

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

1. a, b, c, d, e, f, g, h

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261$$

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 6 \text{ множителей.}$$

Зн. ~~также~~ в числе есть также
единицы

2 варианта набора цифр

1) $3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1$

2) $9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1$

варианты расположения в

1 случае: $8!$; во втором тоже $8!$

$$\text{всего чисел } 2 \cdot 8! = 2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= 16 \cdot 7 \cdot 720 = 80640 \text{ различных чисел}$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ 16 \\ \times 7 \\ \hline 112 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 112 \\ \times 720 \\ \hline 2240 \\ 7840 \\ \hline 80640 \end{array}$$

Ответ: 80640 чисел.

№ 2 № 3

$$\begin{array}{r} 9261 \div 3 = 3087 \\ 3087 \div 3 = 1029 \\ 1029 \div 3 = 343 \\ 343 \div 7 = 49 \\ 49 \div 7 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \div 3 = 3087 \\ 3087 \div 3 = 1029 \\ 1029 \div 3 = 343 \\ 343 \div 7 = 49 \\ 49 \div 7 = 7 \\ 7 \div 7 = 1 \end{array}$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

ОДЗ:

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

~~Прологарифмируем 1-е ур-е.~~

$$\begin{cases} x^{(-2\ln x)} \cdot y^{(4\ln x)} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{(-2\ln x)} = y^{\ln \frac{y}{x^2} + 4\ln x} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

Прологарифмируем

но ~~нат.~~ ^{нат.} основанию
1-е ур-е.

$$\ln(x^{-2\ln x}) = \ln(y^{\ln \frac{y}{x^2} + 4\ln x})$$

$$\ln x^{\cancel{-2}}$$

$$-2\ln x \cdot \ln x = \ln y \cdot (\ln \frac{y}{x^2} + 4\ln x)$$

$$-2\ln^2 x = \ln y (\ln y - 2\ln x + 4\ln x)$$

$$-2\ln^2 x = \ln y^2 - 3\ln x \cdot \ln y$$

$$2\ln^2 x - 3 \cdot \ln x \cdot \ln y + \ln y^2 = 0$$

$$(2\ln x - \ln y)(\ln x - \ln y) = 0$$

$$\ln x^2 = \ln y \quad \text{или} \quad \ln x = \ln y$$

$$x^2 = y$$

$$x = y$$

Подставляем во 2-е ур-е

$$\begin{aligned} & \cancel{x^4} - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \quad \text{или} \quad x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \\ & \text{не вх. ОДЗ} \quad (x-2)(x^2 - x - 4) = 0 \\ & \quad \underline{x=2} \quad \text{или} \quad x^2 - x - 4 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \\ & -2x^2 + 4x = 0 \\ & \rightarrow x=0 \quad \text{или} \quad \underline{x=2} \\ & \text{не вх. ОДЗ} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \quad \text{или} \quad x = \frac{1 - \sqrt{17}}{2}$$

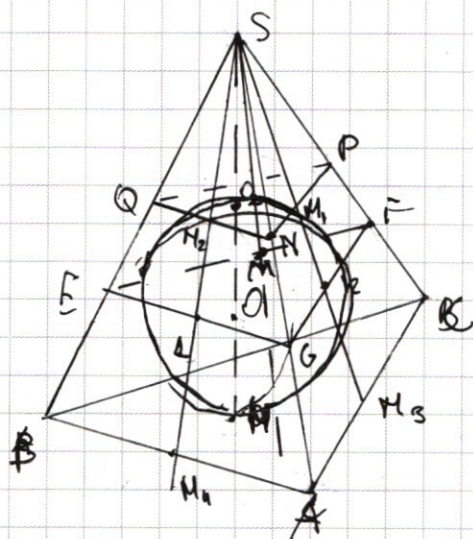
не вх. в ОДЗ

$$x_1 = 2; \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y_1 = 2; \quad y_2 = \frac{(1 + \sqrt{17})^2}{4} = \frac{1 + 17 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$$

Ответ: 1) $x_1 = 2; y_1 = 2$

2) $x_1 = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}; y_2 = \frac{9 + \sqrt{17}}{2}$
✓✓



сечение — $\triangle (QPN) \triangle (BCA)$

$\triangle QPN \sim \triangle BCA$
 $S_{QPN} = 4 = S_1$
 $S_{BCA} = 16 = S_2$

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 16$$

$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 = 16$$

$k = 4$ — коэф. подобия

$$SL = SK = SM$$

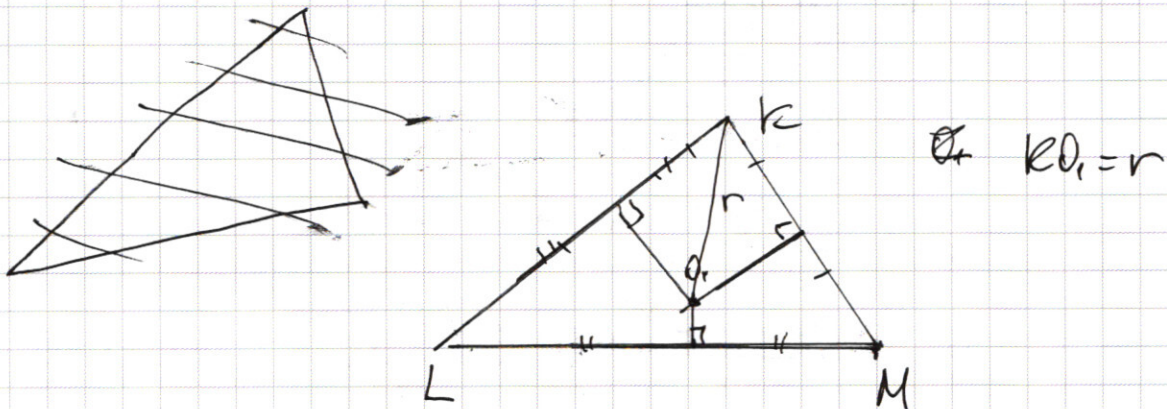
$SLKM$ — трапеция.

сфера O вписана в

тетраэдр $SABC$, где $\angle BAC$ — прямой

т. L, K, M — точки касания
~~плоскости~~ α с ребрами ~~и~~ ~~на~~ тригранника $SABC$
 $SO \cap ABC = H$; $SO \perp ABC$

$\triangle KML$ — $\triangle$ впис в сф. — $mb(O; r)$



$\therefore O \in SO$, т.к.

$\triangle KOS = \triangle MOS = \triangle LOS$ (по 1 призм.)

$$LO = KO = MO = R$$

$$SK = SM = SL$$

$$\angle SMO = \angle SKO = \angle SLO = 90^\circ$$

$$\text{з.м. } \angle SOK = \angle SOM = \angle SOL \Rightarrow$$

$$\triangle KO, O = \triangle MO, O = \triangle LO, O \Rightarrow$$

$$O_1 \in SO$$

по 3 призм.

$$\text{з.м. } SO \cap KLM = O_1$$

$$SO \perp KLM$$

$\triangle FEG$ — $\checkmark$ $\begin{matrix} \text{искривл} \\ \text{сечение} \end{matrix}$ плоскостью
 (KLM)

$$\triangle FEG \sim \triangle ABC \sim \triangle QPN$$

$$\cos KSO = \frac{1}{R} = \frac{1}{4}$$

$$\sin \angle KOS = \frac{1}{4}; \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{4}; \quad \text{з.м. } \frac{SL}{SO} = \frac{1}{4}; \quad \frac{SM}{SO} = \frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}; a = R^2 - \text{отброс}$$

$$1) \begin{cases} x+y+5 \geq 0; & y \geq -5-x \\ y-x+5 \geq 0 & y \geq x-5 \end{cases}$$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$y=0$$

$$-5 < x < 5$$

$$2) \begin{cases} x+y+5 \geq 0; & y \geq -5-x \\ y-x+5 \leq 0; & y \leq x-5 \end{cases}$$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

$$\begin{cases} y \geq -10 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

$$-10 < y < 0$$

$$3) \begin{cases} x+y+5 \leq 0; & y \leq -5-x \\ y-x+5 \geq 0; & y \geq x-5 \end{cases}$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$x=-5$$

$$\begin{cases} y \leq 0 \\ y \geq -10 \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} x+y+5 \leq 0; & y \leq -5-x \\ y-x+5 \leq 0; & y \geq x-5 \end{cases}$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

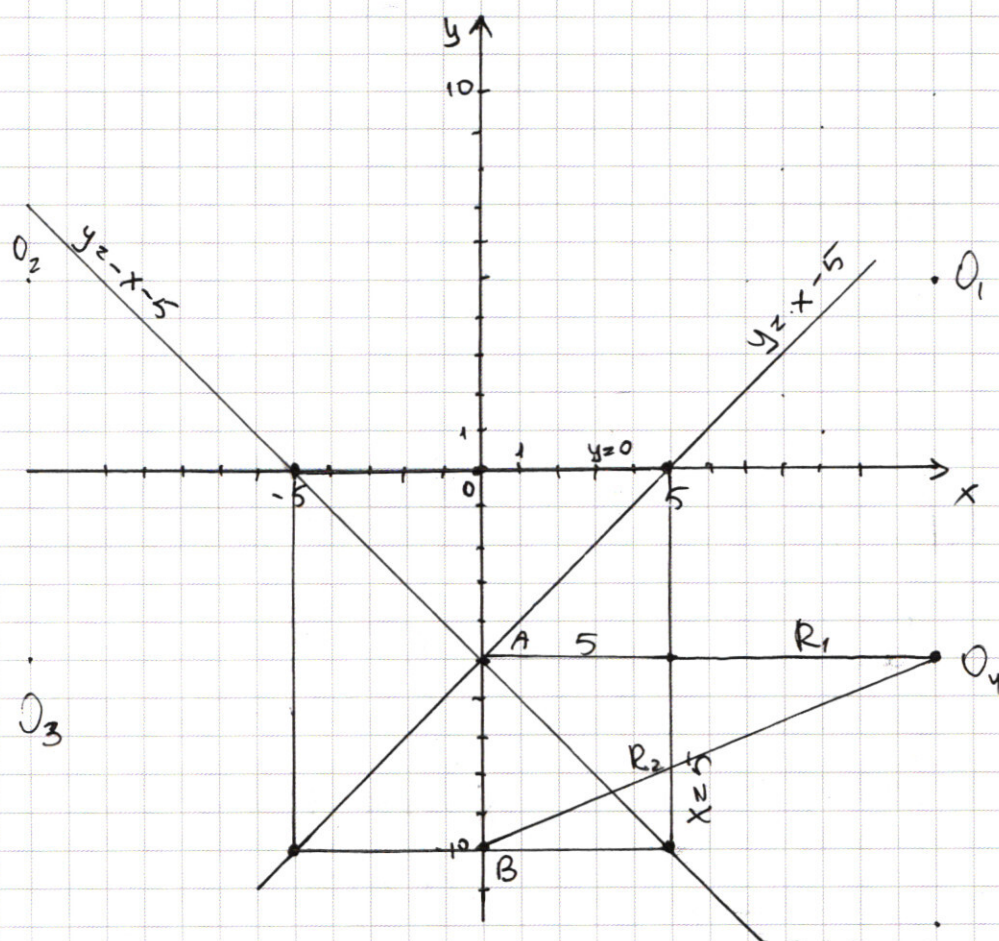
$$-2y=20$$

$$y=-10$$

$$\begin{cases} x < 5 \\ x > -5 \end{cases}$$

$$-5 < x < 5$$

$$\begin{cases} -10 \leq y \leq 0 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$



2 решения тогда, когда 2 т. касания

$$((x-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \text{ — несколько}$$

окружностей (секторов.) с центрами

в точках $O_1(12; 5)$; $O_2(-12; 5)$

$O_3(-12; -5)$; $O_4(12; -5)$

и с $R = \sqrt{a}$

$$R_1 = 7.$$

$$a = 49;$$

$$R_2 = \sqrt{AB^2 + O_4A^2}$$

$$R_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13; a = 169.$$

Ответ: $a = 49, a = 169$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 6

Дано: $R = 10 = R_1 = R_2$
 $BF = BD$; $BF \perp CD$
 Найти: $\angle C$

$\angle CAD = 90^\circ$

Найти: а) $\angle C$ - ?
 б) $BC = 12$; S_{ACF} - ?

Решение.

т.к. $B \in CD$, то
 CB и BD - равные хорды

а) $BA \perp O_1O_2$; $BA \cap O_1O_2 = K$

т.к. $O_1K = O_2K$.

з.м. $\triangle AO_1K = \triangle AO_2K$ по 3 признакам.

т.к. $B \in CD$, то: $CA = AD$, а $\angle ACB = \angle ADB$ (они равны, так как $AB \perp CD$ и AB - хорда в равн. окр.).

з.м. $\angle AO_1C = \angle AO_2D \Leftrightarrow$
 $\Rightarrow \angle ADO_2 = \angle ACO_1$

$\triangle ABC$ и $\triangle ABD$ - вписанные

$\angle CAB = \angle CBO_2$
 $\angle CBA = \angle BO_2C$

$\angle BO_2C + \angle BO_1C = 90^\circ$

$\angle BO_2C + \angle BO_1C = \angle ACP$
 $\angle ACB = 45^\circ$

$$\cancel{BD} = \cancel{BF} = \cancel{BD}$$

$$\cancel{\angle BO_2 D = 90^\circ = \angle BO_1 C}$$

$$\cancel{BD = R \cdot \sqrt{2}}$$

$$\cancel{BF = BD = CB}$$

$$CF = \sqrt{BC^2 + BD^2} = 2R = 20.$$

$$CD = 2R = 20$$

$$CF^2 = BF^2 + CB^2 = (BD^2 + CB^2 - 2BD \cdot CB) - 2BD \cdot CB =$$

$$= (20 - CB)^2 + CB^2 =$$

$$= 20^2 - 2BD \cdot CB = 400 - 2(20 - CB)CB =$$

$$= 400 - 40CB + CB^2$$

$$CF = \sqrt{400 - 40CB + CB^2}$$

$$8) \quad BC = 12$$

$$CF = \sqrt{400 + 144 - 480} =$$

$$\begin{array}{r} 40 \\ \times 4 \\ \hline 160 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ \times 4 \\ \hline 48 \end{array}$$

$$= 8.$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 = 48$$

$$\text{Ответ: } a) \quad CF = \sqrt{400 - 40BC + CB^2}$$

$$8) \quad 48.$$

$$N \neq$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 4)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq \cancel{2^{34}} 2^{34} (2^{x-34} + 3) \\ y < 2^2 (2^4 + 3) + \\ + 2(2^{32} - 4)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$1 \rightarrow \cos \cdot \sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

$$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \sin 45^\circ$$

№ 3

$$\int (x^2 y^4) \ln x = y \ln(y x^2) \quad x^2 2 \ln x = \frac{y \ln \frac{y}{x^2}}{y - 4 \ln x}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - xy + 0,25x^2 - 2,25x^2 + 8x$$

$$0,25y^2 - xy + x^2 - 3x^2 + 8x$$

$$y^2 - xy + 0,25x^2 - 2,25x^2 + 8x + \left(\frac{4}{1,5}\right)^2 - \left(\frac{4}{1,5}\right)^2 - 4y = 0$$

$$(y - 0,5x)^2 - \left(1,5x + \frac{4}{1,5}\right)^2 - \frac{16}{2,25} - 4y = 0$$

$$X^{-2 \ln x} y^{\ln \frac{y}{x^2} + 4 \ln x}$$

$$y^2 - 4y - xy = 2x^2 + 8x$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 - xy = 2x^2 - 8x$$

$$(y-2)^2 - 4 - xy = 2x^2 - 8x$$

$$(y-2)^2 = 2x^2 - 8x + xy + 4 = x(2x - 8 + y) + 4$$

$$\frac{(y-2)^2}{x} = 2x - 8 + y; \quad y =$$

$$\frac{y-4}{x} - \frac{2x+8}{y} = 1$$

$$\frac{y \ln \frac{y}{x^2}}{y - 4 \ln x} = \frac{y \ln \frac{y}{x^2} + \ln x - y}{y - 4 \ln x}$$

$$2 \ln x = \ln \frac{1}{x^2} + \ln x - y$$

$$6 = 2 \ln x + \ln \frac{1}{x^2}$$

$$6 = \ln x^2 + \ln \frac{1}{x^2}$$

$$6 = \ln \frac{1}{x^4}$$

$$6 = -4 \ln x$$

$$\ln x = -1,5$$

$$\ln \frac{1}{x^6} = \ln \frac{1}{x^6}$$

$$x = \frac{1}{e^{1,5}}, \quad y = \frac{1}{e^{1,5}}$$

$$\frac{(y-2)^2}{x} = 2x - 8 + y$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \quad | : y^2 ; \quad 1 - \frac{x}{y} - 2 \frac{x^2}{y^2} + 8 \frac{x}{y^2} - 4 \frac{1}{y} = 0$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + xy - 3x^2 = 0$$

$$1 - \frac{x+4}{y} - \frac{2x^2+8x}{y^2} = 0$$

~~2y~~
~~2y^2~~

$$1 = \frac{x+4}{y} + \frac{2x^2+8x}{y^2}$$

~~4y~~

$$\frac{y-4}{x} - \frac{2x-8}{y} = \frac{x+4}{y} + \frac{2x^2-8x}{y^2}$$

$$(y-4y+4) - 2(x^2-4x+4) + 4 - xy = 0$$

$$\frac{y-4}{x} = \frac{3x-4}{y} + \frac{2x^2-8x}{y^2}$$

$$y^2 - 4y + 4 - 2(x^2 - 4x + 4) + 4 - xy = 0$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 = xy$$

$$2 - (y-2)(x-2) \cdot \sqrt{2} - 2(xy - 2x - 2y + 4) \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}xy - 4\sqrt{2}x - 4\sqrt{2}y + 8\sqrt{2}$$

$$(y-2-\sqrt{2}x+2\sqrt{2})(y-2+\sqrt{2}x-2\sqrt{2}) = xy$$

$$x = y-2-\sqrt{2}x+2\sqrt{2} ; \quad y = y-2+\sqrt{2}x-2\sqrt{2}$$

$$x(1+\sqrt{2}) = y-2+2\sqrt{2}$$

$$x = \frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = \frac{4+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 2+\sqrt{2}$$

$$(2+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = y+2\sqrt{2}-2$$

$$2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2 = y+2\sqrt{2}-2$$

$$y = 6 + \sqrt{2}$$

$$-2 \ln x \cdot \ln x = (\ln \frac{y}{x^2} + 4 \ln x) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln \frac{y}{x^2} \cdot \ln y + 4 \ln x \cdot \ln y = (\ln y - \ln x^2) \ln y + 4 \ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \cdot \ln y + 4 \ln x \cdot \ln y$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0.$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - 2 \ln x) = 0$$

$$\ln y = \ln x$$

$$x = y$$

$$\ln y = \ln x^2$$

$$y = x^2$$

$$1) x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0; \quad -2(x^2 - 2x) = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

$$x \geq 0, \quad x = 2$$

не в ОДЗ

$$y = 2$$

$$2) x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0.$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0,$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} & x^2 - x - 4 \\ x^2 - 6x + 8 & \\ \underline{x^2 - 2x} & -4x + 8 \\ -4x + 8 & \\ \underline{-4x + 8} & 0 \end{array}$$

$$(x - 2)(x^2 - x - 4) = 0$$

$$x = 2$$

$$x^2 - x - 4 = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 16}}{2}$$

$$x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{1 + 17 + 2\sqrt{17}}{4} = \frac{18 + 2\sqrt{17}}{4}$$

$$\sin 60^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ =$$

$$\cos 15^\circ = \sqrt{\frac{\cos 30^\circ + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2}$$

$$\cos^2 x =$$

$$\cos 2x = 1 - 2 \cos^2 x - 1$$

$$\cos x = \sqrt{\frac{\cos 2x + 1}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{\sqrt{3} + 2}}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{3} + 2}{2}}$$

$$\sin 60^\circ + \sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 45^\circ =$$

=

$$\sin 15^\circ$$

$$\cos 30^\circ$$

$$\cos 30^\circ = 1 - 2 \sin^2 15^\circ$$

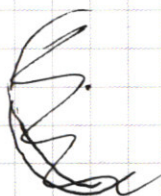
$$\sin 30^\circ = 2 \sin 15^\circ \cos 15^\circ$$

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}}$$

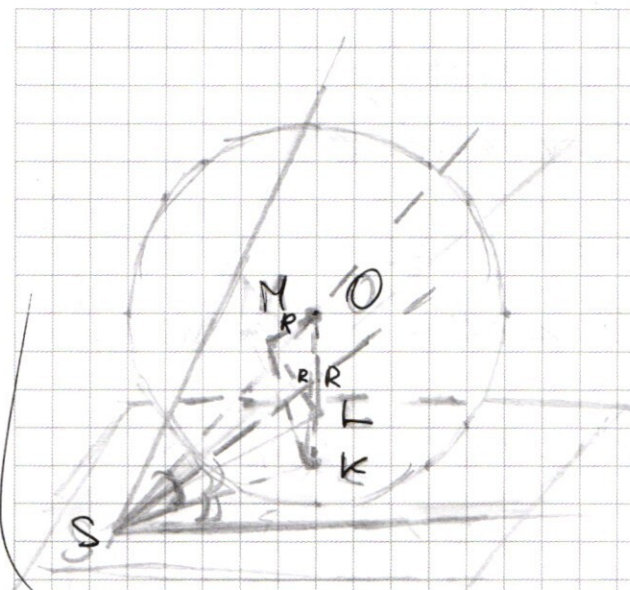
$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

или



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



1/4

сечения —
подобные Δ -ки

$$\frac{S_2}{S_4} = k^2 = \frac{4}{16} = 1/4$$

коэф.
подобия $k = 1/4$

$$SL = SK = SM$$

зн.

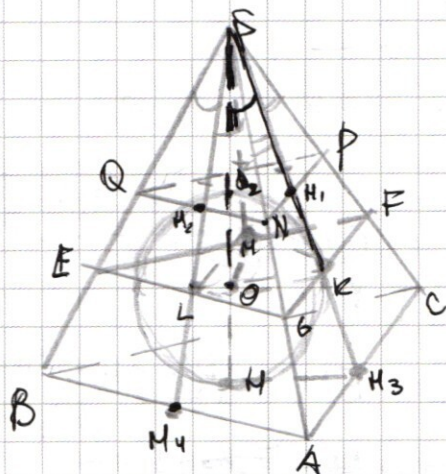
$SLKM$ — ~~не~~ ~~равно~~ ~~угольная~~
трапеция.

~~Арегола~~

~~мн~~

$SABC$ — тетраэдр.

~~ср.~~ $\odot$ сфера $\odot$ ~~вписанная~~
 $\odot$ ~~в~~ ~~не~~



L, K, M, N — касания
граней

$$SO \perp ABC$$

$$SO \perp \Delta ABC = H$$

KML — Δ вписанный
в окр.-ть.



черновик

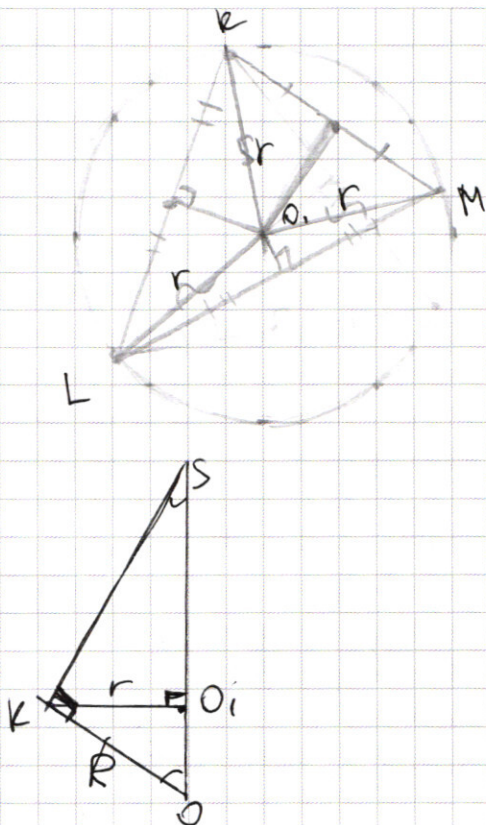


чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$LO_1 = r$$

$$O_1 \in SO, m.k.$$

$$\triangle KO_1O = \triangle MO_1O = \triangle LO_1O$$

$$\triangle KOS = \triangle MOS = \triangle LOS$$

но 1 призм.

$$LO_1 = KO_1 = MO_1 = r$$

$$LO = KO = MO = R$$

$$SK = SM = SL$$

$$\angle SMO = \angle SKO = \angle SLO = 90^\circ$$

$$\text{Зн. } \angle SOK = \angle MOK = \angle LOK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle KO_1O = \triangle MO_1O = \triangle LO_1O$$

но 3 призм.

$$\text{Зн. } SO \cap (KLM) = O_1$$

$$SO \perp (KLM)$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{p_2 r_2}{p_1 r_1}$$

$$\text{Зн. } KLM \subset \triangle ABC$$

$$\triangle FEG \in (KLM)$$

$$\text{Зн. } \triangle FEG \subset \triangle ABC$$

мы знаем $\triangle$ с площ. $S_1 = \frac{1}{2} NPQ$
 m.k. $\triangle NPQ \subset \triangle ABC$ и из плоскости //, то.

$$\frac{PN}{AC} = \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{SP}{SC} = \frac{1}{4}$$

$$S = \frac{1}{2} p \cdot r$$

$$r = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}$$

$$EG \perp LB;$$

$$EL = LG; GK = KK; FM = EM, \text{ Зн. } SH_1 \perp \triangle ABC$$

$$\text{окр. } (O_1; r) \text{ вписана в } KLM \text{ и } FEG$$

$$\text{и. } \frac{SH_1}{SH_3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \triangle SH_3M \subset \triangle SH_1M$$