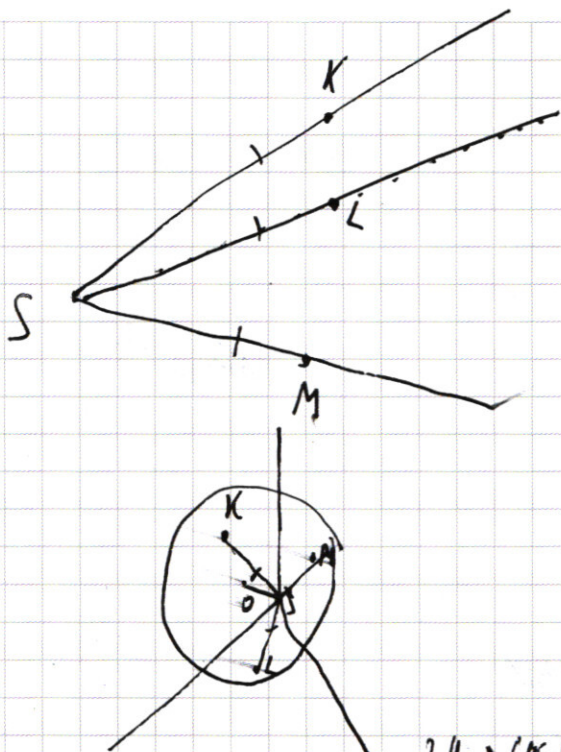
$$ab = xy + 4 - 2x - 2y$$

$$\begin{aligned} & x^2 y^4 \ln x \\ & y^2 - xy + 2x^2 + 8x - 4y \\ & 3xy - 2x^2 + 8x - 4y \end{aligned}$$

$$a^2 + 4a + 3xy - 2x^2 - 4(3y - 2x)$$

$$2x - y = a$$

$$(2x - y)^2 = 4x^2 + y^2 - 4xy$$



$$y = x.$$

$$2y \cdot \cos \alpha =$$

$$SO$$

$$y = K \cdot \cos \alpha$$

$$SO_1 = 4y$$

$$y \cdot 4y = Z^2$$

$$Z = 2y \quad Z = 2y$$

$$SK = Z^2 \equiv SK \cdot SO_1 =$$

$$= y \cdot 4y = 4y^2 \quad SK = 2y$$

$$SO = 2.5y \cdot \cos \alpha = SK = 2y$$

$$2.5y \cdot \cos \alpha = 2y$$

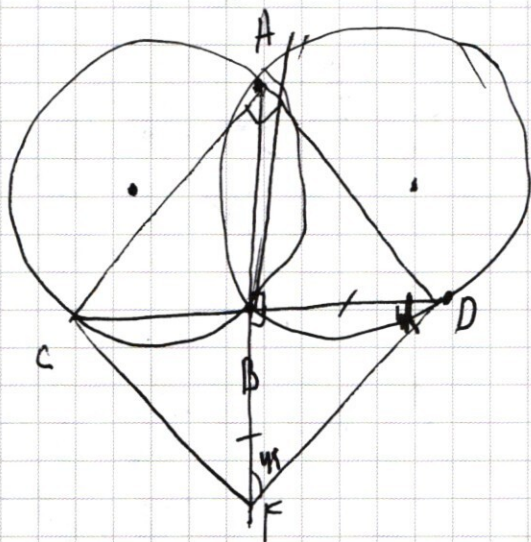
$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$SQ = SK \cdot \cos \alpha$$

$$\frac{8^2}{5} = \boxed{\frac{64}{25}}$$

$$\frac{SQ}{y} = \frac{SK \cdot \cos \alpha}{y} = \frac{2y \cdot \frac{4}{5}}{y} = \frac{8^2}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

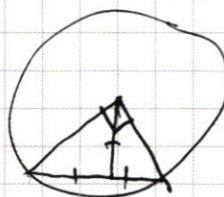
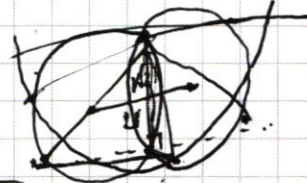


$$AB^2 = CB \cdot BD$$

$$FD = \sqrt{FD^2 + BG^2} = \sqrt{2} BF$$

$$CF = \sqrt{BF^2 + CB^2}$$

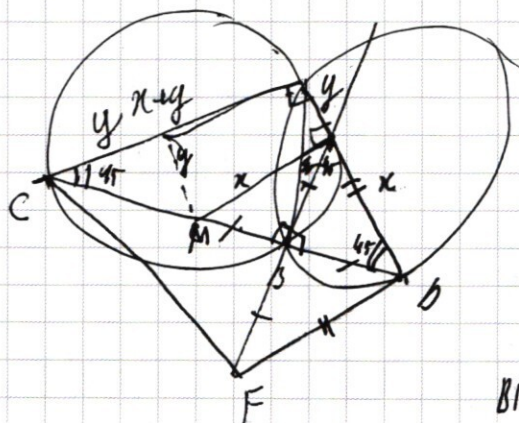
$$CP^2 \cdot CO^2 = CH^2 + AD^2$$



$$AB \cdot AC = HC \cdot AD$$

$$HB = \frac{x}{\sqrt{2}} \cdot HC = x \cdot AD$$

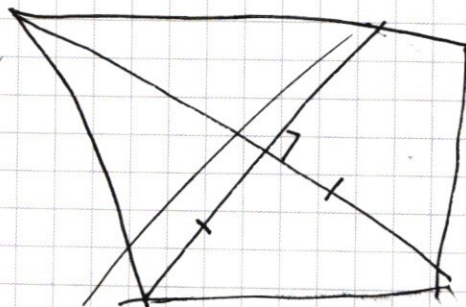
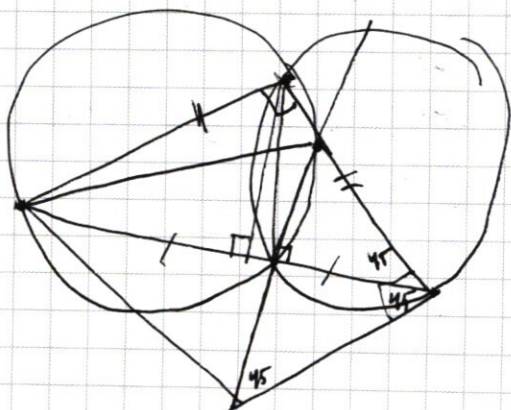
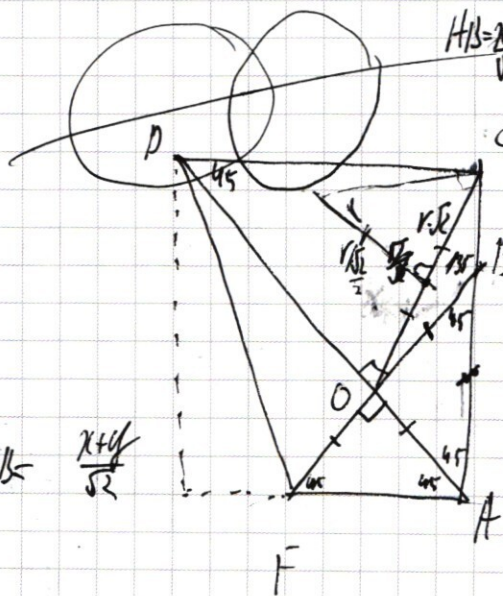
$$\frac{AC}{AD} = \sqrt{2}$$

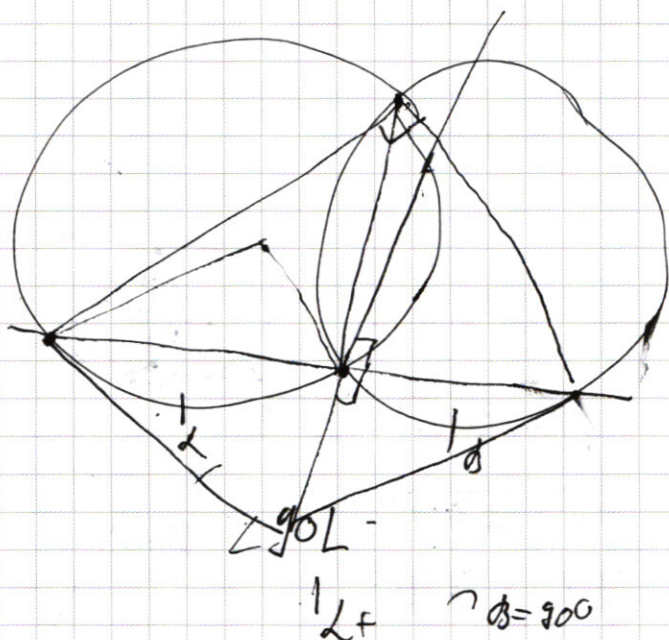


$$BM = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

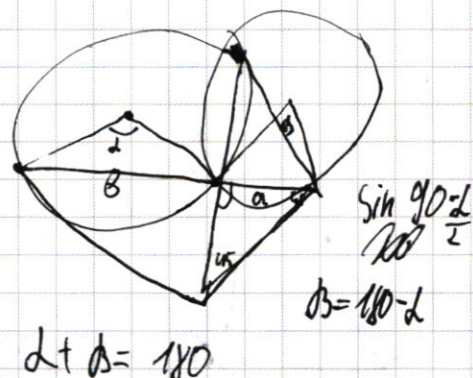
$$CM = 4\sqrt{2}$$

$$CM = g/\sqrt{2}$$





$$180 = 2 \frac{\alpha}{2}$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sin \frac{90^\circ - \alpha/2}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{b}{\sin \alpha} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{b}{\sin \alpha \cdot \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{r}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

$$a = r \cdot L \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$$

$$b = r \cdot L \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

$$a = r \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \cdot L$$

$$x = 34$$

$$y = 34$$

$$17 = 34$$

$$35$$

$$5 \cdot 2^{34}$$

$$\sqrt{r^2 \cdot 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + r^2 \cdot 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = (r \cdot 4L)$$

$$y \geq 2^{34} \cdot 3$$

$$y \geq 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x$$

$$y \geq 76 + x \cdot 2^{33} - 2x$$

$$y \geq 3 \cdot 2^{34} + 1$$

$$y \geq 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x \quad x \cdot 6$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$y(y-9) - x(x-9) = xy$$

$$76 + 2^{34} \cdot 3 - 3 = 2^{34} \cdot 3 - 64$$

$$3 \cdot 2^{34} + 1 + 64$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

M

9261	3
3087	3
1029	5
343	7.7.7

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 1176} \\ \underline{280} \\ 63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 343 \\ \hline 27 \\ + 108 \\ \hline 81 \\ + 108 \\ \hline 81 \\ + 108 \\ \hline 1261 \end{array}$$

Число 9261 состоит из простых множителей $3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$, всего 2 возр.

1 bzw 3 3 3 ~~4~~ 4 · 7 · 7 · 1 · 1

$$\frac{8!}{(1 \cdot 3 \cdot 1)!} = \frac{8 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

2 bar 93777-111

$$\frac{8!}{3!5!} = \leftarrow x_2 = 560 \cdot L = 1120$$

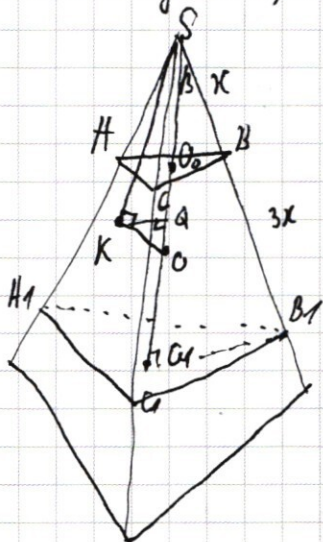
$$\begin{cases} 560 + 1120 = \\ = 1680 \end{cases}$$

Кандидатом ушёл в запас (2 вол.; м.к. 3.3 = 9.9 это наше уффа)

8! - количество из 8 объектов, а делить на 3, 2!, т.к. есть повторения цифр, а значит повтор. числа (и-повтор!)

Imbren: 1680

№ 4. Пусть невыпуклый угол это невыпукл



Заметим, что оба сечения II, как и оба I имеют
предела II сечения $\text{выражения} = \text{сечения}$ Δ ABC-ABG

$$\frac{S_1}{S_2} = K^2 = 4 \text{ - коэффициент подобия } \frac{CB}{C'B'} = \frac{1}{4} = \frac{SB}{S'B'} = \frac{1}{4}$$

$$S_B = x, S_{B_1} = 4x$$

Так как $\text{chrom} \perp \text{красной}$ и $\text{красное окр} = i \text{ var}$

SOO ogan kuznas u bolnha mny, $A_1B_1C_1$ (len znake kuzn.)

но из точки О можно провести 21 к каждой из остальных верш

радиус и через центр SO -продукции. - а это невозможно $\Rightarrow$ это одна точка

$$S_{\text{обложки}} = S_{\text{д}} = 4\pi \cdot R^2 \cdot \cos \alpha \quad (\text{в } \alpha \text{ раз меньше, чем площадь сферы)} \quad S_{\text{д}} = 4\pi \cdot R^2 \cdot \cos \alpha \Rightarrow S_{\text{д}} = 9 \quad S_{\text{д}} = 4\pi$$

$0,9 = 0,01 - \text{мгдига} \Rightarrow 0,9 = 15\%$

$$\begin{aligned} \Delta SKD & \text{ 42m long } \\ \uparrow & \\ SK &= 2g \\ 2g &= 2,5g \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{4}{5} \\ \alpha &= \arccos \frac{4}{5} \end{aligned}$$

SK Kerasukan $\sigma_{\text{Ker}} = \sqrt{SK^2 - S^2 / n}$; $SD_1 = y \cdot 4y = 4y^2$; $SK = 2y$
 Kb. Kas = $\sigma_{\text{Ker}} + \text{Ker. Kas}$

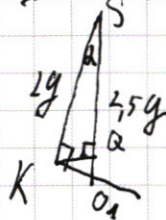
$$L = \arccos \frac{4}{5}$$

Умножить найден $S_{\text{кв}}$ на n . К. получится L на боковой черт.

$$KQ = ?$$

$$\text{из } \triangle K SQ \quad SQ = \frac{SK}{\cos \alpha} =$$

$$= 24 \cdot \frac{4}{5} = \frac{84}{5}$$



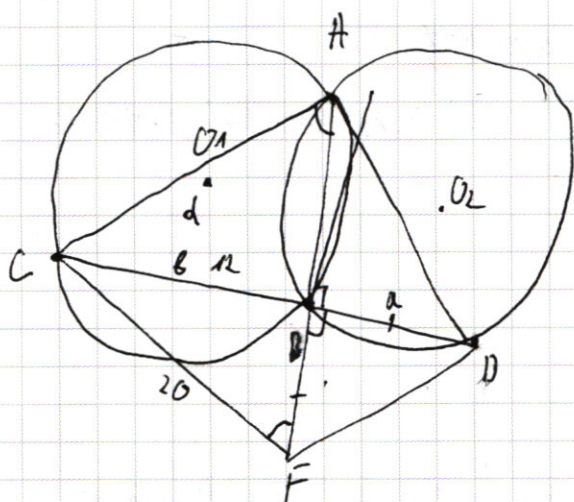
С таким способом
графике высоты, с
такими значениями.

К-коэф. погодно ветра и ср. скорость $\frac{4}{5} = \frac{5}{8} \Rightarrow S = \frac{84}{5} \cdot \frac{8}{5} = \frac{84}{5}$

$$S = S_0 \cdot K^2 = 1 \cdot \frac{64}{25} = \frac{64}{25}$$

Ответ: $\frac{4}{5}$; $\frac{64}{25}$

№6



П.к. $\angle A = 90^\circ \quad \angle A = \angle CAB + \angle BAD$

а это два вписанных угла $\angle CAB = \frac{CO_1B}{2}$; $\angle BAD = \frac{BO_2D}{2}$

$$90^\circ = \frac{CO_1B}{2} + \frac{BO_2D}{2} \Rightarrow 180 = CO_1B + BO_2D$$

$$\angle CO_1B = 2; \quad \angle BO_2D = \beta$$

$$2 + \beta = 180$$

$BO_2D = \beta$; $CB = b$ По т. синусов $\frac{a}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \frac{\beta}{2}}$

$$\sin \beta = \sin 2 \quad \frac{a}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \frac{\beta}{2}} \Rightarrow a = 2R \cdot \cos \frac{\beta}{2}$$

аналогично $b = 2R \cdot \cos \frac{\beta}{2}$

$$\cos \beta/2 = \sin \beta/2 \Rightarrow b = 2R \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\triangle CBF \Rightarrow CF = \sqrt{b^2 + a^2} = \sqrt{4R^2 \sin^2 \frac{\beta}{2} + 4R^2 \cos^2 \frac{\beta}{2}} = \sqrt{4R^2} = 2R = 20$$

$$b = 12 = 2R \cdot \sin \frac{\beta}{2} = \frac{12}{20} = \sin \frac{\beta}{2}$$

$$\frac{3}{5} = \sin \frac{\beta}{2} \Rightarrow \sin \angle CBD = \frac{3}{5} \Rightarrow CH = \frac{CB}{\sin \frac{\beta}{2}} = \frac{12 \cdot 5}{3} = 20$$

$$CA = 2R \Rightarrow CA = d$$

$$\angle CFB = \angle CHB \Rightarrow \angle ACB = \angle HCF$$

$$\cos \angle ACB = \sin \angle CAB = \frac{3}{5}$$

$$\sin \angle ACB = \frac{4}{5} \quad \sin \angle ACB = 2 \cdot \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}$$

$$S_{\triangle HFC} = HL \cdot CF \cdot \sin \angle ACB \cdot \frac{1}{2} = 20 \cdot 20 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{24}{25} = 192$$

Ответ: а) $2R = 20$ б) 192

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{2} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cdot \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin 7x \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0 \Rightarrow 2 \sin 7x \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \frac{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} - \frac{2 \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

$$\cos 4x \left(\pm \frac{\sin 7x}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} - 1 \right) = 0$$

$$\sin\left(4x + \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos 4x$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$$

$$1 + \frac{\sin 7x}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

$$\sin 7x + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k$$

$$9x = 2\pi k - \frac{\pi}{4}$$

$$x = \frac{2}{9}\pi k - \frac{\pi}{36}$$

$$1 - \frac{\sin 7x}{\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)} = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$$

$$x = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{5}$$

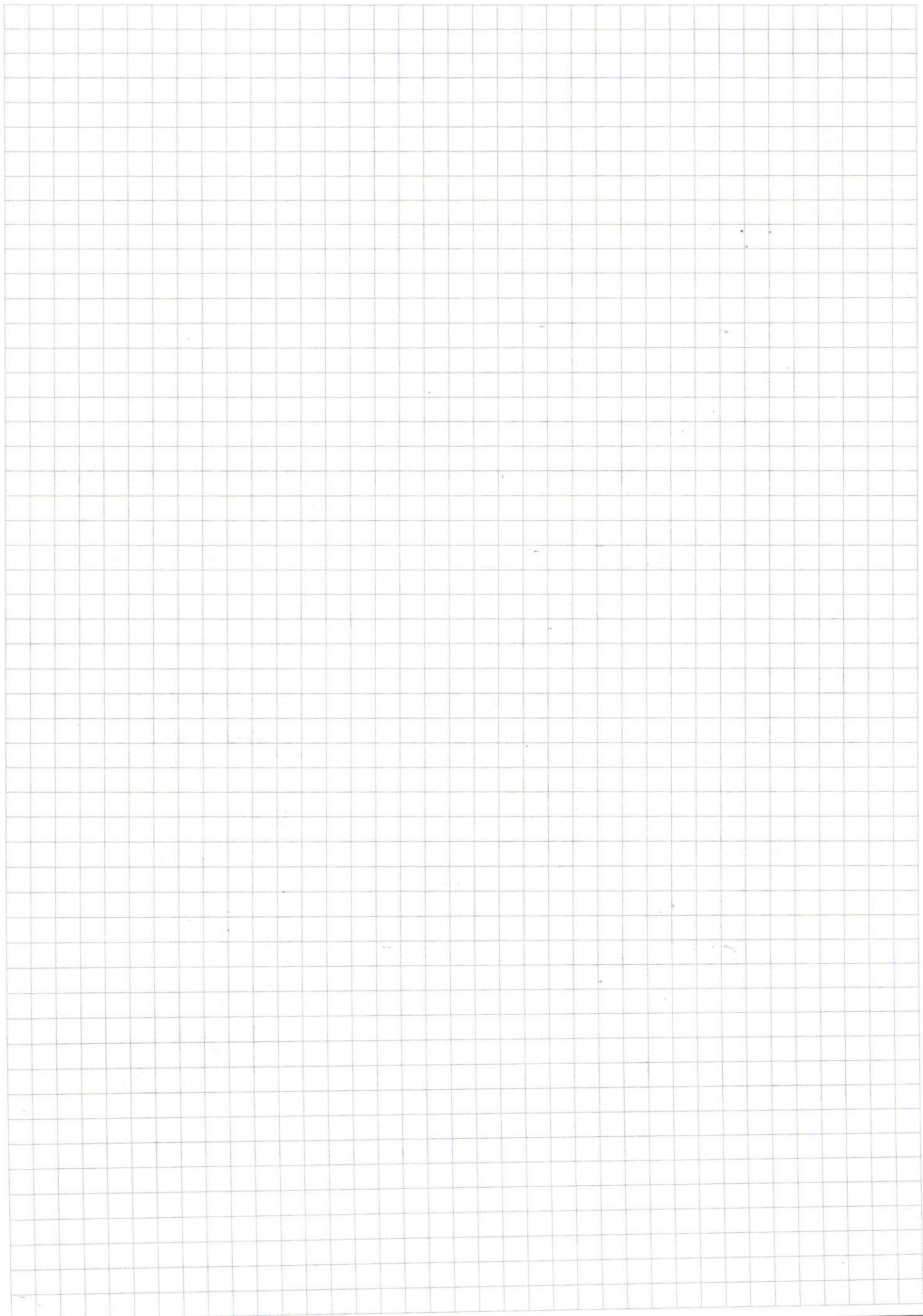
$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi k$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{9}\pi k$; $x = \frac{2}{9}\pi k - \frac{\pi}{36}$; $x = \frac{2\pi k + \frac{\pi}{4}}{5}$; $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi k$
 $k \in \mathbb{Z}$, k может принимать любые значения (любые)



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7 \quad \begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{34} = f_1 = 2^{x+5} \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^x - 1)x = f_2 = 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

При $x < 0$ $f_1 > 0$ $f_2 < 0$ - непересекаются

При $x \in [1, 6]$ $3 \cdot 2^{34} \gg x \cdot 2(2^{32} - 1)$ - это условие соблюдается

При $x = 6$ $f_1 = 64 + 3 \cdot 2^{34}$ $f_2 = 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12 = 64 + 3 \cdot 2^{34}$

$f_1 = f_2$, но $y < f_2$, а не $y < f_1$ - непересекаются.

$\Rightarrow x > 6$, но при $x >$

$$\sqrt{3} \quad \begin{cases} (x^2 y^4) - \ln x = y \ln \left(\frac{y}{x+2} \right) \\ y^2 - xy = 4x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x}} \cdot \frac{1}{y^{4 \ln x}} = \frac{y \ln y}{y^{4 \ln x}}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x}} = \frac{y \ln y}{y^{4 \ln x}}$$

$x \neq 0$

$$y^{3 \ln x} = y \ln y \cdot x \ln x$$

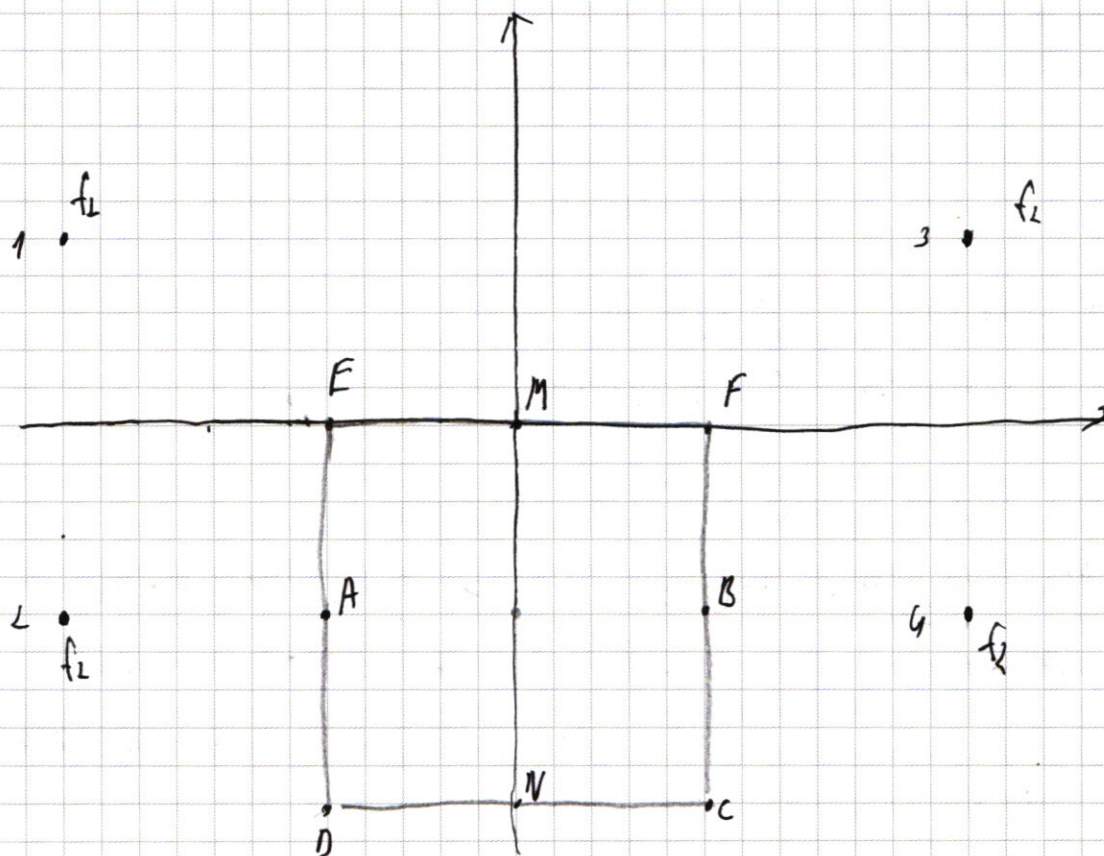
$y = 0$

из второго $x = 4$
 $x \neq 0$, т.к. в знаменателе

$$y^2 - xy - 4x^2 + 8x - 4y = 0$$

Ответ: $(4, 0)$

W5



$$f_1 = (|x|-4)^2 + (|y|-5)^2 - a = 0 -$$

- окружности (окр f_2 касаются) касаются

$$f_2 = |x+y+5| + |y-x+5| = 10 - \text{квадратичная функция } (0; -5) \text{ и симметричная}$$

Симметричные f_1 имеют форму окружностей, поэтому есть 2 варианта касания

Вариант 1: окружность 2 касается A, а окружность 3 касается B $r = 7 \Rightarrow a = 49$

Вариант 2: окружность 1 касается C, а окружность 3 касается B $r = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{514} \Rightarrow a = 514$

В остальных случаях будет более двух решений или 0 решений

Еще вариант: 1 касается E и 3 касается F, но тогда 4 и 2 пересекаются окружности B C и D

и еще: 4, 2 пересекаются M, N, но тогда еще 1 и 3 пересекаются по крайней мере одна из окружностей EA и FB

Можно также еще круг рассмотреть, но из рисунка видно, что касаются только 49 и 514

Итого: $a = 49, a = 514$