МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

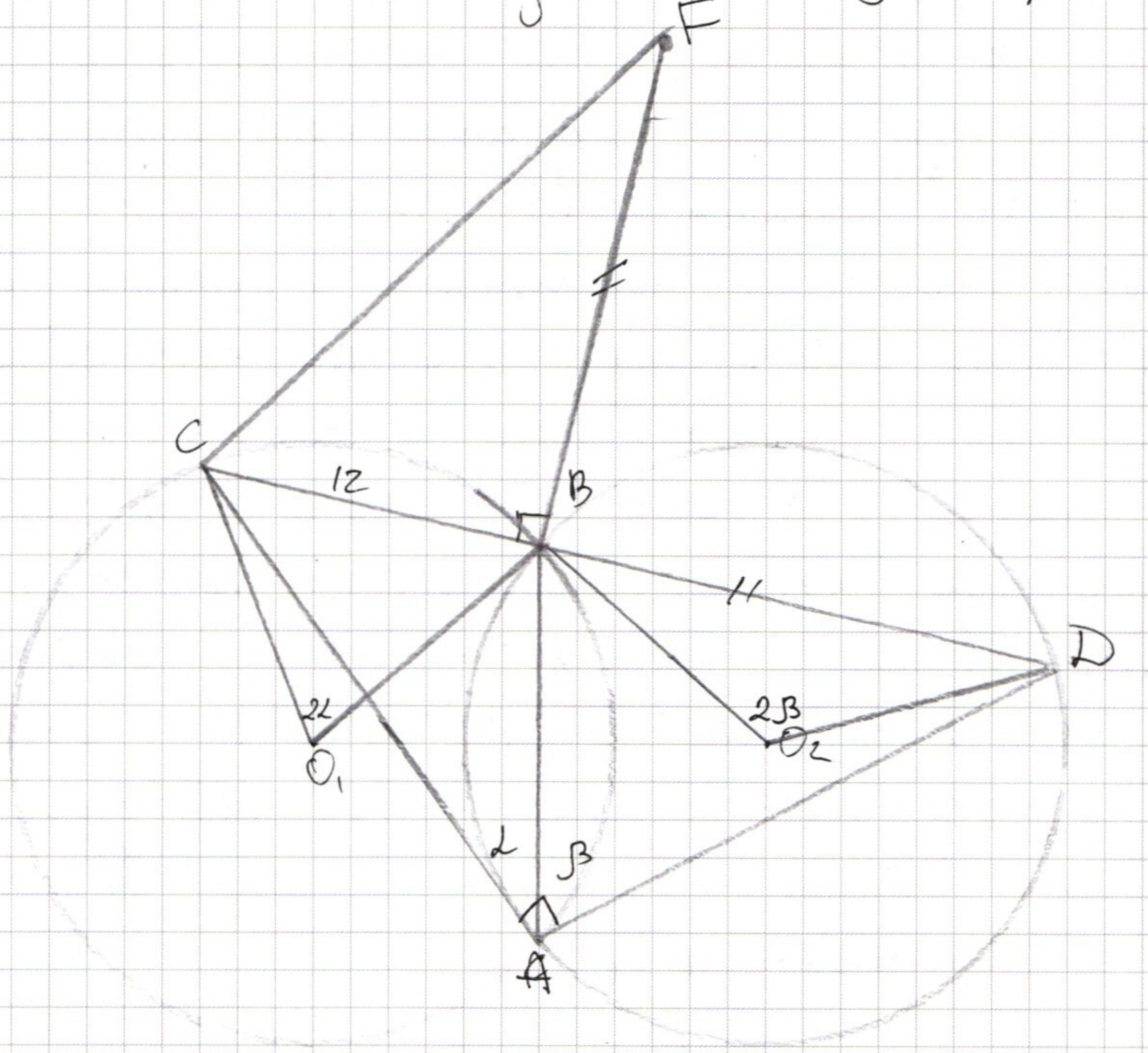
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(6) Решение: O_1 и O_2 - центры окружностей

R - радиус: $R = 10$; $\angle CO_1B = 2\alpha$; $\angle BO_2D = 2\beta$;

$\angle CAB = \alpha$ (т.к. он вписанный, а центральный к этой хорде 2α); ~~$\angle DO_1$~~ $\angle DAB = \beta$ (т.к. он вписанный, а центральный к ~~этой~~ окружности 2β). Построим AB.



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

а) $\triangle CFB$ - прям.; т. Пифагора: $CF^2 = CB^2 + FB^2$;

$FB = BD$ по условию.

$CF^2 = CB^2 + BD^2$;

$\triangle CBO_1$: т. косинусов. $CB^2 = O_1C^2 + O_1B^2 - 2O_1C \cdot O_1B \cdot \cos 2\alpha$

$O_1C = O_1B = R = 10$

$CB^2 = 200 - 200\cos 2\alpha$

В $\triangle BDO_2$: т. косинусов $BD^2 = 200 - 200\cos 2\beta$ аналогично с CB^2.

Но $\alpha + \beta = 90^\circ$; $\alpha + \beta = \angle CAD = 90^\circ$

$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$2\beta = 180^\circ - 2\alpha$: $BD^2 = 200 + 200\cos 2\alpha$

$CF^2 = CB^2 + BD^2 = 200 - 200\cos 2\alpha + 200 + 200\cos 2\alpha = \underline{400}$

$CF = 20$.

б) $\triangle FCB$: т. Пифагора : $BF = BD = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$.

$\angle ACB = \angle ADB$; т.к. они вписанные и опираются на одну хорду в равных окружностях. $\angle ACB + \angle ADB = 90^\circ$, как острые углы в прям. треуг. $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$.

т. Пифагора $\triangle ACD$: $CA^2 + AD^2 = (12+16)^2$; $CA = AD$,

$\triangle ACD$ - равн. ($\angle ACD = \angle ADB$) $\Rightarrow CA = \frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$.

$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} CA \cdot CF \cdot \sin\angle ACF =$; $\angle ACF = 45^\circ + \angle BCF$

$= \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot \sqrt{2} \cdot 20 \cdot \sin(45^\circ + \angle BCF) =$; $\angle BCF = \gamma$

$= 140\sqrt{2}(\sin 45^\circ \cos\gamma + \cos 45^\circ \sin\gamma) = \overset{140}{\cancel{280}}(\cos\gamma + \sin\gamma) =$

$= 140\left(\frac{16}{20} + \frac{12}{20}\right) = 140 \cdot \frac{28}{20} =$; $\cos\gamma = \frac{BF}{CF}$; $\sin\gamma = \frac{CB}{CF}$

$= 7 \cdot 28 = 196$ ед^2

Ответ: а) $CF = 20$ б) $S = 196$ ед^2.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$; $x \in R$.

$-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2} - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 0$.

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cdot(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x))(\cos 2x - \sin 2x) = 0$

1) $\sqrt{2}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$

форм. доп. арг.

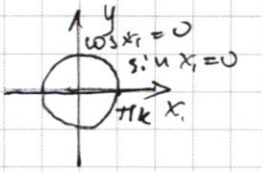
$\sqrt{2}\sin 7x = \sqrt{2}\sin(2x + \frac{\pi}{4})$

$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$

$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$

$2\sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k$



$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$ $k \in Z$

$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi p$

$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + \pi p$ $p \in Z$

$9x = \frac{3}{4}\pi + \pi p$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi p}{9}$.

2) $\cos 2x = \sin 2x$

$tg x = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $n \in Z$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}$ $k \in Z$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi p}{9}$ $p \in Z$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$ $n \in Z$.

① $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7.$

Возможные комбинации цифр для 8-ми значного числа

3 3 3 7 7 7 1 1 Больше не может быть,

3 9 7 7 7 1 1 1 т.к. $9 \cdot 3 = 27$

$7 \cdot 7 = 49$ = двухзначное

$7 \cdot 3 = 21$ число.

По условию все множители 9261 должны быть однозначными числами.

1) 3 3 3 7 7 7 1 1.

Нужно составить разные числа из этого набора цифр – используем перестановку с повторением

$P_{(3;3;2)} = \frac{8!}{3!\,3!\,2!} = \frac{\cancel{2}\,4\,5\,\cancel{6}\,7\,8}{\cancel{6} \cdot 2} = 560$

2) Аналогично для 9 3 7 7 7 1 1 1

$P_{(1;1;3;3)} = \frac{8!}{3!\,3!} = 1020$; $N = 1020 + 560 = 1580$, где N – кол-во 8-ми зн чисел

Ответ: 1580 чисел

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

I 1) $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$y = -x-5$ $\qquad$ $y = x-5$

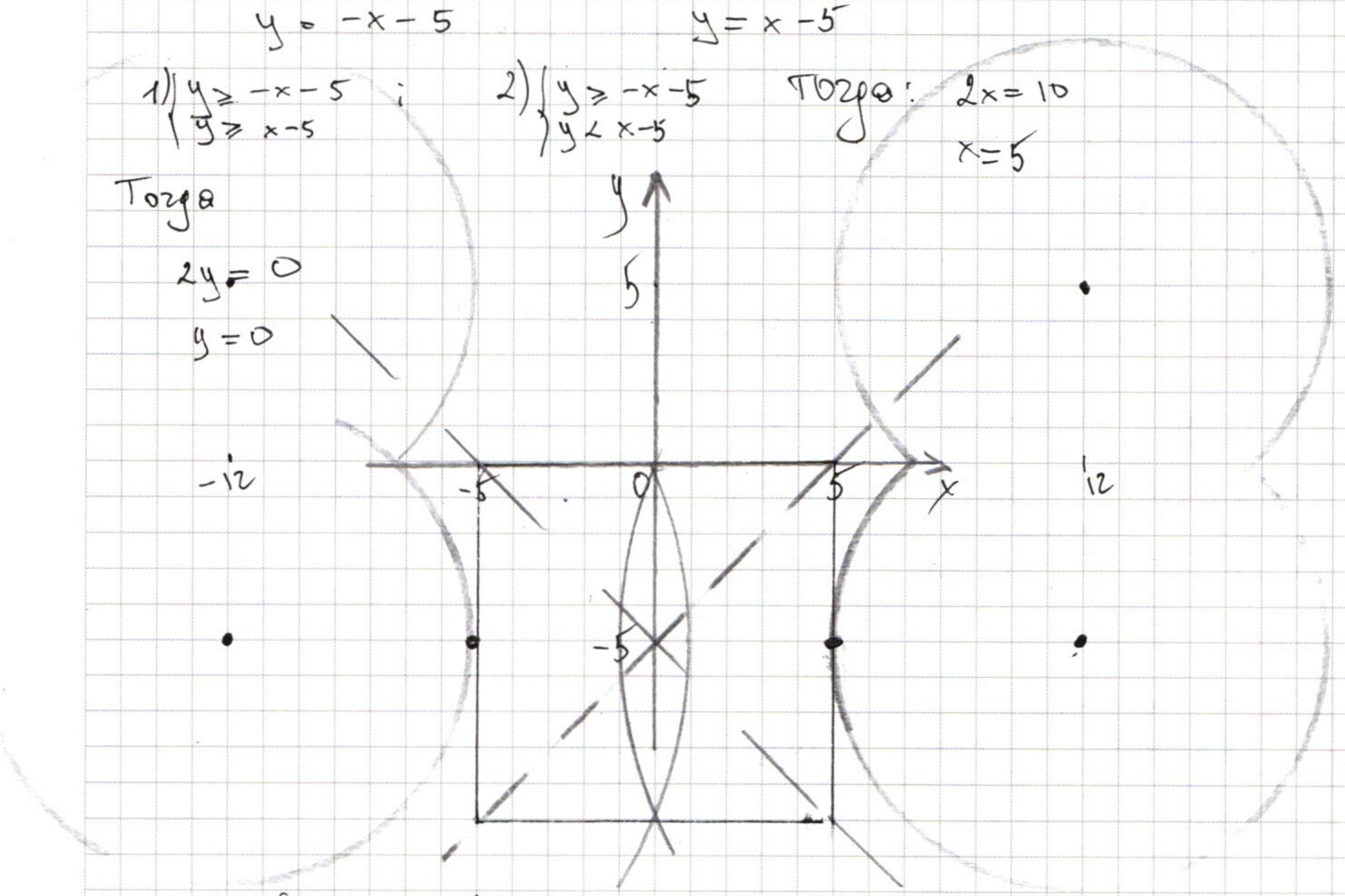
1) $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$; $\qquad$ 2) $\begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$ Тогда: $2x = 10$

$x = 5$

Тогда

$2y = 0$

$y = 0$



3) $\begin{cases} y < -x-5 \\ y < x+5 \end{cases}$ тогда $y = -10$

4) $\begin{cases} y < -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$ тогда $x = -5$

II $(|x|-12)^2 - (|y|-5)^2 = a$: график — 4 окружности ; симметрично относительно $(0;0)$ с $R = \sqrt{a}$; $x_0 = \pm 12$

$y_0 = \pm 5$

тогда и окружность расположена только в своей же четверти (где центр).

1 случай, когда только 2 решения: касании нижних окр. сторон квадрата

$R = 12 - 5 = 7$; $a = 49$.

2 случай, когда 2 нижние окружн. пересекаются в т. $(0;0)$ и т. $(0;-10)$.

$R = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. т. O_1 – центр окр. в IV чет. ~~O центр~~ системы коорд.

$\rho(O_1; O) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

$a = R^2 = 169$

Ответ: 169 и 49.

(3) $\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$; О.Д. $y > 0$, $x > 0$

1) $y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = (x+4)^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y_{1,2} = \frac{x + 4 \pm (3x-4)}{2}$

$y_1 = 2x$

$y_2 = 4 - x$.

2) $x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y} / y^{7\ln x}$

$y^{3\ln x} = y^{\ln y} x^{2\ln x}$;

1) $y = 2x$

~~$y^{3\ln x}$~~ $(2x)^{3\ln x} = (2x)^{\ln 2x} x^{2\ln x}$

$(2x)^{3\ln x - \ln 2x} = x^{2\ln x}$

$(2x)^{2\ln x - \ln 2} = x^{2\ln x}$; логарифмируем

$(2\ln x - \ln 2)(\ln 2 + \ln x) = 2\ln^2 x$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\ln^2 x + \ln 2 \ln x - \ln^2 2 = 2\ln^2 x$

$\ln \cancel{x} = \ln 2$

$x = 2$

$y = 4.$

2) $y = 4 - x$

$(4-x)^{3\ln x} = (4-x)^{\ln 4-x} x^{2\ln x}$

$(4-x)^{3\ln x - \ln(4-x)} = x^{2\ln x}$

$(4-x)^{\ln\frac{x^3}{4-x}} = x^{\ln x^2}$; прологарифмируем

$\ln\frac{x^3}{4-x}\ln(4-x) = 2\ln^2 x$

$3\ln x \ln(4-x) - \ln^2(4-x) = 2\ln^2 x$: $\ln^2 x$; но

~~x=2~~ проверим $\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$ ~~y=3~~ $y = 3$

$3\frac{\ln(4-x)}{\ln x} - \frac{\ln^2(4-x)}{\ln^2 x} = 2$ $\quad 9 - 3 - 2 + 8 - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$

$y = 3$ решен

$x = 1 \quad y = 2$

$\frac{\ln(4-x)}{\ln x} = t$ $\quad 4 - 2 - 2 + 8 - 8 = 0 \Rightarrow (1;2)$.

$t^2 - 3t + 2 = 0$

$\begin{cases} t_1 = 1 & \ln(4-x) = \cancel{\ln x} \Rightarrow x = 2 \quad y = 2 \\ t_2 = 2 & \ln(4-x) = \ln x^2 \quad x^2 + x - 4 = 0 \end{cases}$

Подставим $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ во 2 урав. $D = 17$

$\frac{66+14\sqrt{17}}{4} - \frac{6\sqrt{17}-7}{4} - \frac{36-4\sqrt{17}}{4} + \frac{4\sqrt{17}-4}{4} -$ $\quad x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$; $x\ \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0$

$-\frac{14+2\sqrt{17}}{4} \neq 0$

~~$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} = \frac{7+\sqrt{17}}{2}$~~

Ответ: $(1;3)$ $(1;2)$ $(2;4)$ $(2;2)$ ~~$\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{7+\sqrt{17}}{2}\right)$~~

(7) $\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

1) $A = 76 + 2(2^{32}-1)x$

$Б = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$y = A - Б = 76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 6 \cdot 2^{33} =$

$= 76 + 2^{33}(x-6) - 2x - 2^x.$

$y' = 2^{33} - 2 - 2^x \ln 2$; y' — мон. убыв. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ сначала $y \uparrow$, затем $y \downarrow$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ y пересекает ось абсцисс дважды.

$\left.\begin{matrix} y(7) = 0 \\ y(38) = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in \underbrace{[7; 37]}_{31 \text{ число}}; x \in \mathbb{Z}.$

при натурал x количество $y = g(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ количество всех вариантов: $S = y(x_1) + y(x_2) + \dots + y(x_{31})$.

$S = 31 \cdot 76 + 2^{33}(1+2+3+\dots+31) - 2(7+8+\dots+37) - 2^7 - \dots - 2^{37} =$

$= 31 \cdot 76 + 2^{33} \frac{1+31}{2} \cdot 31 - 2\frac{7+37}{2} \cdot 31 - 2^7 \frac{2^{31}-1}{2-1} =$

$= 31 \cdot 76 + 2^{33} \cdot 16 \cdot 31 - 2 \cdot 22 \cdot 31 - 2^{38} + 2^7 =$

$= 2^{37} \cdot 31 + 31 \cdot 32 - 2^{38} + 128 = \cancel{2^{27}(31-2) + 31 \cdot 32 + 128} =$

$= \cancel{2^{27} \cdot 29 + 1151}$ $\quad \cancel{31(2^{37} + 2^5)}$. $\quad 2^{37} \cdot 29 + 32 \cdot (31+4) =$

~~Ответ: $2^{27} \cdot 29 + 1151$.~~ $\quad = 2^{37} \cdot 29 + 32 \cdot 35 =$

$= 2^{37} \cdot 29 + \cancel{880}\ 800$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S = 10 - 14\sqrt{2}$.

$S = 31 \cdot 76 + 2^{33} \cdot 16 \cdot 31 - 2 \cdot (22 \cdot 31) - 2^7(2^{37}-1) =$

$= +27$

$y < 5x$

$y \geq 2^x$

$y' = 2^{33} - 2 - 2^x \ln 2$

$y = 76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} =$

$3x$

$= 76 + 2^{33}(x-6) - 2x - 2^x$

$2 \quad 3 \quad 4$

$S = 31 \cdot 76 + 2^{33} \frac{1+31}{2} \cdot 31 - 2 \frac{7+37}{2} \cdot 31 - 2^7 \frac{2^{31}-1}{1}$

$5x - 2^x$

$76 - 44 = 32$

$10 - 4 = 6$

$24 \cdot 31$

$2\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9$

$76 - 44 = 33$.

33×31

$S = 33 \cdot 31 + 2^{37} \cdot 16 \cdot 31 - 2^{38} + 2^7 =$

$= 33 \cdot 31 + 2^{37} \cdot 31 - 2^{38} + 2^7 =$

$31(2^{37} + 33) - 2^7(2^{31} - 1)$

$= 2^{37} \cdot 29 +$

$\frac{66 + 74\sqrt{17}}{4} - \frac{6\sqrt{17} - 7}{4} - \frac{36 - 4\sqrt{17}}{4} + \frac{4\sqrt{17} - 24}{4} - \frac{14 + 2\sqrt{17}}{4} =$

$32 \cdot 4 = 128$

$7\ 8\ 9\ 10$

$=$

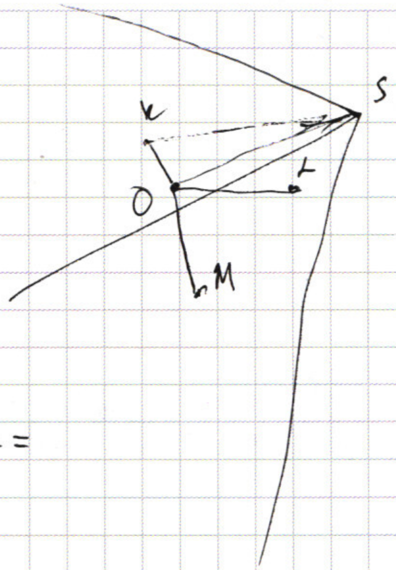
$2 \quad 4 \quad 8 \quad 16$

$32 \times 35 = 160 + 64 = 790$

$2 \cdot \frac{16-1}{1} = 30$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$5x = \alpha$

$4x = \beta$

$25 + 144 =$

$= 1$

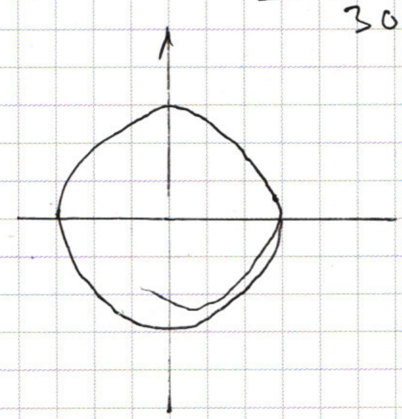
$2\sin 7x\,(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x$

$-2\sin 2x \sin 7x \quad + 2\sin 7x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos\alpha - \sqrt{2}\cos\beta + \sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha = 0$

$2\sin 7x\left(\cos 2x - \sin 2x\right) = \sqrt{2}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)$

$\dfrac{3\pi + 4\pi n}{30}$ $\quad$ $\dfrac{\pi + 8\pi n}{20}$ $\quad$ $\dfrac{\pi + 4\pi k}{8}$



$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 33 \\ \hline 93 \\ +93 \\ \hline 1023 \\ +128 \\ \hline 1151 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(3)

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$e^x = y$

y^x

$y > 0 \quad x \neq 0$

$x > 0$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y} / y^{7\ln x}$

$y = 1$

$x = 1$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{3\ln x} = y^{\ln y}$

$y^{3\ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}$

$3\ln x \ln y = \ln^2 y \quad 2\ln^2 x$

$1 - 1 - 2 + 8 - 4 \neq 0$

$X = \frac{4}{3}$

$3 = 2\ln y \ln x$

$\frac{3}{2\ln x} = \ln y$

$(x^2y^4)^{-\ln}$

$x \geq \frac{4}{3}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$y^2 + y(+4+x) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = 16^2 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{4 + x \pm |3x-4|}{2}$

$y = \frac{4 + x + 3x - 4}{2} = 2x; \quad y = \frac{4 + x - 3x + 4}{2} = 4 - x$

$3 = 2\ln 2x \ln x$

$\frac{3}{2} = \ln 4 - x \cdot \ln x$

$3 = 2\ln^2 x + 2\ln x \ln 2$

$\underline{2t^2 + 2\ln 2 t - 3 = 0}$

(7)
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} & 35 \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x & 19 \end{cases}$$

$y = 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$y' = \ln 2 \cdot 2^x$

$\cos(180° - \alpha) = -\cos$

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 76 + 4(2^{33}-2)x$

$2 + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2^{33} - 2$

$a^2 = 200 - 200\cdot$

$2^{33}(6-1)$

$x = 4$

$a = 20\sin\alpha$

$b = 20\sin\beta$

$4 + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2^{34} - 4$

2^{35}

$a^2 = x + x\cos\alpha$

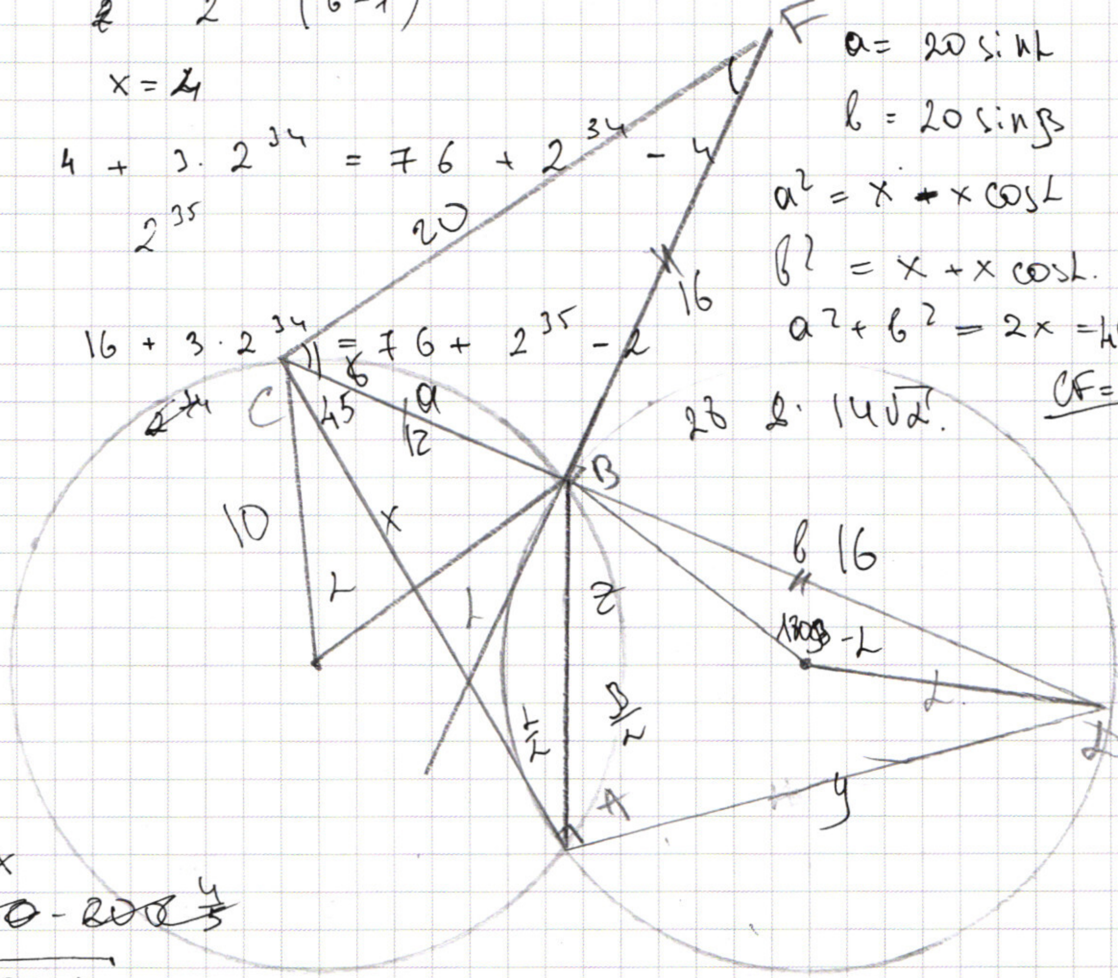
$b^2 = x + x\cos\alpha$

$16 + 3\cdot 2^{34} = 76 + 2^{35} - 2$

$a^2 + b^2 = 2x = 400$

$CF = 20$

28 $2\cdot 14\sqrt{2}$



$12^2 = \cancel{200} - \cancel{200}\frac{4}{5}$

$\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}}$

$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 2 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta$

$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$ $\quad \sin\alpha$

$2 = 1 - \cos(\alpha+\beta)$ $\quad 20\sin\alpha = 12$

$12^2 = x^2 + z^2 - 2xz\sqrt{\frac{9}{10}}$ $\cos(\alpha+\beta) = -1$. $\quad \frac{1}{10}$ $\quad \sin\alpha = \frac{3}{5}$

$16^2 = y^2 + z^2 - 2yz\sqrt{\frac{1}{10}}$ $\sin\beta = \frac{3}{5}$. $\quad \beta = 180° - \alpha$

$4\cdot 28 = y^2 - x^2 + 2z($ $\cos\beta = -\frac{4}{5}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\Leftrightarrow 2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x$

$-2\sin 2x \sin 7x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\sin 7x \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = \cos 4x$

~~cos~~

$\sqrt{2}\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$

$2\sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0.$

$2\sin 7x \cos 2x \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin 7x \sin 2x \frac{\sqrt{2}}{2} - \cos 4x = 0$

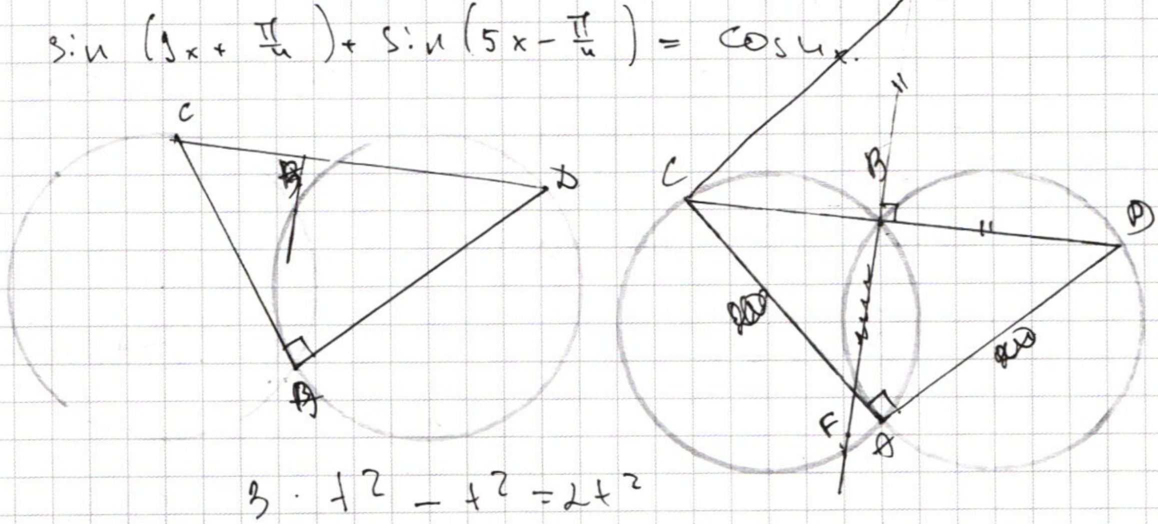
$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x.$

$2\sin 7x\cos 2x - 2\sin 7\sin 2x = \sqrt{2} - 2\sqrt{2}\sin^2 2x$

$2\sin 7\cos 2x = \sqrt{2} + 2$

$2\sin 7x\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x.$

$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x.$



$3 \cdot t^2 - t^2 = 2t^2$

(5) $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$

$y > -x-5$

$y > x-5$

1) $x+y+5=0$ $y = x+5$

$y=-x-5$

$2y+10=10$

$-x-y-5+y-x+5=10$

$y=0$

$-2x=10$

$y < -x-5$

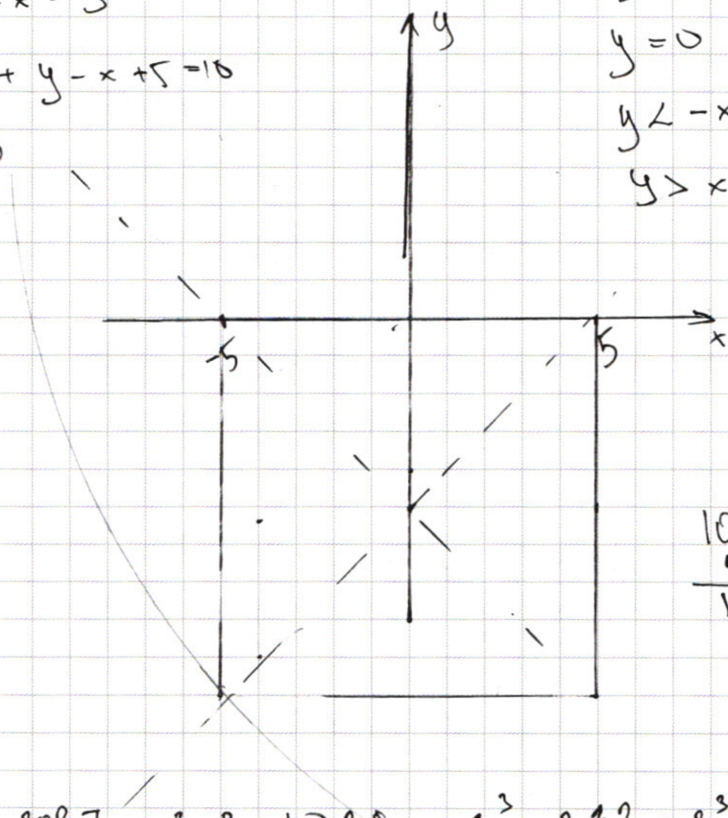
$x=-5$

$y > x-5$

$4-4$

$4-4-8+16-8$

$343 \mid 7$
$-28 \quad 49$
63



$1029 \mid 3$
$9 \quad 14$
12

$a=49$

$a=22^2$

(1) $9261 = 3 \cdot 3087 = 3 \cdot 3 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

3 3 3 7 7 7

3 3 3 ~~1~~ ~~1~~ 7 7 7

9 3 ~~1~~ ~~1~~ 1 7 7 7

$P = \frac{8!}{3!\,2!\,3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6} =$

$= 560$

$P = \frac{8!}{3!\,3!} = 1020$

Ответ: 1580 вариантов

$49 \times 7 = 343$

343×27: $2401 + 686 = 9261$

$\cos 9x - \cos 7x$

$\cos 9x - \cos 5x$

$-2(\sin \frac{9}{2}x \cos \frac{5}{2}x + \cos \frac{9}{2}x \sin \frac{5}{2}x)$

$2\sin$

$2(\cos^2 \frac{9}{2}x \sin^2 \frac{5}{2}x +$

$\frac{1+\cos 9x}{2} \cdot \frac{1-\cos 5x}{2} - 1-$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $y \geq 2 + 3 \cdot 2^{34}$ $\quad x = 2$

$y < 76 + 2^{33} - 2$. $\quad 76 -$

$2^6 = 4^3 = 64$

$76 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} =$

$= 76 + 2^{33}(x-6) - 2x - 2^x$

2^{38}

$38 - 6 = 32 = 2^5$

$x = 6$

$2^{38} - 38 \cdot 2 = 76$

$76 - 12 - 2^6 = 0$. $\quad x = 38$ $\quad 7 \ 10$

$y \geq 0$ $\quad 6 \ \underline{7} \ 8 \ 9 \ldots \ 38$ $\quad 32$ $\quad 31$

$y < 0$. $\quad 7 \ldots 37$

$S = 76 \cdot 32 + 2^{33}\left(\frac{1+37}{2} \cdot 32\right) - 2\,\frac{7+38}{2} \cdot 32$

$- 2^7 - 2^8 \ldots - 2^{38}$

$S = 76 \cdot 32 + 2^{33} \cdot 33 \cdot 16 - 2 \cdot 16 \cdot 45 - 2^{39} + 2^7 =$

2^6

$38 \quad 36$

$S = 2^7 \frac{2^{32}-1}{1} = 2^{39} - 2^7$

$4 \cdot 19$

$= 2^{6} \cdot 19 + 2^{37} \cdot 33 - 2^5 45 - 2^{39} + 2^7$.

$64 \cdot 19 - 32 \cdot 45 + 128$

$$\begin{array}{r} 64 \\ \times 19 \\ \hline 576 \\ +64 \\ \hline 1216 \\ +128 \\ \hline 1344 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 32 \\ \times 45 \\ \hline 160 \\ 128 \\ \hline 1440 \\ -1344 \\ \hline 96 \end{array}$$

$2^{37} \cdot 33 - 2^{39} + 96 =$

$= 3 \cdot 32$

$2^{38} + 3 \cdot 2^{34}$

$76 + 2^{34} \cdot 19 - 76$

$38 = 19 \cdot 2$

4

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)