

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Т.е. 9261 - произведение цифр 8 восьмизначного числа, то среди этих цифр есть 3 семерки. Оставшиеся 5 цифр представляют из себя один из следующих наборов:

$$\{1; 1; 3; 3; 3\}, \{1; 1; 1; 9; 3\}$$

~~Рассмотрим~~ Рассмотрим все числа, соответствующие первому набору (т.е. ~~состоящие из 5 цифр~~ множество цифр которых - это множество $\{7; 7; 7; 3; 3; 3; 1; 1\}$

Рассмотрим количество способов выбрать места для постановки 7-ёрок равно C_8^3 . Для 3-ех это C_5^3 (т.е. 7 уже занял все места) и оставшиеся единицы ставятся однозначно.

Т.е. чисел, соотв. первому набору, равно $C_8^3 \cdot C_5^3$

• Рассмотрим все числа, соответствующие второму набору ($\{7; 7; 7; 9; 3; 1; 1\}$).

Количество способов поставить семерки на места в восьмизначном числе равно C_8^3 . Поставить единицы - C_5^3 (т.е. 7-ёрки уже стоят). Поставить 9 - C_2^1 способов, т.е. 7-ёрки и 1-ички уже стоят. Место для 9 опред. однозначно. Кол-во чисел, соотв. второму набору, равно $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1$

Всего чисел: $C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^1 + C_8^3 \cdot C_5^3$.

Ответ: 1630.

Задача 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\sin 2x + \cos 2x - \sqrt{2} \sin(\frac{\pi}{4} + 2x))$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - 2 (\cos 2x - \sin 2x) \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin \frac{7x - \frac{\pi}{4} - 2x}{2} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

1) $\cos 2x = \sin 2x$

2) $\sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

3) $\cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\cos 2x = 0$ в нуле скачок
 $(\text{т.е. } \sin 2x = 1)$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 = \tan 2x \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi m$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi m}{5}, m \in \mathbb{Z}$$

$$9x = \frac{2\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \pi(\frac{1}{8} + \frac{n}{2}), n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi(\frac{1}{20} + \frac{2m}{5}), m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi(\frac{1}{12} + \frac{2k}{9}), k \in \mathbb{Z}$$

Т.е. решения уравнения являются три серии, представленные выше.

Ответ: $\pi(\frac{1}{8} + \frac{n}{2}), \pi(\frac{1}{20} + \frac{2m}{5}), \pi(\frac{1}{12} + \frac{2k}{9}),$
где $n, m, k \in \mathbb{Z}$

Задача 3

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

Решим (2):

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 2xy) + (xy - 2x^2) + (3x - 4y) = 0$$

$$y(y - 2x) + x(y - 2x) - 4(y - 2x) = 0$$

$$(y + x - 4)(y - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y + x = 4 \\ y = 2x \end{cases}$$

Решим ①

$$\begin{aligned} (xy - 4) - \ln x &= y \ln(y/x + 1) \\ x - 2 \ln x - 4 \ln x &= y \ln y - 7 \ln x \\ e^{-2-4 \ln x} &= e \cdot y \quad | \text{умножим на } y^{7 \ln x} \\ y^{3 \ln x} &= e \Leftrightarrow y^{\ln x} = e \Leftrightarrow \ln y \ln x = 1 \end{aligned}$$

Тогда система преобразуется в:

$$\begin{cases} y + x = 4 \\ y = 2x \\ \ln y \ln x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + x = 4 & \text{②} \\ \ln x \ln y = 1 & \text{③} \\ y = 2x & \text{④} \\ \ln x \ln y = 1 & \text{⑤} \end{cases}$$

Решим ④:

$$\begin{cases} y = 2x \\ \ln x \ln y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \ln x \ln 2x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ \ln^2 x + \ln 2 \ln x - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение: пусть $\ln x = t$, тогда:

$$t^2 + \ln 2 \cdot t - 1 = 0 \quad D = \ln^2 2 + 4 \quad t_{1,2} = \frac{-\ln 2 \pm \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}$$

$$\ln x = \frac{-\ln 2 + \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}$$

$$x = e^{\frac{-\ln 2 + \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}}$$

$$y = 2e^{\frac{-\ln 2 + \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}}$$

$$\ln x = \frac{-\ln 2 - \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}$$

$$x = e^{\frac{-\ln 2 - \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}}$$

$$y = 2e^{\frac{-\ln 2 - \sqrt{\ln^2 2 + 4}}{2}}$$

Решим (3)

$$\begin{cases} y+x=4 \\ \ln x \ln y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} y=4-x \\ \ln x / \ln(4-x)=1 \end{cases}$$

Докажем, что уравнение $\ln x / \ln(4-x)=1$ не имеет решений.

Пусть $\varphi(x) = \ln x \ln(4-x) - 1$

Найдем экстремумы: $\varphi'(x) = 0 \Leftrightarrow (\ln x)' \ln(4-x) + (\ln(4-x))' \ln x = 0$

$$\frac{\ln(4-x)}{x} - \frac{\ln x}{4-x} = 0 \Leftrightarrow (4-x) \ln(4-x) = x \ln x$$

Но функция $f(x) = x \ln x$ строго возрастает, т.е.

$$f'(x) = \ln x + 1$$

Заметим, что т.е. $\ln x / \ln(4-x) = 1$, тогда $\ln x$ и $\ln(4-x)$

одного знака:

1) Пусть $\ln x > 0$ и $\ln(4-x) > 0$

$$\begin{cases} \ln x > 0 \\ \ln(4-x) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > e^0 \\ x < e^0 \end{cases}$$

Решим (1) $\begin{cases} (xy)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \end{cases}$ логарифмируем

$\begin{cases} \end{cases}$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln y) = \ln(y/x^2) \ln y$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln y = \ln^2 y - 2\ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - 2\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\begin{cases} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases} \quad \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

Тогда исходная система переписывается в виде

$$\begin{cases} \begin{cases} y=2x & 1 \\ x+y=4 & 2 \\ y=x^2 & 3 \\ y=x & 4 \end{cases} \end{cases}$$

всего 4 способа выбрать 2 уравнения
одно из первого и одно из второго, т.е.
это и разберем и другие.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$$

$X = (0, 0)$ $\leftarrow$ center
 $(2, 4)$

2 u 3

$$\begin{cases} x+y=4 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$V_2 + V_3 - V_4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{2}}{2} \log x.$$

$$\begin{cases} y = 1x \\ y = x \end{cases}$$

XZO (0;0)
ke nopy

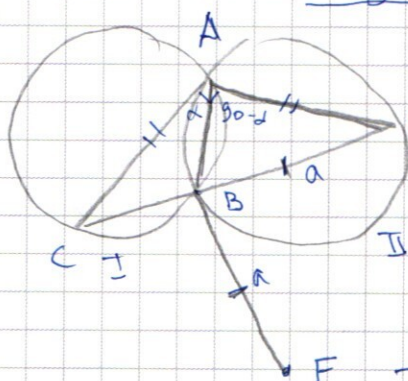
1	2	u	u
---	---	---	---

$$\begin{cases} x+y=4 \\ 4=x \end{cases}$$

$$(2, 2)$$

① $T_{\text{bre}}: (2; u), (2; 2)$
 $\underline{\quad}$
 $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{13-2\sqrt{17}}{4})$

Задача 6



а) Заметим, что точка D не входит ни в "большую" дугу AB, а точка C не "большую" дугу второй окружности, а точка C не "большую" дугу AB той окружности.

Если бы это условие не выполнялось, то тогда В могла бы и на отрезке CD , а на прямой CD .

Тогда $\angle ADB = \angle ACB$ т.к. эти углы опираются на одну дугу (которые равны $\widehat{AB}$).

$\angle TOA < \angle ADB + \angle ACB = 90^\circ$ и $\angle APB = \angle ACB \Rightarrow \angle ACB = \angle APB = 45^\circ$

$\Rightarrow AD=AC$. Тонга нэгд $\angle CAB=\alpha$, $\alpha \angle BAD=90-\alpha$. Тэгвэл $BD=a$ ($BF=a$)

$$S_{CAB} = \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha \cdot AC \cdot AB, \quad S_{BAD} = \frac{1}{2} \cdot \sin(90^\circ - \alpha) \cdot AB \cdot AD$$

$$\frac{S_{CAB}}{S_{BAD}} = \frac{BC}{BD} = \frac{\frac{1}{2} \sin \alpha \cdot AC \cdot AB}{\frac{1}{2} \cos \alpha \cdot AB \cdot AD} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{AC}{AD} = \tan \alpha \quad (AC = AD)$$

T.e. $\frac{BC}{BD} = \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow BC = \operatorname{tg} \alpha \cdot BD \Rightarrow BC = a \operatorname{tg} \alpha$.

Тогда по Т Пифагора: $CF^2 = BF^2 + CB^2 \Rightarrow CF^2 = a^2 + a^2 \tan^2 \alpha$

$$CF = a \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = a \frac{1}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}$$

По обобщенной теореме синусов (или просто по Т. синусов) где

ΔBAD : $\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 2R$, где R - радиус описанной окр. ΔBAD , т.е.
 $\frac{a}{\sin \alpha} = 2 \cdot 10 = 20 \Rightarrow CF = 20$ ($R = 10$ из условия).

8) $BC = 12$, но мы уже знаем, что $BC = a \tan \alpha$, тогда
 $a \tan \alpha = 12$, но из прошлого пункта известно, что $\frac{a}{\cos \alpha} = 20$

$$\frac{a \sin \alpha}{\cos \alpha} = 12 \text{ и } \frac{a}{\cos \alpha} = 20 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{4}{5}$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4} \Rightarrow a \tan \alpha = 12 \Leftrightarrow a \cdot \frac{3}{4} = 12 \Rightarrow a = 16$$

$$\text{Тогда } DC = a \tan \alpha + a = ~~a \tan \alpha~~ = 12 + 16 = 28$$

$$\sin 45^\circ = \sin \angle ACD = \frac{AD}{DC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AD = \frac{\sqrt{2}}{2} DC = 14\sqrt{2}$$

$$AC = AD = 14\sqrt{2}$$

$$\text{Пусть } \angle BFC = \beta, \text{ тогда } \tan \beta = \frac{CB}{BF} = \frac{a \tan \alpha}{a} = \tan \alpha \Rightarrow \text{т.к. } \alpha \text{ и } \beta - \text{острые,}$$

$$\text{то } \alpha = \beta. \text{ Тогда } \angle BCF = 90^\circ - \beta = 90^\circ - \alpha$$

$$\angle ACF = \angle ACB + \angle BCF = 90^\circ - \alpha + 45^\circ = 135^\circ - \alpha$$

$$\text{Тогда } S_{ACF} = AC \cdot CF \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin \angle ACF = 20 \cdot 14\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(135^\circ - \alpha)$$

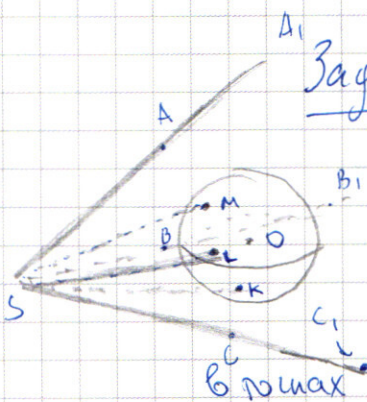
$$\sin(135^\circ - \alpha) = \sin(135^\circ) \cos \alpha - \sin \alpha \cos(135^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} (\cos \alpha + \sin \alpha)$$

$$\text{Тогда } \sin(135^\circ - \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$S_{ACF} = 20 \cdot 14\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7}{5} = 10 \cdot 14 \cdot \frac{7}{5} = 14^2 = 196$$

Ответ: а) 20
 б) 196

Задача 4



Пусть α - плоскость, касающаяся сферы, $\perp SO$,
 α - расстояние до которой от S меньше,
 а β - плоскость, касающаяся сферы, $\perp SO$,
 такая, что расстояние от S до β больше.

Пусть α пересекает дуги трехгранного угла
 в точках A, B, C (см. рис), а плоскость β в A_1, B_1, C_1 (рис).

Рассмотрим гомотетию с коэффициентом $\frac{SA_1}{SA}$ и центром

S . При ней точка A переходит в A_1 , а плоскость α переходит
 в плоскость γ , такую, что $\gamma \perp SO$ и $A_1 \in \gamma$, т.е. $\gamma = \beta$.

Тогда B при гомотетии β переходит в B_1 , C - в C_1 .

Т.е. $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Если $k = \frac{SA_1}{SA} \leftarrow$ коэффициент, то

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{1}{k^2}$. Но ABC - сечение α и трехгранного угла, и

$A_1B_1C_1$ - сечение β и трехгранного угла. Тогда

$S_{ABC} = 1$, $S_{A_1B_1C_1} = 16$ (т.е. α - ближе, а β - дальше от S)

Тогда $k = \frac{1}{4}$ (т.е. $k = \frac{1}{4}$ т.е. в этом случае одна из плоскостей α или β не пересекает трехгранный угол)

Пусть P - точка касания α и сферы, P_1 - β и сферы.

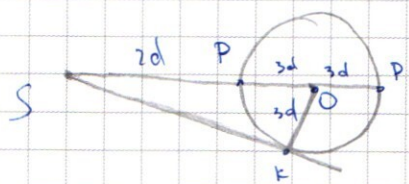
Очевидно, что при повороте описанной ранее P переходит в P_1 .

Тогда $SP = \frac{1}{4} SP_1 \Rightarrow PP_1 = \frac{3}{4} SP_1$, но PP_1 не перпендикулярно SO

P и P_1 лежат на прямой SO , т.е. PP_1 - диаметр сферы.

Рассмотрим (KSO) . Пусть диаметр SO это SO

$OP = OP_1 = OK$ (т.е. SK - касательная)
 $OP = OP_1 = OK = \frac{3}{5} d$



т.е. $PP_1 = \frac{3}{4} SP_1$, то $PP_1 = \frac{3}{4} SP_1 = \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{3} SP = SP$

то $SP = 2d$ тогда $\angle SKO = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{OK}{OS} = \frac{\frac{3}{5}d}{d} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}.$$

Важно заметить, что точки KLM лежат в основании конуса с вершиной S , тогда SO - ось конуса $\Rightarrow (KLM) \perp SO$

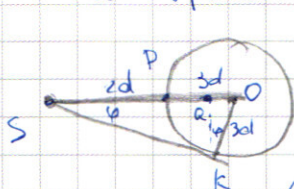
Тогда существует плоскость β , что при повороте с центром S и радиусом R плоскость α переходит в (KLM) .

Тогда треугольник сечение (KLM) и трехгранного угла

подобен $\triangle ABC$. Пусть A - точка пересечения (KLM) и

SO .

Рассмотрим (KSO):



$Q \in SO$, $KQ \perp SO \Rightarrow KQ$ — основание высоты из K на SO

Найдём SO .

$\angle QSK = \angle QKO = \varphi$, $\sin \varphi = \frac{3}{5}$ (из прошлого пункта задачи)

$$\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi} = \frac{4}{5} = \frac{QS}{SK} \Rightarrow QS = \frac{4}{5} SK$$

$$SK = \cos \varphi \cdot SO = 4d \Rightarrow QS = \frac{4}{5} SK = \frac{16d}{5}$$

Тогда $\ell = \frac{SP}{SQ}$ т.е. при известной помощи P переходим в Q , т.е. $\ell = \frac{2d \cdot 5}{16d} = \frac{10}{16}$

Тогда S (S — площадь искомого сечения) $\frac{1}{3} A \ell^2$

$$\frac{S_{\text{max}}}{S} = \ell^2 = \frac{100}{256} \quad S = \frac{256}{100} S_{ABC} = 2,56$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$
 $S = 2,56$

Задача 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = a & (2) \end{cases}$$

$$(1): |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \Leftrightarrow \frac{|x+y+5|}{\sqrt{2}} + \frac{|y-x+5|}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}$$

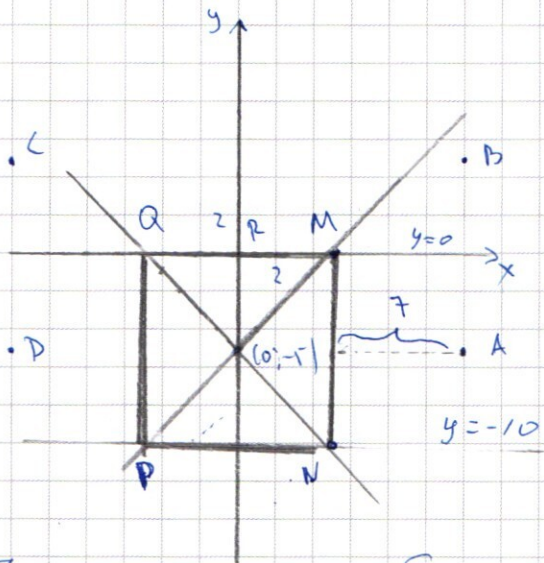
т.е. $\frac{|x+y+5|}{\sqrt{2}} \leftarrow$ расстояние от (x,y) до прямой $x+y+5=0$

$\frac{|y-x+5|}{\sqrt{2}} \leftarrow$ расстояние от (x,y) до прямой $y-x+5=0$.

Тогда уравнение (1) задаёт нам-во точек таких, что сумма расстояний от каждой из них до двух выбранных прямых равно константе ($5\sqrt{2}$).

Построим эти две прямые и найдём искомого ТМТ.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Заметим, что любая точка
вида $(x; 0)$ или $(x; -10)$ подходит
 $-5 \leq x \leq 5$
/ любая точка на прямой
с ограничением по координатам
 $y=0$ и $y=-10$ подходит $-5 \leq x \leq 5$
с другой стороны очевидно, что
любая другая

Также подходит любая точка вида $(x; y)$, где $y \in [-5; 0]$. Тогда исконое ГМТ - квадрат,
т.е. любая точка внутри квадрата не подходит
(сумма расстояний меньше) и любая вне - тоже
(сумма расстояний больше)

Уравнение (2) задаёт окружность 4 окружности, полу-
связанные $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ всевозможными
симметричными
относительно Ox и Oy . А, В, С, D - центры этих окружно-

стей. При уменьшении параметра a уменьшаются радиусы
окружностей (он равен $\sqrt{a}$) очевидно, что при $a \in (-\infty; 49]$
решений нет (окр. либо не секут, либо не пересекают квадрат)
При $a = 49$ имеется ровно 2 общих точки

(окружности с центрами А и D касаются двух сторон)

MNPQ - вершины квадрата, в соотв. с рисунком.

при $a \in (49; \infty)$ таковых точек 0 или 4

много (хотя бы 4) при $a = 49$ (касания окружностей с центрами
А, В, С, D называются w_A, w_B, w_C, w_D)

W_p и W_A пересекают квадрат по 2 точкам, но W_C и W_B тоже пересекают квадрат (~~тоже~~ $\exists$ точки пересечения

W_C и PQ , отличная от точек пересечения W_A , W_p и квадрата)

При $a \in (0e^2, 0m^2]$ ~~тоже~~ общих точек слишком много (≥ 4)

При $a \in (0m^2, 0n^2)$ ~~тоже~~ общих точек хотя бы 3 : ~~тоже~~

~~и~~ W каждая из W_C и W_B пересекает квадрат

хотя бы по 2-ум точкам (т.е. они пересекаются максимум в одной точке $\Rightarrow$ т.е. решений хотя бы 3)

При $a = 0n^2$: Ровно 2 общие точки: N и P .

при $a > 0n^2$ общих точек нет (квадрат лежит строго внутри)

$$0n^2 = (-12-5)^2 + (5+10)^2 \quad C(-12; 5) \quad N(5, -10)$$

$$0n^2 = 17^2 + 15^2$$

$$0n^2 = 257 + 225 \Rightarrow 0n^2 = 514 \quad \Delta \quad 0n = \sqrt{514}$$

ответ: a при $a \in \{49; 514\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln y} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$$

$$e^{-2\ln x} e^{-4\ln y} = e^{\ln y} e^{-7\ln x}$$

$$y^{3\ln x} = e^3 \quad y^{\ln x} = e \quad \ln x \ln y = 1$$

$$x \ln x = (\ln x + 1) x$$

$$x > e$$

$$\frac{1}{e}$$

$$\ln x \ln 2x = 1$$

$$\ln x = t \quad e^t = x \quad (2e^{\frac{1}{t}})^t$$

$$\ln 2x = \frac{1}{t} \quad e^{\frac{1}{t}} = 2x$$

$$2^t e^{t^2} = e$$

$$2^t e^{t^2} = e$$

$$2^t e^{t^2-1} = 1$$

$$2 = e^{t \ln 2}$$

$$t \ln 2 + t^2 - 1 = 0$$

$$\ln x \ln (4-x) = 1$$

$$\ln x = t \quad e^t = x$$

$$\ln (4-x) = \frac{1}{t} \quad e^{\frac{1}{t}} = 4-x$$

$$e^{\frac{1}{t}} + e^t = 4$$

$$e^t + \sqrt{e^t} = 4$$

$$(4 - e^t)^t = e$$

$$t \ln (4 - e^t) = 1$$

$$\ln (4 - e^t) = \frac{1}{t}$$

$$(\ln 2) (\ln 2)$$

$$\ln x \ln (4-x) = 1$$

$$\varphi(x) = \ln x \ln (4-x) - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{\ln (4-x)}{x} - \frac{\ln x}{4-x} = 0$$

$$\varphi(x) = \ln (4-x) \ln (4-x) = x \ln x$$

$$4-x = x \quad x=2$$

$$(\ln x)' \ln (4-x) + (\ln (4-x))' \ln x$$

$$\frac{\ln (4-x)}{x} + \frac{\ln x}{4-x}$$

$$\frac{(4-x) \ln (4-x) - x \ln x}{x(4-x)} \leq 0$$

$$(4-x) \ln (4-x) - x \ln x \geq 0$$

$$\frac{4-x}{x} \ln x$$

$$4-2x$$

$$(x \ln x)' = \ln x + 1$$

$$\ln (4-x)^{4-x}$$

$$\varphi(x) = \frac{\ln (4-x)}{e} - \frac{1}{4-x} < 0$$

$$f(x) = x \ln x$$

$$f'(x) = \ln x + 1 > 0$$

$$f(x) = f(y)$$

$$x=y$$

$$y+x=4$$

$$\ln x \ln y = 1 \quad x^{\ln y} = e$$

$$\ln x \ln(4-x) = 1 \quad \ln x = t$$

$$\frac{1}{\ln(4-x)} = t$$

$$x = e^{1/\ln(4-x)}$$

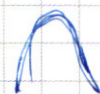


$$\ln x \ln y = 1 \quad (2)$$

$$\ln x \ln(4-x) = \ln e \ln e$$

$$\ln 2 \ln 2 = 1$$

$$1 \cdot \ln(4-e) < 1$$



$$x^{\ln(4-x)} = e$$

$$x > e$$

$$\frac{\ln x}{x} = \frac{\ln y}{y}$$

$$\ln x^y = \ln y^x$$

$$\ln x^y / y^x = 1$$

$$x^y = y^x$$

$$x^{4-x} = (4-x)^x$$

$$\frac{1}{2}x = 1/2(4-x)$$

$$\ln x \ln(4-x)$$

$$4-e > x > e \quad 4-x > e$$

$$x > e$$

$$4-x > e$$

$$x < e$$

$$4-x < e$$

$$x < e$$

$$4-e < x$$

$$\ln x > 0$$

$$x > e$$

$$x > e$$

$$\ln x > 1$$

$$\ln(4-x) < 1$$

$$4-x < e$$

$$4-e < x$$

$$x > e$$

$$\ln x \ln y = 1$$

$$\ln x \ln(4-x) = 1$$

$$3 \quad [1, 3]$$

$$\ln 3 \ln 1$$

$$\frac{\ln x}{x}$$

$$\frac{\ln(4-x)}{x} - \frac{\ln x}{4-x} = 0$$

$$(4-x) \ln(4-x) = x \ln x$$

$$x \ln x$$

$$[1, 3]$$

$$x=2$$

$$-2a(a+2b) = b(2a-7a)$$

$$1 < x > 1$$

$$-2a^2 - 4ab = b(2a - 7a)$$

$$b^2 + 2a^2 - 3ab = 0$$

$$-2 \ln x \cdot \ln(x^2) =$$

$$(x^2)^{\ln x} = y \quad \ln(y/x^2)$$

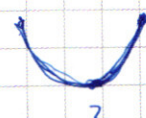
$$x^{\ln y} = y \quad \ln x = a$$

$$\frac{(4-x) \ln(4-x) - x \ln x}{x(4-x)} = 0$$

$$[1, 2] \quad [1, 3]$$

$$(4-x) \ln(4-x)$$

$$3 \ln 3 - 2 = \ln 1$$



$$\ln y - 2 \ln x$$

$$\ln(y/x^2) \ln y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 129 = 9 \cdot 3 \cdot 43$$

$$9 \cdot 3 \cdot$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot [7 \cdot 7 \cdot 7]$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 26 \\ \underline{27} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{7} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 1 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 4x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \sin (2x + \frac{\pi}{4})$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) / (\sin 7x - \sin (2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ \sin 7x = \sin (2x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \quad \text{or} \quad 2 \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$\begin{array}{r} \times 21 \\ 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 441 \\ 21 \\ \hline 441 \\ 282 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$$

$$\begin{array}{r} \times 42 \\ 4 \\ \hline 168 \end{array} \quad 10 \quad 1680$$

$$\frac{1+4n}{3}$$

$$\frac{1+8n}{20}$$

$$\frac{3+8k}{36}$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7$$

$$\binom{3}{0} \cdot \binom{3}{3} + \binom{3}{1} \cdot \binom{3}{2} \cdot \binom{3}{1}$$

$$\begin{array}{c} 5 \\ \textcircled{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \textcircled{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} 3 \\ \textcircled{3} \end{array} \quad \begin{array}{c} 1 \\ \textcircled{1} \end{array}$$

$$\binom{3}{0} \binom{3}{3} (\binom{1}{0} + 1) =$$

$$\Rightarrow \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{7!}{3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2$$

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$e^{-2} e^{-2} y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$$

$$y^{-4\ln x} = e^3 \cdot y^{-7\ln x} / y^{7\ln x}$$

$$y^{3\ln x} = e^3$$

$$y^{\ln x} = e \quad y = e^{\ln y}$$

$$\ln y \ln x = 1 \sim \ln e$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

$$y(y-x) - 2x(x-y) = 0$$

$$4(2x-y)$$

$$-x(2x-y) - 2xy + y^2$$

$$x = e$$

$$\ln 2$$

$$\ln 2x \ln x = 1$$

$$\ln x \ln(u-x) = 1$$

$$\ln x \ln(u-x) = 1$$

$$\ln(x) = \frac{1}{\ln(u-x)}$$

$$\ln x = \frac{1}{\ln(u-x)}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

$$y(y-2x) + x(y-2x) + 4(2x-y) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y + x = 4 \end{cases}$$

$$y = 4 - x \quad \begin{cases} \ln(u-x) \ln(x) = 1 \\ \ln 2x \ln x = 1 \end{cases}$$

$$(\ln 2 + \ln x)(\ln x) = 1$$

$$t^2 + \ln 2 + -1 = 0$$

$$D = \ln^2 2 + 4$$

$$\frac{2x}{x} = \frac{\ln 2x}{\ln x}$$

$$\ln x \ln y = 1$$

$$\ln x \ln 2x = 1$$

$$\ln x \ln 2x = 1$$

$$\ln \ln x + \ln \ln 2x = 0$$

$$\ln x \ln(u-x) = 1$$

$$\ln(u-x) = 0$$

$$4-x = 1$$

$$\ln x \ln 2x = 1$$

$$\ln x = \frac{1}{\ln(u-x)}$$

$$e^{\ln x} = e^{\frac{1}{\ln(u-x)}}$$

$$\ln x \ln(u-x) = 1$$

$$x^{\ln(u-x)} = e = x^{\ln x}$$

$$\ln(u-x) = \ln x$$

$$x = e$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln(x) \ln(4-x) = 1 \quad [1; 3]$$

$$-\frac{\ln(x)}{4-x} + \frac{\ln(4-x)}{x} = \frac{(4-x)\ln(4-x) - x\ln x}{(4-x)x}$$

$$\ln(2)\ln(2) = 0$$

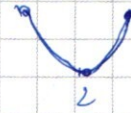
$$\ln(e) \ln(4-e)$$

$$1 \ln(4-e) > 1$$

$$\ln x \ln(4-x) = 1$$

$$x^{\ln(4-x)} = e = x^{\ln e} \Rightarrow x = e^{\frac{1}{\ln(4-x)}}$$

$$\ln(4-x) = 0 \Rightarrow 4-x = 1 \Rightarrow x = 3$$

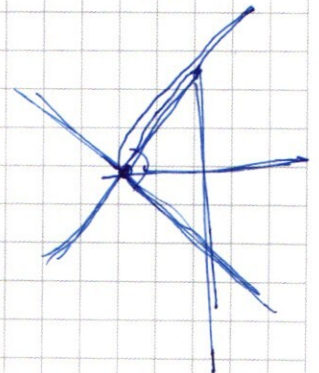
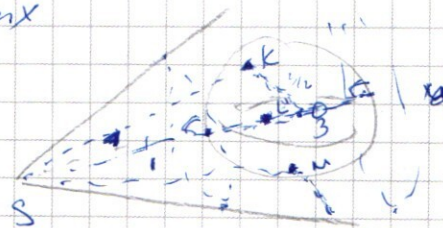
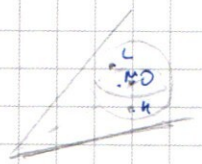
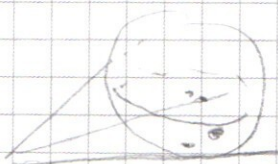


$$\frac{\ln(x+y+5)}{5} + \frac{\ln(x+y+5)}{10-x+y+5} = 10$$

$$\ln(y/x^2) = \ln y - 2\ln x$$

$$y^{\ln y - 2\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-2\ln x}$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$



$$\frac{\frac{3}{2} + 1}{\frac{3}{2}} = \frac{3 + 2}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5} = \frac{x}{1.5}$$

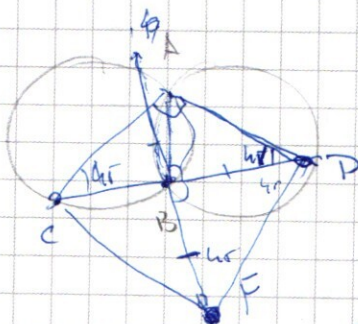
$$x = \frac{15 \cdot 3}{10 \cdot 5} = \frac{3 \cdot 3}{10} = \frac{9}{10}$$

$$100 + 140 + 140$$

$$0 = 22 - x + 2x$$

$$1 - 3 = 2x$$

$$1.5 - 0.9 = 2.5 - 0.9 = 1.6$$



$$\frac{+289}{225} = \frac{17}{15}$$

$$2x = 4$$

$$x - 4 = 6$$

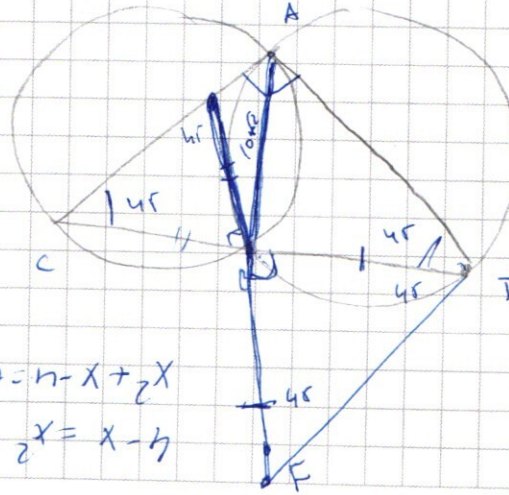
$$\frac{x}{\sin x} = 22$$

$$\sin x = 20$$

$$x = 105^\circ$$

$$0 = n - x + 2x$$

$$2x = x - 4$$



$$x - 2\ln x$$

$$y - \ln x = 5$$

$$\ln y - \ln x$$

$$N(5; -10)$$

$$C(2; 5)$$

$$\ln 5 + \ln 11 + \ln 11$$

$$x^2 - 2\ln x - y - \ln y - 7\ln x = y$$

$$\ln x \ln(u-t) = 1$$

$$\ln(u-x) = \frac{1}{t}$$

$$\ln x = t \quad u-x = e^{\frac{1}{t}}$$

$$\ln x \ln(u-x)$$

$$(x+y-u)$$

$$(y+x-u)(x-y)$$

x

$$x^2 + y^2 + 12x + 22y = 25$$

$$\ln x = t \quad e^t = x$$

$$\ln(u-x) = \frac{1}{t} \quad u-x = e^{\frac{1}{t}}$$

$$t > 0$$

$$t + \frac{1}{t} > 2$$

$$t < 0$$

$$e^t + e^{\frac{1}{t}} = 4 \quad e^t + e^{\frac{1}{t}} > 2 \quad e^t + e^{\frac{1}{t}} > 2 \quad e^t = 2e$$

$$t + e = 4$$

$$x^2 + y^2 + 12x + 22y = 25$$

$$SP + P_1P = 4$$

$$SP_1$$

$$e^{\frac{1}{t}} + e^t = 4$$

$$e^{\frac{1}{t}} + e^t > 2 \quad e^{\frac{1}{t}} = 2e$$

$$t < 0$$

$$3 - 20$$

$$e^{\frac{1}{t}} + e^t = 4$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$\frac{FD}{CD} = \frac{BD}{AD} \quad \frac{FD}{BD} = \frac{CD}{AD}$$

$$SP$$

$$SP$$

$$e^x + e^{-x} = 4$$

$$x^2 + e^x = 4$$

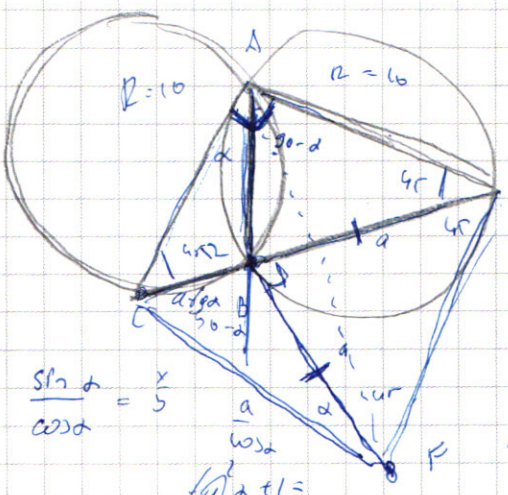
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$x^2 + e^x = 4$$

$$x^2 + e^x = 4$$

$$x^2 + e^x = 4$$

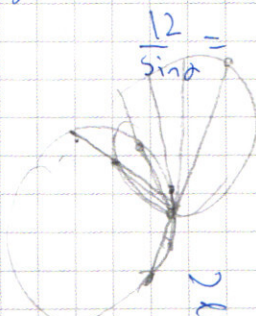
$$x^2 + e^x = 4$$



$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$\frac{a}{\cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$



$$a + g \alpha = 12$$

$$\sin \alpha \cdot 20 = 12$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$90 - \alpha + 45 = 135 - \alpha$$

$$\cos(135) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x \approx 7.5 \quad y \approx 2.5$$

$$225 = 12^2 - 30 + 1$$

$$\frac{1}{3} SP_1$$

$$SP_1 + P_1P = 4$$

$$20 > SP_1 - P_1P = \frac{1}{3} SP_1$$