

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x \right) - \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 5x \right) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$\cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x$$

$$\sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos 4x - \cos \left( 9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = -2 \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left( -\frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\sin \left( 5x - \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left( \frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right)$$

$$\left[ 5x - \frac{\pi}{4} = 2t \right.$$

$$\sin 2t = 2 \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \sin t$$

$$2 \sin t \cos t - 2 \sin t \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\sin t \left( \cos t - \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \right) = 0;$$

Обратная замена:

$$\sin \left( \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \quad (1)$$

$$\sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \sin \left( \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \quad (2)$$

$$(1) \quad \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad (2) \quad \sin \left( \frac{\pi}{2} - \frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} + \frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\sin \left( \frac{3\pi}{8} - \frac{3}{2}x \right) \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin \left( \frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8} \right) \cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\frac{9}{2}x - \frac{3\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9}{2}x = \frac{3\pi}{8} + \pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi m$$

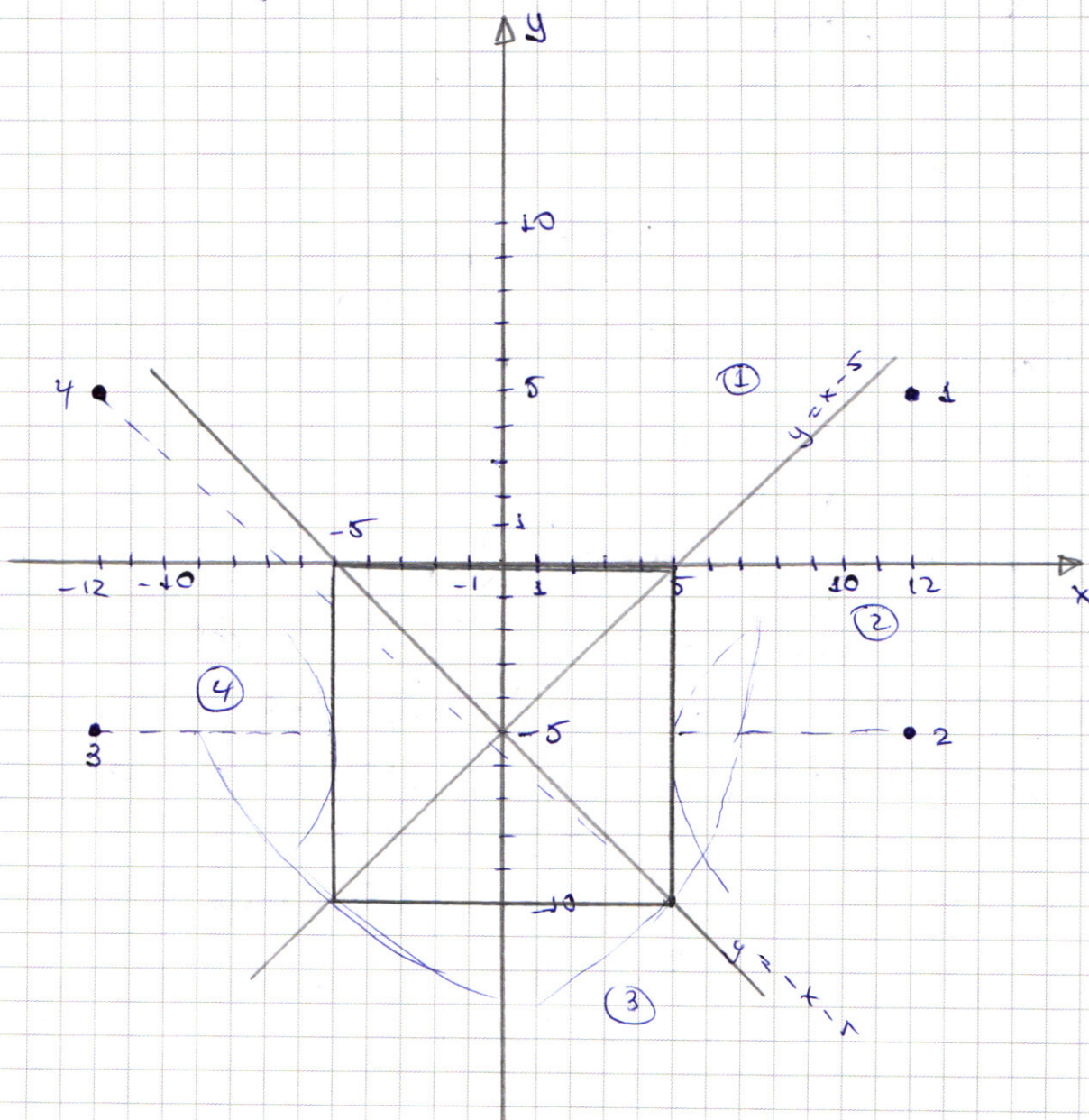
№2 (продолжение)

$$(2) \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ответ:  $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$   
 $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9}k, k \in \mathbb{Z}$   
 $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) прямые  $y = -x - 5$  и  $y = x - 5$  разбивают координатную плоскость на 4 области. Рассмотрим каждую из них в отдельности:

$$1) x + y + 5 + y - x + 5 = 10 \quad | \Rightarrow y = 0$$

$$2) x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$x = 5$$

$$3) -x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y = 20 \quad | \Rightarrow y = -10$$

$$4) -x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$x = -5$$

Получили: (1) — квадрат,  $(0; -5)$  — м. пересечения диагоналей, сторона 10;

(2) Рассмотрим  $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = a$  (\*) — окружность, центр  $(12, 5)$ ,  $R = \sqrt{a}$

Рассмотрим  $(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 0$  — 4 окружности, симм. относительно (\*) отн. осей;

их центры соответственно:  $(12, 5)$ ;  $(12, -5)$ ;  $(-12, 5)$ ;  $(-12, -5)$   
окр. 1 окр. 2 окр. 3 окр. 4

1.  $a > 0$ , тогда ок-сти 7;

2.  $a = R^2 = 49$ : окр. 3 и 2 касаются квадрата;  $(4, 4)$  не касаются, м.к. мин радиус касания:  $\sqrt{74}$

При  $a = 7$  — 2 рееш.

3. При  $a \in (49; 74]$  ок-сти 3 и 2 будут давать 4 корня — не удов. усл.

4. Рассмотрим случай, когда окр. 4 перес.  $M(5; -10)$ , а окр. 1 —  $N(-5; -10)$

м.о.  $a = 514$ ; очевидно, что при  $a = 514$  4 и 1

пересекаются попарно эти плоскости;  
 м.о. при  $a = 514$  - 2 решения.  
 (притом при  $a \in (74; 514)$  окр 1 и 4 дают 4 реш).

ответ: ~~49; 514~~ 49; 514

N1)

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Цифр 1-цифра, не великобуква на произведении;  
 м.о. необходимо 3 цифры и 3 цифры по  
 восьми местам всевозможными сло-  
 жами (оставляю 2 места цифрам 1)

расположить 3 цифры и 3 цифры по  
 6 местам:  $2^6$  способов

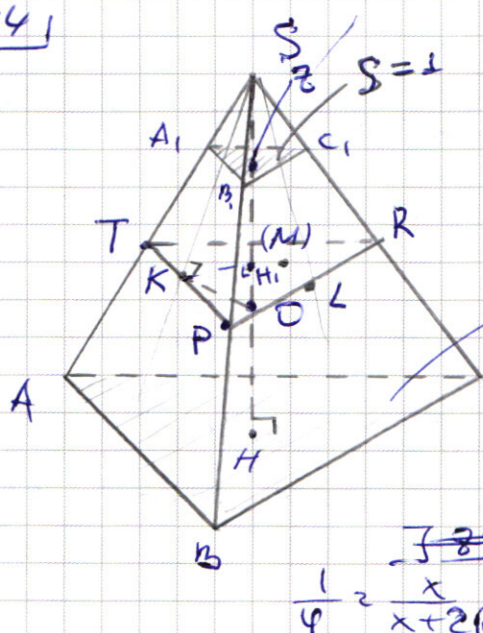
расположить ~~цифры~~ 6 цифр по 8 местам:

$$C_8^6 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28 \text{ способов}$$

итого:  $64 \cdot 28 = 1792$

ответ: 1792.

N4)



д) Для определенности отметим  
 точки (по рисунку)

$$I \in KSO = \varphi$$

3 сферы касаются  $(A, B, C)$  в  $T, Z$ ;  
 сфера кас  $(ABC)$  в  $M$ ;

$S=16$  т.о.  $SH \perp (A, B, C)$ ,  $SH \perp (ABC)$   
 (по усл)

$$\frac{SA_1B_1C_1}{S_{ABC}} = \frac{3^2}{SH^2}$$

$$\overline{IOZ} = \overline{OR}, \quad IOZ = OH = R, \quad 2S = x$$

$$\frac{1}{4} = \frac{x}{x+2R}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

14 (продолжение)

$$4x = x + 2R$$

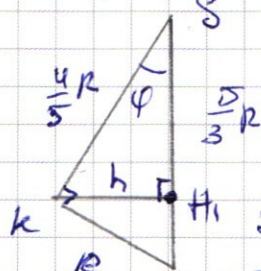
$$3x = 2R$$

$$x = \frac{2}{3}R \quad \Rightarrow OS = R + \frac{2}{3}R = \frac{5}{3}R$$

$$OK = R \text{ (н.к. } K - \text{ н.касательная)}$$

Получим:

в н/у  $\triangle KOS$ :



$$\sin \varphi = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

$$\text{н.о. } \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

2) очевидно, сечение (KLM)  $\perp SH$

Для определенности отметим точками пересечения сечения с ребрами тетраэдрового угла;

Получим:  $\triangle TPR$  с вписанной в него окружностью

$r = h$  — высоте н/у  $\triangle SKO$

по  $\odot$  Пифагора в  $\triangle SKO$ :  $SK = \sqrt{\frac{25}{9}R^2 - R^2} = \frac{4}{5}R$

тогда:  $\cos \varphi = \frac{SH_1}{SK} \Rightarrow SH_1 = \frac{4}{5} \cdot \frac{4}{5}R = \frac{16}{25}R$

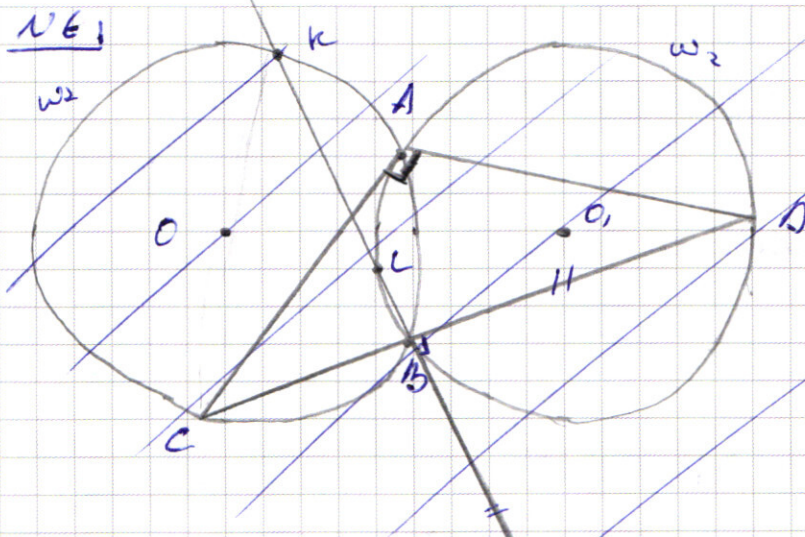
н.н.  $SH_1 \perp (TPR)$ :  $\left(\frac{SK}{SH_1}\right)^2 = \frac{S_{\triangle KLC}}{S_{TPR}}$

$$\left(\frac{\frac{2}{3}R}{\frac{16}{25}R}\right)^2 = \frac{1}{S_{TPR}} \Rightarrow \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{25}{16}\right)^2 = \left(\frac{25}{24}\right)^2$$

$$S_{TPR} = \frac{576}{625}$$

Ответ:  $\frac{576}{625}$

№ 6



$FB \cap \omega_1 = K$   
м.о.  $CK$  - диаметр  $OK \perp CK$   
( $\angle KBC = 90^\circ$  и т.д.)

Аналогично,  $AL$  - диаметр  $OL \perp AL$   
т.е.  $BF \cap \omega_2 = L$

№ 3

Пользуясь формулой:

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} \quad (1)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad y^2 - x^2 - xy - x^2 + 4(2x - y) = 0$$

$$(y-x)(x+y) - x(y+x) + 4(2x-y) = 0$$

$$(y+x)(y-x-x) - 4(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0;$$

$$\text{ОДЗ: } x > 0 \\ y > 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -x + 4 \end{cases}$$

$$(1) \quad \frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{x^{7\ln y}}$$

$$x^{7\ln y - 2\ln x} = y^{\ln y + 4\ln x}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad y = 2x \\ x^{7\ln 2x - 2\ln x} &= (2x)^{\ln 2x + 4\ln x} \\ x^{\ln \frac{128x^7}{x^2}} &= (2x)^{\ln 2x \cdot x^4} \\ x^{\ln 128x^5} &= (2x)^{\ln 2x^5} \\ &= (2x)^{\ln 2x^5} \end{aligned}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3 (продолжение)

$$x \ln(128x^5) - \ln(2x^5) = 2 \ln 2x^5$$

$$x \ln 2^6 = 2 \ln 2x^5$$

$$x \ln 2^6 = 2 \ln 2x^5$$

$$2 \ln 2x^5 = 2 \ln 2x$$

$$6 \ln x = \ln 2x$$

$$x^6 = 2x$$

$$x(x^5 - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[5]{2} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ y = 2\sqrt[5]{2} \end{cases}$$

2)  $y = -x + 4$

$$x \ln(4-x) - 2 \ln x = (4-x) \ln(4-x) + 4 \ln x$$

Заменяем, т.е.

$$f(x) = x \ln(4-x) - 2 \ln x$$

монотонно возрастает на  $D(f)$ ,

$$g(x) = (4-x) \ln(4-x) + 4 \ln x$$

монотонно убывает на  $D(g)$ , т.е. если ур-е  $f(x) = g(x)$  имеет корень, то он единственный.

Очевидно,  $x = 2$ ; Проверка,

$$x \ln(4-x) - 2 \ln x = (4-x) \ln(4-x) + 4 \ln x$$

$$2 \ln 2 - 2 \ln 2 = 2 \ln 2 + 4 \ln 2$$

$$2 \ln 2 = 2 \ln 2 \quad - \text{верно}$$

$$x = 2 \Rightarrow y = 2$$

Ответ:  $(0; 0); (\sqrt[5]{2}; 2\sqrt[5]{2}); (2; 2)$ .



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

срз:  $x, y \geq 0$

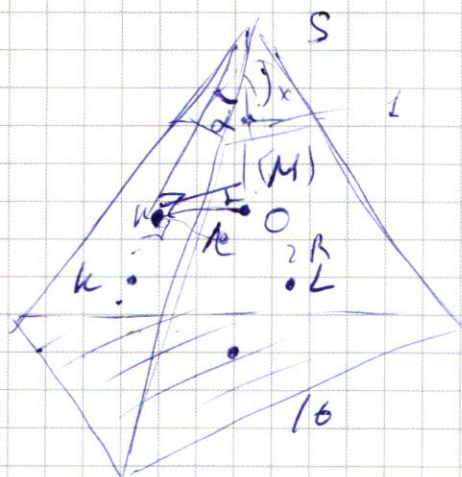
$$-\ln x \leq \ln x^{-1} = \frac{\log x}{\log x e}$$

$$(2) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0;$$

$$y^2 - y(x+4) - 2(x^2-4) = 0;$$

$$x^2 + 8x + 16 = 8x^2 +$$

$$x^2 + 8x + 16 + 8(x^2 - 4) = 9x^2 + 8x - 16$$



$$KSO \angle KSO = ?$$

$$\frac{x}{x+24} = \frac{1}{4}$$

$$4x = x + 24$$

$$3x = 24$$

$$x = 8$$

$$\frac{3}{2/1}$$

$$\sin \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3}{2} + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{2}} = \frac{4}{15}$$

$$r = \frac{S}{p}$$

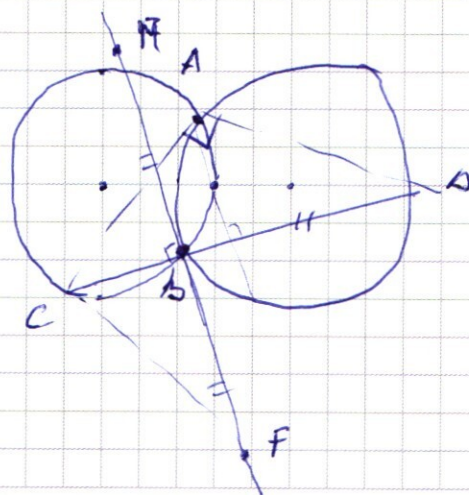
|      |
|------|
| 21   |
| x 25 |
| 25   |
| 125  |
| 50   |
| 625  |

|      |
|------|
| 20   |
| x 20 |
| 20   |
| 106  |
| 48   |
| 576  |

$$CB \cdot (CB + AC) = KA \cdot CA$$

$$CB \cdot (CB + AC) = KA \cdot CA$$

$$AC = KA$$



$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)^{7 \ln y}} = \frac{1}{x^{14 \ln y} y^{28 \ln y}} = \frac{y^{\ln y}}{x^{14 \ln y}}$$

$$\frac{x^{4 \ln x + \ln y}}{x^{14 \ln y - 2 \ln x}} = y^{4 \ln x + \ln y}$$

$$(2) y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-x)(y+x) - xy - x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-x)(y+x) - x(y+x) + 4(x-2y) = 0$$

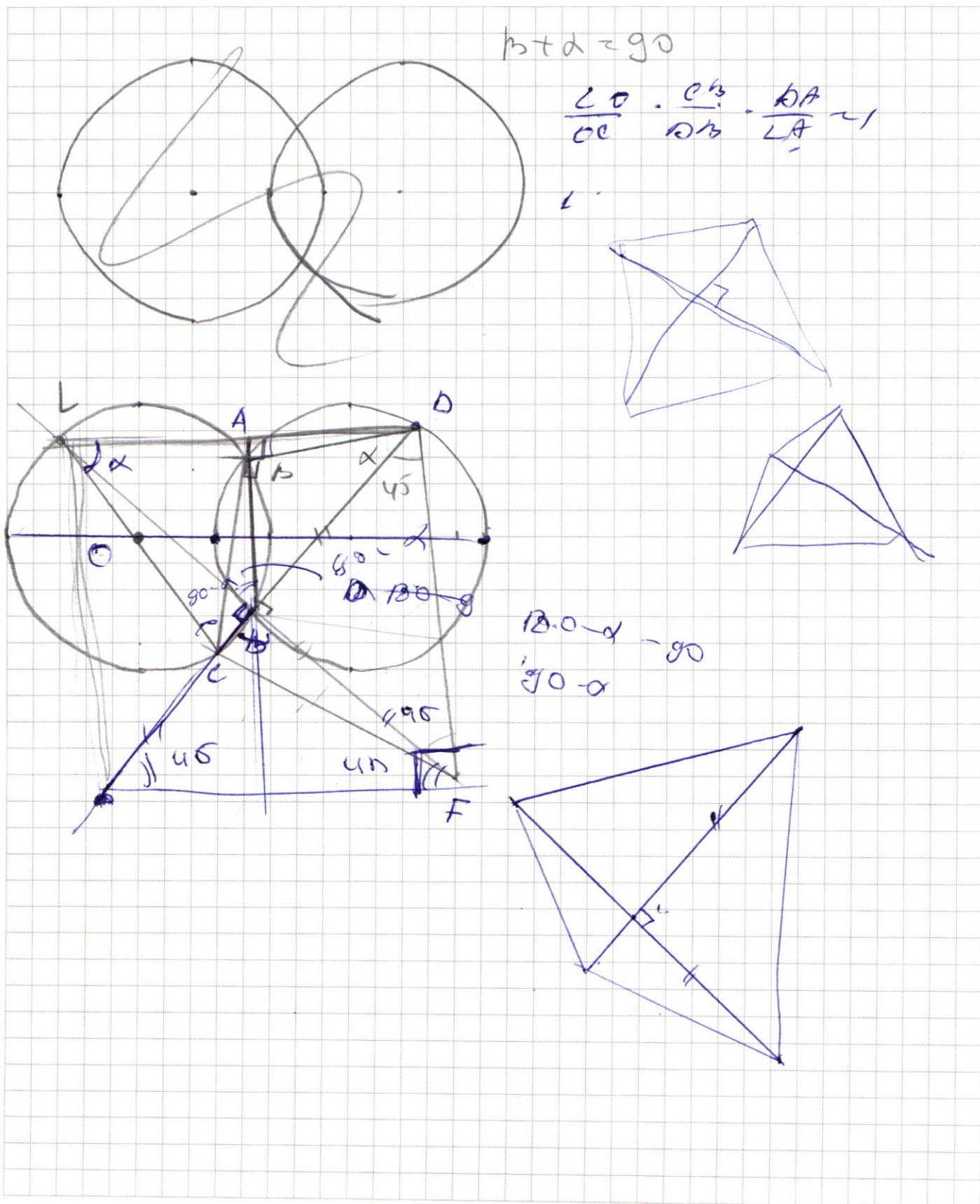
$$(y-x)(y-x-x) + 4(x-2y) = 0;$$

$$(x+y)(y-2x) + 4(x-2y) = 0;$$

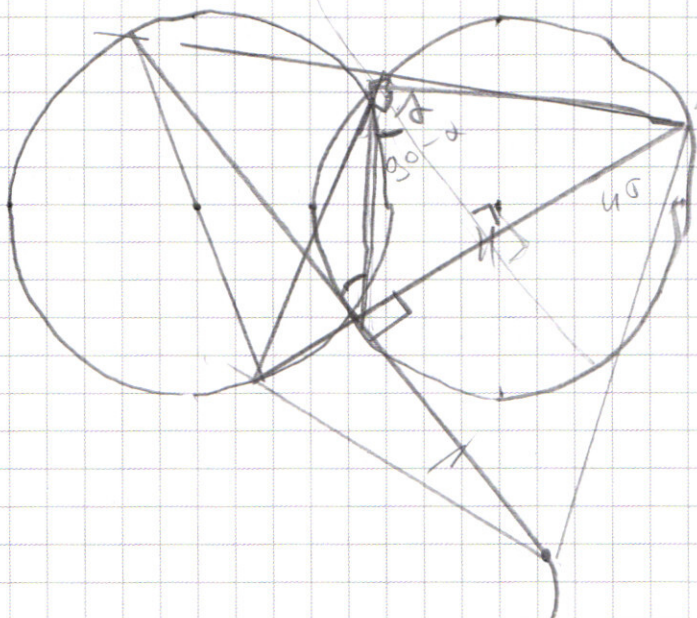
$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0;$$

$$(y-x)(x+y) - x(y+x) + 4(x-2y)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



- 400  
 144  
 266  
 566  
 256



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x)$$

$$\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\begin{aligned} y &= -x - \frac{\pi}{4} \\ y &= x - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\sqrt{2} (\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 9x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 9x) + \sqrt{2} (\sin 5x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - (\cos 5x \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 5x \frac{\sqrt{2}}{2}) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin x - \sin y &= 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} \\ \sin x & \quad \sin \end{aligned}$$

$$\sin(9x + \frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{4} - 5x) = 0 \quad \cos 4x$$

$$\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$$

$$2 \sin \frac{14x}{2} \cos \frac{\pi + 4x}{2} = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos(\frac{\pi}{4} + 2x) = \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$-2 \sin(\frac{14x}{2}) \sin \frac{4x - \frac{\pi}{2}}{2} = \cos 4x$$

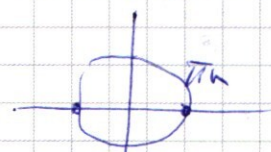
$$-2 \sin 7x \sin(2x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) + \sin(5x - \frac{\pi}{4}) = \cos 4x$$

$$\cos 4x - \cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \sin(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 4x - 2 \sin(\frac{14x - 9x + \frac{\pi}{4}}{2}) \sin(\frac{13x - \frac{\pi}{4}}{2})$$

$$-2 \sin 2.5x$$



$$\begin{aligned} \frac{2}{3} (\frac{3\pi}{4} + \pi k) &= \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{3}{8} < \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \cos(t) &= \cos(\frac{\pi}{2} - (t + \frac{\pi}{2})) = \\ &= \cos t = \cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{2} - t)) = \end{aligned}$$

$$= \sin(\frac{\pi}{2} - t)$$

$$\cos t = \sin(\frac{\pi}{2} - t)$$

$$\cos t = \cos(5x - \frac{\pi}{4})$$

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} - 5x \frac{\pi}{4} &= \frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}x + \\ &+ \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

$$\sqrt{49+25} = \sqrt{65+9} = \sqrt{74}$$

$$\sqrt{17^2 + 25}$$

$$\sqrt{17^2 + 25}$$

$$\times 17$$

$$119$$

$$17$$

$$+ 289$$

$$314$$

$$289 + 10^2$$

$$\times 289$$

$$225$$

$$514$$

$$8261 \approx 9 \cdot 1029$$

$$8^3 \cdot 343$$

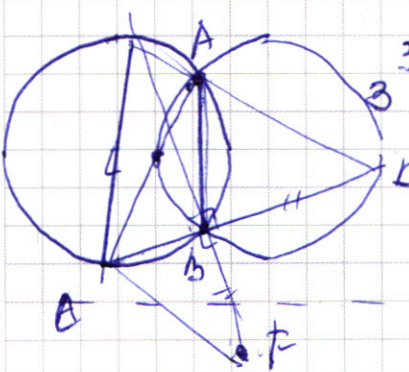
$$8261 = 3087 - 3$$

$$\begin{array}{r} - 8261 \quad | \quad 3 \\ 3087 \\ \hline 26 \\ 26 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 3087 \quad | \quad 3 \\ 1029 \\ \hline 008 \\ - 6 \\ \hline 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 1029 \quad | \quad 3 \\ 343 \\ \hline 12 \\ - 11 \\ \hline 03 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} - 343 \quad | \quad 7 \\ 28 \\ \hline 63 \end{array}$$



$$3 \cdot 3$$

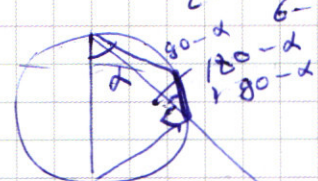
$$3 \cdot 7$$

$$\frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{2}{2} \frac{0}{0} \frac{0}{0}$$

$$A_6$$

$$A_6^2$$

$$A_8$$



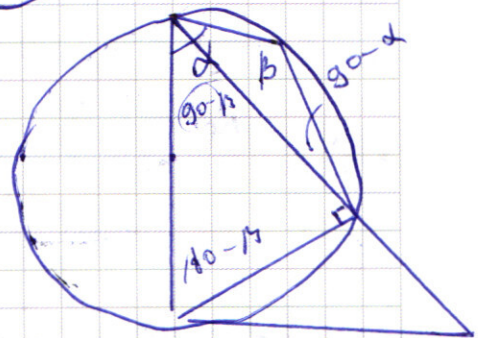
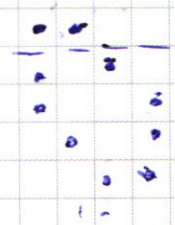
5 способов

2 шт по 4 мет

$$4$$

$$2 \cdot 2$$

$$A$$



$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2} = 12$$

$$\begin{array}{r} 34 \\ \times 256 \\ \hline 1792 \end{array}$$

$$90-180x$$

$$x-90$$

$$\begin{array}{r} \times 64 \\ 28 \end{array}$$

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$$

$$2^8 \cdot 7$$

$$\frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2}$$

$$C_k$$

$$\frac{128 \times 5}{255} = 2 \text{ снаряд}$$

