МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90°$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\,(2^{32} - 1)\,x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим число 9261 на простые множители.

$9261 = 7^3 \cdot 3^3$.

Простой множитель 7 может быть добавлен в произведение исключительно цифрой 7. Значит, число в нашем случае содержит три цифры 7. Простой множитель 3 может быть добавлен цифрами 3, 6, 9; однако цифра 6 в числе быть не может, т.к. в произведении отсутствует простой множитель 2. Значит, 3^3 получается или из трёх цифр 3, или из одной цифры 9 и одной цифры 3.

Значит, возможно два случая.

Случай I. Число содержит три цифры 7, три цифры 3, 2 цифры 1.

Число способов равно $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} =$

$= \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} = 56 \cdot 10 = 560$.

Случай II. Число содержит три цифры 7, одну цифру 9, одну цифру 3, 3 цифры 1.

Чи-во способов равно $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_4^1 = 56 \cdot 5 \cdot 4 =$

$= 56 \cdot 20 = 560 \cdot 2$.

Общее количество способов равно $560 + 560 \cdot 2 = 3 \cdot 560 = 1680$.

Ответ: 1680.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10. \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. \end{cases}$$

№5

Разберёмся, что задаёт первое уравнение системы на плоскости. Для этого раскроем модуль в 4 случаях:

1) $x+y+5 \geq 0$; $y-x+5 \geq 0$:

$x+y+5+y-x+5 = 10 \Leftrightarrow y = 0$.

$x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$; $-x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$.

Это отрезок $((-5;0);(5;0))$.

2) $x+y+5 \geq 0$; $y-x+5 \leq 0$:

$x+y+5-y+x-5 = 10 \Leftrightarrow x = 5$

$5+y+5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -10$. $y-5+5 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$.

Это отрезок $((5;-10);(5;0))$.

3) $x+y+5 \leq 0$; $y-x+5 \geq 0$.

$-x-y-5+y-x+5 = 10 \Leftrightarrow x = -5$.

$-5+y+5 \leq 0 \Leftrightarrow y \leq 0$; $y+5+5 \geq 0 \Leftrightarrow y \geq -10$.

Это отрезок $((-5;-10);(-5;0))$.

4) $x+y+5 \leq 0$; $y-x+5 \leq 0$.

$-x-y-5-y+x-5 = 10 \Leftrightarrow y = -10$.

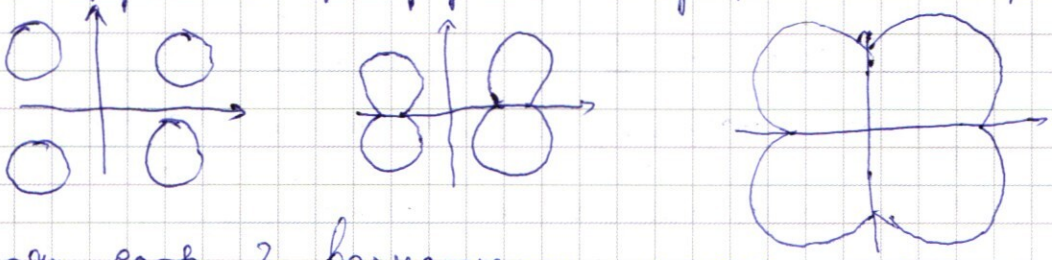
$x-10+5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$; $-10-x+5 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -5$.

Это отрезок $((-5;-10);(5;-10))$.

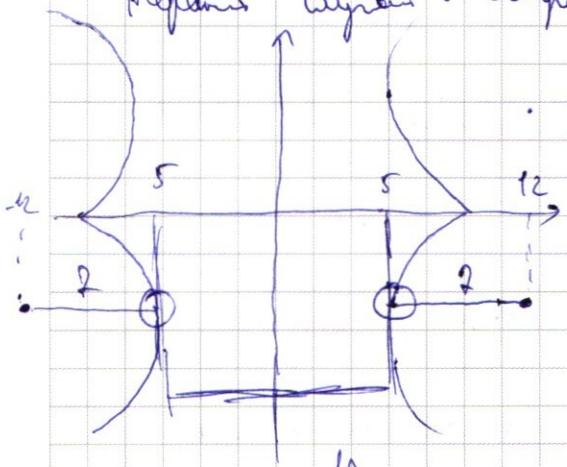
Таким образом, первое уравнение задаёт квадрат с вершинами в точках $(-5;0)$; $(5;0)$; $(5;-10)$; $(-5;-10)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Теперь понятно, что нас задаёт второе уравнение системы. Оно задаёт часть окружности с центром в точке (12; 5) радиуса $\sqrt{a}$, а также ограничения этой части окружности во все координатные углы относительно осей координат. При разных a изображения могут выглядеть так:

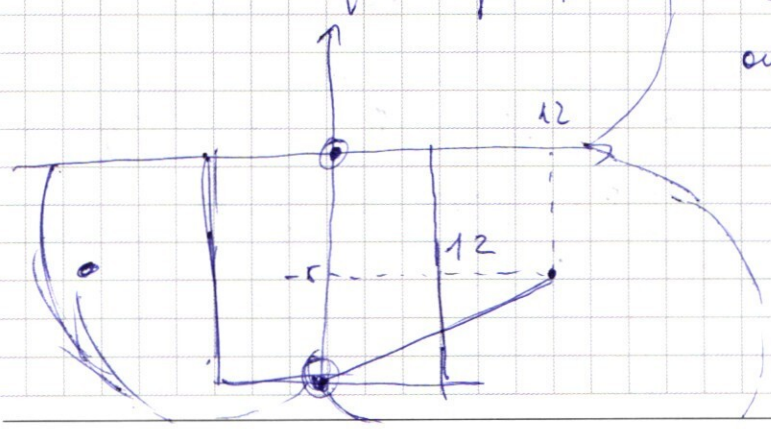


Итак, если 2 окружности, иногда графики 2 наших уравнений будут иметь ровно две общие точки. Первый случай выглядит так:



При радиусе 7, т.е. $a = 49$, две части окружности касаются квадрата.

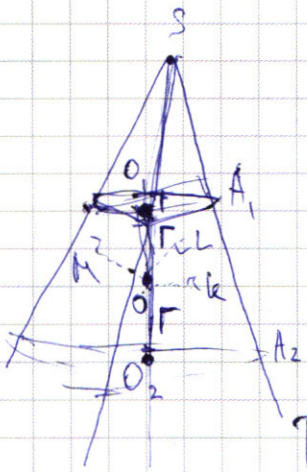
Второй случай:



Это возможно при радиусе окружности, равном $\sqrt{12^2+5^2} = 13$. $a = 169$

Ответ: 49; 169.

№ 4.



Пусть O_1 и O_2 – центры, в которых плоскости, перпендикулярные SO, с радиусами 1 и 16 соответственно, касаются сферы. Пусть r – радиус сферы. Тогда $OO_1 = OO_2 = r$.

Пусть $SO_1 = x$.

Пусть A_1 и A_2 – соответствующие вершины двух сечений. $\triangle SO_1A_1$ и $\triangle SO_2A_2$ – по 2 углам. Значит, сечения тоже подобны, а подобны их соответствующие элементы O_1A_1 и O_2A_2.

Значит, площади относятся как квадрат коэффициента подобия, следовательно, коэффициент подобия равен $\frac{1}{4}$.

Но он также равен $\frac{SO_1}{SO_2}$. Значит, $\frac{1}{4} = \frac{SO_1}{SO_2}$;

$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+2r}$; $x+2r=4x$; $r = \frac{3x}{2}$. Рассмотрим $\triangle SOK$.

$\angle KSO = \arcsin\frac{KO}{SO} = \arcsin\frac{r}{x+r} = \arcsin\frac{\frac{3x}{2}}{\frac{5x}{2}} = \arcsin\frac{3}{5}$

Аналогично, $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO = \arcsin\frac{3}{5}$.

Следовательно, сечение угла плоскостью KLM также перпендикулярно прямой SO, и оно подобно 2 первым сечениям. Найдем с каким коэффициентом.

$SK = \sqrt{\left(\frac{5x}{2}\right)^2 - \left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{4x}{2}$. Пусть $X_1 \in SO, KX_1 \perp SO$.

Тогда $KX_1 = KS\sin\angle KSO = \frac{4x}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{6x}{5}$

$SX_1 = \sqrt{4x^2 - \frac{36x^2}{25}} = x\sqrt{\frac{100-36}{25}} = \frac{8x}{5}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Следовательно, коэф. подобия сечения, площадь которого мы ищем, и сечения с площадью 1, равен

$$\frac{SO_1}{SX_1} = \frac{X}{\frac{8}{5}} = \frac{5}{8}.$$

Отношение площадей равно квадрату коэффициента подобия, следовательно, искомая площадь

$$S = 1 \cdot \frac{64}{25} = \frac{64}{25}.$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$; $S = \frac{64}{25}$.

$\sqrt{2}$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0;$$

$$(\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 4x;$$

$$-2\sin 7x \sin 2x + 2\sin 7x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x;$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x);$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x);$$

$$\left[\cos 2x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \right.$$
$$\left. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right]. \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} - \text{решение}\right)$$

$$2\sin 7x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x);$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x);$$

$$\sin 7x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x;$$

$$\sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right);$$

$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$ или $\pi - 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. $-9x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$. $9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^4}\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} y^{4\ln x}} = y^{\ln y - 4\ln x};$$

$$x^{2\ln x} y^{4\ln x} = y^{4\ln x - \ln y};$$

$$x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 4x = 2\cos\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}$.

$\cos(\alpha+\beta)-\cos\beta-\sqrt{2}\cos\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin\beta=0$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)=$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}$

$y^2-xy-2x^2+8x-4y=0$.

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}$,

$y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}\cdot(x^2y^4)^{\ln x}=1$;

$x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}=1$;

$x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x+\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}=1$;

$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln x^4+\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}=1$;

$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln\left(\frac{y}{x^3}\right)}=1$;

$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln y-\ln(x^3)}=1$;

$y^2-xy-2x^2+8x-4y=0$.

$xy=$

$a^{\log_b a}=b^{\log_b^2 a}$.

$x^{2\ln x}\cdot y^{\ln y}=y^{\ln x^3}$.

$\frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}}=y^{\ln y-7\ln x}$;

$\frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}}=\frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$;

$x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}=y^{7\ln x+\ln y}$;

$x^{2\ln x}=y^{3\ln x+\ln y}$;

$x^{2\ln x}=y^{3\ln x}\cdot y^{\ln y}$.

$\frac{x^{2\ln x}}{y^{3\ln x}}=y^{\ln y}$;

$\left(\frac{y^3}{x^2}\right)^{\ln x}=y^{\ln y}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0.$

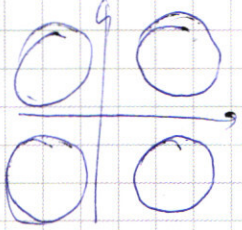
$y(y-4) + x(-2x+8) - xy = 0.$

$y(y-4) + 2x(-x+4) = xy;$

$y(y-4) - 2x(x-4) = xy;$

$(y^2 - 4y + 4) - 2(x^2 - 4x + 4) - 12 - xy = 0;$

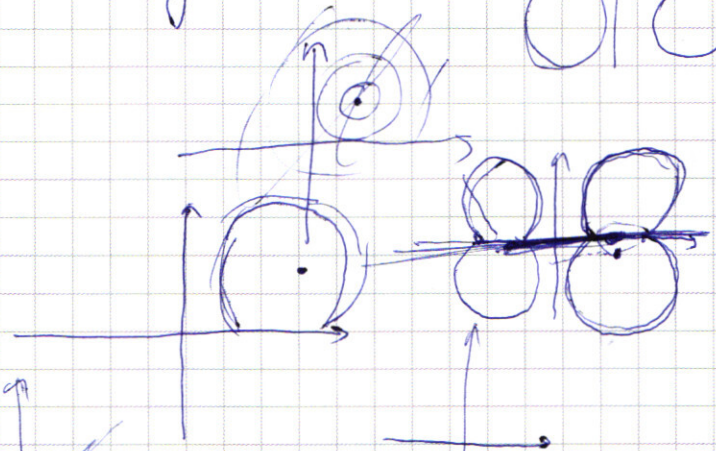
$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 = xy + 12.$



$|x+y+5| + |y-x+5| = 10.$

$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a.$

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10.$



$x+y \geq -5$ $y - x \geq -5.$

$x+y+5+y-x+5$ /

$x+y+5 \geq 0;$ $y-x+5 \geq 0;$

$y \geq -5-x.$ $y \geq x-5$

$x+y+5+y-x+5 = 10;$

$2y + 10 = 10;$

$2y = 0;$ $y = 0.$

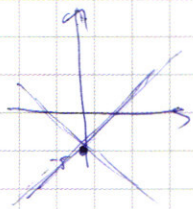
$0 \geq -5-x;$

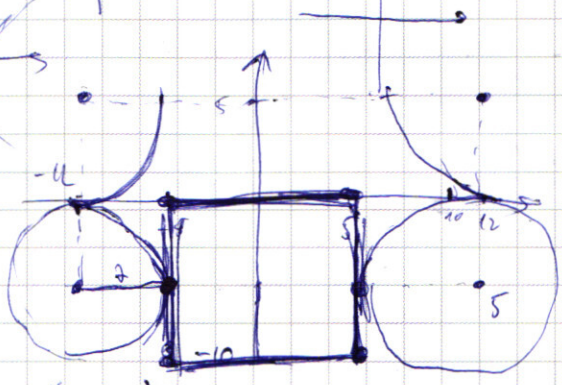
$x+5 \geq 0;$

$x \geq -5.$

$0 \geq x-5;$

$x \leq 5.$





$x+y+5-y+x-5 = 10;$

$x+y-5+y-x+5 = 10;$

$2y+10 = 10;$

$y = 0.$

$a = 25.$

$2x = 10;$

$x = 5.$

$x+y+5 \geq 0$

$10 \geq -y;$

$y \geq -10.$

$y - x + 5 \leq 0;$

$y \leq 0.$

$y - x + 5 \leq 0;$

$y - 5 + 5 \leq 0.$

$x+5 \geq 0;$

$x \geq -5.$

$y - x + 5 \geq 0;$

$y - x \geq -5;$

$-x \geq -5;$

$x \leq 5.$

$-x+y-x+5 = 10;$

$-2x = 10;$

$x = -5.$

$x+y+5 \leq 0;$

$-y \leq 0.$

$y \geq 0.$

$y - x + 5 \geq 0;$

$y + 10 \geq 0;$

$y \geq -10.$

$x+y+5 \geq 0;$

$10 + y \geq 0;$

$y \geq -10$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x+y+5 \le 0$ $\quad y \le 0$. $\quad y-x+5 \ge 0$;

$y \ge -10$.

$-x-y-5+y-x+5=10$;

$-2x=10$; $\quad x=-5$.

$-x-y-5-y-x-5=10$;

$-2y-10=10$; $\quad -2y=20$; $\quad y=-10$.

$x+y+5 \le 0$;

$x-5 \le 0$;

$x \le 5$.

$y-x+5 \le 0$;

$-5-x \le 0$;

$x \le 5$; $\quad x \ge -5$.

$49+25=74$

$144-25$ $\quad 144+25=169$

(12;6)

$\sqrt{74}$

5

5

2

(x;0)

2

$a=49$.

49

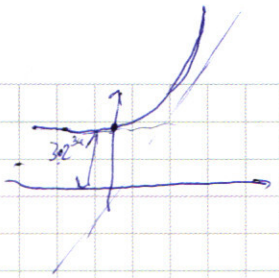
16 9.

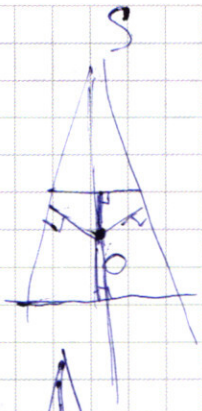
$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

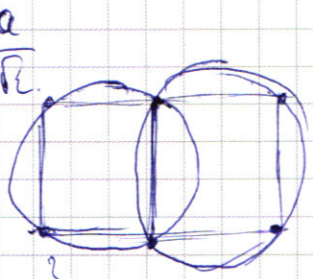
$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$3+6+5 = 2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2^{33}x - 2x.$

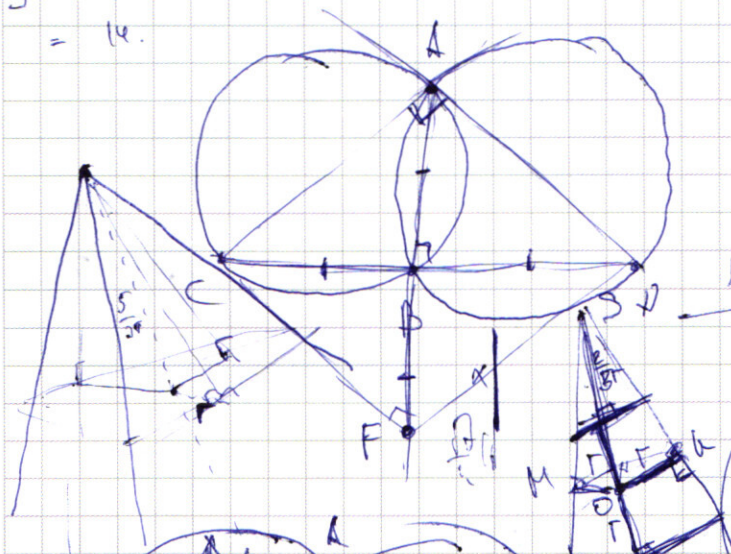
$= 14.$

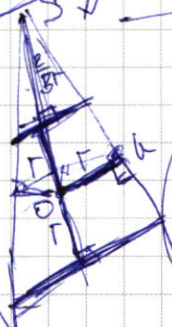


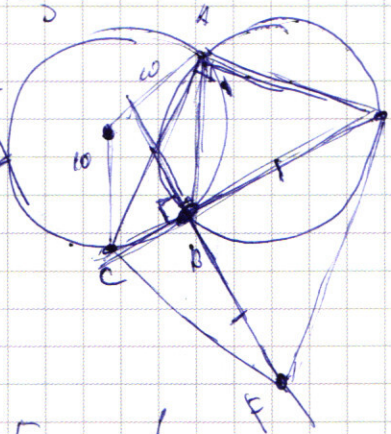


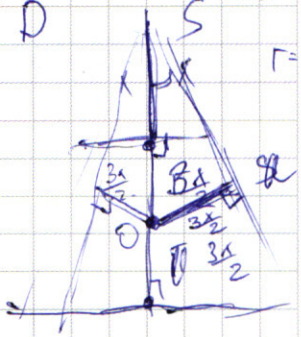


$\frac{1}{5}$





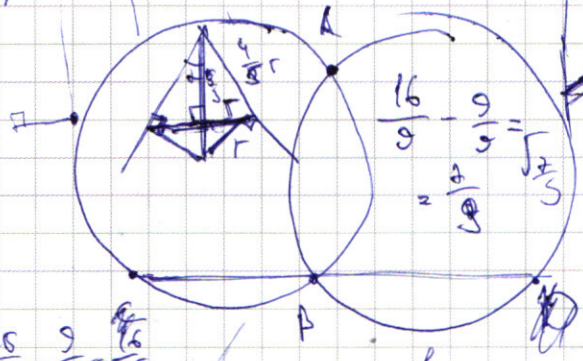




$4x = x + 2r;$

$3x = 2r;$

$r = \frac{3x}{2}.$



$\frac{16}{9} - \frac{9}{9} = \frac{7}{9}$

$\frac{X - r}{X + r} = \frac{1}{16};$

$16x + 4x - 4r = x + r;$ $\frac{5x}{2}$ $\frac{3x}{2}.$

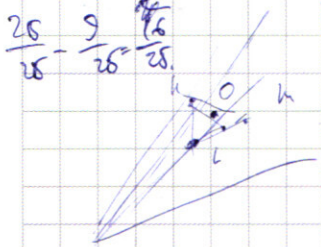
$15x = 5r;$

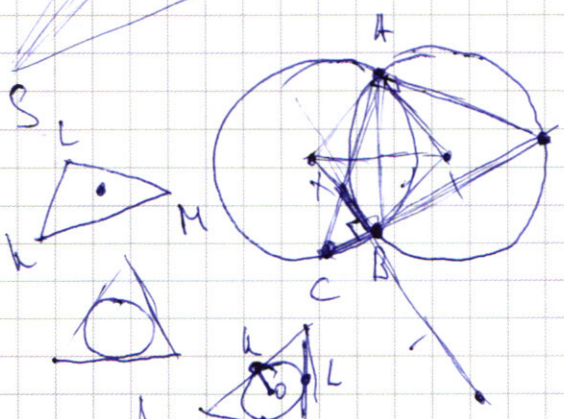
$3x = r;$

$\frac{CB}{CD} = \frac{Bx}{AP}$

$r = \frac{3x}{1}.$

$\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}.$

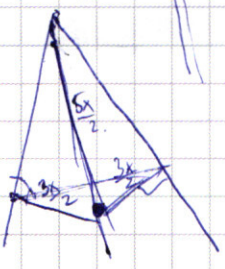


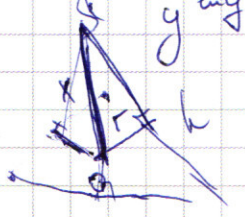


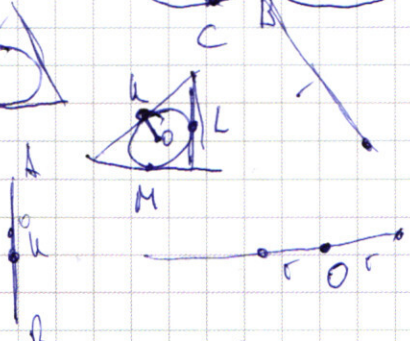
$\frac{1}{X^{2\ln x} \cdot y^{4\ln 4}} = y^{\ln y - 7\ln x};$

$\frac{1}{X^{2\ln x}} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$2\ln x = \frac{y}{y^{\ln y}}$

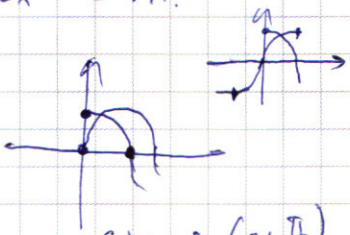






$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin\frac{9x-5x}{2}\sin\frac{9x+5x}{2} = -2\sin 2x\cos 7x.$

$\cos 30^\circ - \cos 30^\circ = -2\sin 0$



$2\sin 7x\cos 2x - 2\sin 2x\cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0;$

$2(\sin 7x\cos 2x - \sin 2x\cos 7x) = \sqrt{2}\cos 4x;$

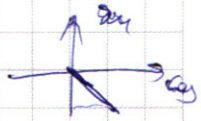
$\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right).$

$2\sin(7x-2x) = \sqrt{2}\cos 4x;$

$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin 5x = \sqrt{2}\cos 4x;$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\alpha.$



$\sqrt{2}\sin 5x - \cos 4x = 0;$

$4\sin^2 5x = 2\cos^2 4x;\quad 4\sin^2 5x = 2 - 2\sin^2 4x;$

$\cos 9x - \cos 5x = \sin\left(9x+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(5x+\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin\left(9x+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-5x-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{9x+\frac{\pi}{2}-5x-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{9x+\frac{\pi}{2}+5x+\frac{\pi}{2}}{2} =$

$= 2\sin\frac{4x}{2}\cos\frac{14x+\pi}{2} = 2\sin 2x\cos\left(7x+\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin 2x\sin 7x.$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin\frac{14x}{2}\cos\frac{4x}{2} = 2\sin 7x\cos 2x.$

$2\sin 2x\cos 2x - 2\sin 2x\sin 7x - \sqrt{2}\cos 4x = 0;$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x;$

$2\sin 7x(\cos^2 x - \sin^2 x - 2\sin x\cos x) = \sqrt{2}\cos 4x;$

$\sin\alpha+\cos\alpha = \sin\alpha + \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{2\alpha+\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = 2\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$= 4\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right) =$

$\sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{2}.$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1. \quad 1\cdot\sqrt{2}.$

$= \sqrt{2}\left(\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4} + \cos\alpha\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos = \frac{4}{5}. \quad 2\cdot\frac{4}{5} = \frac{8}{5}.$

$\sqrt{2}\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin\alpha - \cos\alpha = \sin\alpha - \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha + \sin\left(-\alpha-\frac{\pi}{2}\right) =$

$= 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+\frac{\pi}{2}}{2}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 0 - \cos 0 = -1.$

$-\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\right) = -1.$

$\sqrt{2}\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos 4x = 0;$

$\sin 45 - \cos 45 = 0.$

$-\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$\sin\left(9x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(5x+\frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0;$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\pi$

$9261 \mid 9$ $\quad 1029$

-9 $\quad 02$ $\quad -0$ $\quad 26$ $\quad -18$ $\quad 81$ $\quad -81$ $\quad 0$

$1029 \mid 3$ $\quad 343$

-9 $\quad 12$ $\quad -12$ $\quad 09$ $\quad -9$ $\quad 0$

$\alpha+\beta=-\pi$

$3^3 \cdot 3^3$

$49 \mid 7$ $\quad 343$

-28 $\quad 63$ $\quad 49$

-343 $\quad 21$ $\quad 01$

343 $\quad 27$ $\quad 2401$ $\quad +686$ $\quad 9261$

1 случай) 3 семёрки, 3 тройки, 2 единицы.

2 случай) 3 семёрки, 1 тройка, 1 двойка, 3 единицы.

Случай 1. 7773311 $\quad C_8^3 \cdot C_5^3 =$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$= \frac{8!}{5!\cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2!\cdot 3!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3} = \frac{3\cdot 7\cdot 8}{3} = 56.$

$56 \cdot \frac{4\cdot 5}{2} = 56\cdot 10 = 560.$

56 $\quad 35$ $\quad 280$ $\quad +168$ $\quad 1960$

Случай 2. $C_8^3 \cdot C_5^1 \cdot C_5^1 = \frac{8!}{5!\cdot 3!} \cdot \frac{5!}{4!} \cdot 5 =$

$= \frac{6\cdot 7\cdot 8}{6} \cdot 25 = 56\cdot 25 \quad 56\cdot 35$

560 $\quad 3$ $\quad 1680$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x.$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cos 2x.$

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}-\beta-\frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{\alpha+\frac{\pi}{2}+\beta+\frac{\pi}{2}}{2} =$

$= 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$

$-\cos\beta = \sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$

$= \sin\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right) =$

$-\cos\beta = -\sin\left(\beta+\frac{\pi}{2}\right) =$

$\sin\left(-\beta-\frac{\pi}{2}\right) =$

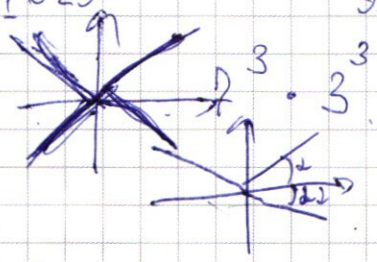
$\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6} = -2\sin\frac{45-30}{2}\sin\frac{45+30}{2}.$

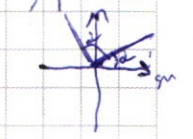
$-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$

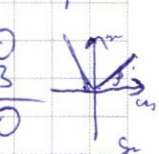
$\sin 2x + \sin 2x = 2\sin\frac{\pi}{4}\left(\cos 2x + \sin 2x\right)$

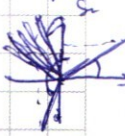
$\sin 2x + \sin 2x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x$

$\sin x + \sin x = \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right);$









☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0;$

$(\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x) = \sqrt{2}\cos 4x;$

$\cos\alpha = \sin 2x;$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{8} +$

$-2\sin 7x \sin 2x + 2\sin 7x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x).$

$2\sin 7x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x);$

$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2x + \sin 2x);$

$\sin 7x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x;$

$\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right);$

$7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k;$ $\quad \pi - 7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k;$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{7}.$ $\quad -7x = -\frac{3\pi}{4} + 2x + 2\pi k;$

$-9x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$

$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k;$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$y(y-x-4) - x(2x+4) = 0.$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0.$

$(y^2 - 2xy + x^2) + xy - 3x^2 + 8x - 4y =$

$= (y-x)^2 - x(y-3$

$2y^2 - 2xy - 4x^2 + 16x - 8y = 0;$

$-(4x^2 + xy + y^2)$

$\cos(\alpha - \beta) = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$

$\cos 2 - \cos 5.$

$-2\sin\frac{9x+5x}{2}\sin\frac{9x-5x}{2} = -2\sin 7x \sin 2x$

$2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 2\sin 7x\cos 2x.$

$\cos 2x = \sin 2x.$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k;$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}.$

$2\sin 7x\cos 2x - 2\sin 7x \sin 2x = \sqrt{2}\cos^2 2x - \sqrt{2}\sin^2 2x;$

$\sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x);$

$\sqrt{2}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x;$ $\cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x;$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sin 7x = 2\cos 2x + 2\sin 2x;$

$\sin\frac{\pi}{4}\sin 7x = 2\cos 2x + 2\sin 2x;$

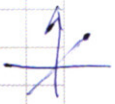
$\sin\frac{\pi}{4}\sin 7x = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + 7x\right)\right)$

$\sin 7x = \sin(3x+4x) = \sin 3x\cos 4x + \cos 3x \sin 4x =$

$= \sin(x+2x)\cos 4x + \cos(x+2x)\sin 4x =$

$= (\sin x\cos 2x + \sin 2x\cos x)\cos 4x + (\cos^2 x - \sin^2 2x)(\sin 4x) =$

$= \sin x\cos 2x\cos 4x + \sin 2x\cos x\cos 4x + \cos^2 x\sin 4x - \sin^2 2x\sin 4x.$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)