

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в папку
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $9261 = 3^3 \cdot 7^3$; 1-й случай: число состоит из двух 1, трех 3 и трех 7. Тогда таких чисел $\frac{8!}{2! \cdot 3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$;

2-й случай: число состоит из трех 1, одной 3, трех 7 и одной 9. Таких чисел $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$;

В других случаях число будет содержать цифры, не входящие в разложение числа 9261, либо будет содержать не достаточное кол-во цифр, входящих в разложение 9261.

Значит всего ~~таких чисел~~ $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

② $(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cdot 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - 2 \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0$$

$$2(\cos 2x - \sin 2x) (\sin 7x - \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)) = 0 \Rightarrow \cos 2x = \sin 2x \text{ или}$$

$$\sin 7x = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x); 1) \cos 2x = \sin 2x, \cos 2x = \cos(\frac{\pi}{2} - 2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi n \\ 2x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2\pi n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \\ x \in \emptyset \end{cases} \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sin 7x = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x), \quad \cos(\frac{\pi}{2} - 7x) = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{2} - 7x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k \\ \frac{\pi}{2} - 7x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k \\ 9x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{9} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Омнем: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{20} - \frac{2\pi k}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{12} - \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\textcircled{3} \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \quad (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

из (1) следует, что $x > 0$ ($\ln x$) $\Rightarrow y > 0$ ($\ln(\frac{y}{x^7})$);

$x > 0$ и $y > 0$, значит (1) можно прологарифм. по осн. е. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln((x^2 y^4)^{-\ln x}) = \ln(y^{\ln(y/x^7)}) \Leftrightarrow -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(\frac{y}{x^7}) \cdot \ln y;$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y (\ln y - 7 \ln x);$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 7 \ln x \cdot \ln y;$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y = 0 \quad |: \ln^2 x \neq 0 \quad (\text{при } \ln^2 x = 0$$

$$x = 1 \Rightarrow y = 1, \text{ но тогда } y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1);$$

$$\frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} - 3 \frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0 \Leftrightarrow \log_x^2 y - 3 \log_x y + 2 = 0 \quad (x \neq 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_x y = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow y = x \quad \text{или} \quad y = x^2.$$

$$1) y = x: y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x^2 + 4x = 0; \quad -2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{или} \quad x = 2, \text{ но } x > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2; \quad \text{реш.} - (2; 2);$$

$$2) y = x^2; \quad y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0; \quad x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+x-4) =$$

$$= 0 \Rightarrow x = 0, \text{ или } x = 2, \text{ или } x^2 + x - 4 = 0, \text{ но } x > 0 \Rightarrow x \neq 0,$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

значит $x=2$ или $x^2+x-4=0$; $x=2 \Rightarrow y=\sqrt{2}$; реш. $(2; \sqrt{2})$

$$x^2+x-4=0, \quad D=1+16=17 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \quad \left| \Rightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \Rightarrow \right.$$

$$x > 0$$

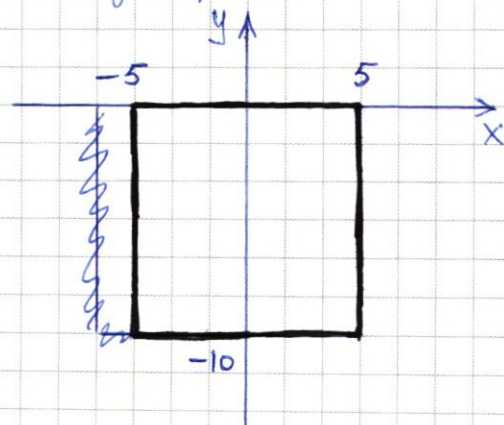
$$\Rightarrow y = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}}; \text{ реш. } \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \right)$$

Ответ: $(2; 2); (2; \sqrt{2}); \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \sqrt{\frac{\sqrt{17}-1}{2}} \right)$

5) $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2) \end{cases}$

$a=?$, при кот. система имеет
ровно два реш.

1) $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ (x+y+5) + (y-x+5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ y = 0 \end{cases}$



2) $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 < 0 \\ (x+y+5) - (y-x+5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \\ x = 5 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 < 0 \\ -(x+y+5) - (y-x+5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -x-5 \\ y < x-5 \\ y = -10 \end{cases}$

$\Rightarrow$ график уравнения (1) —
квадрат 10×10 (рисунок
сверху)

4) $\begin{cases} x+y+5 < 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ -(x+y+5) + (y-x+5) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y < -x-5 \\ y \geq x-5 \\ x = -5 \end{cases}$

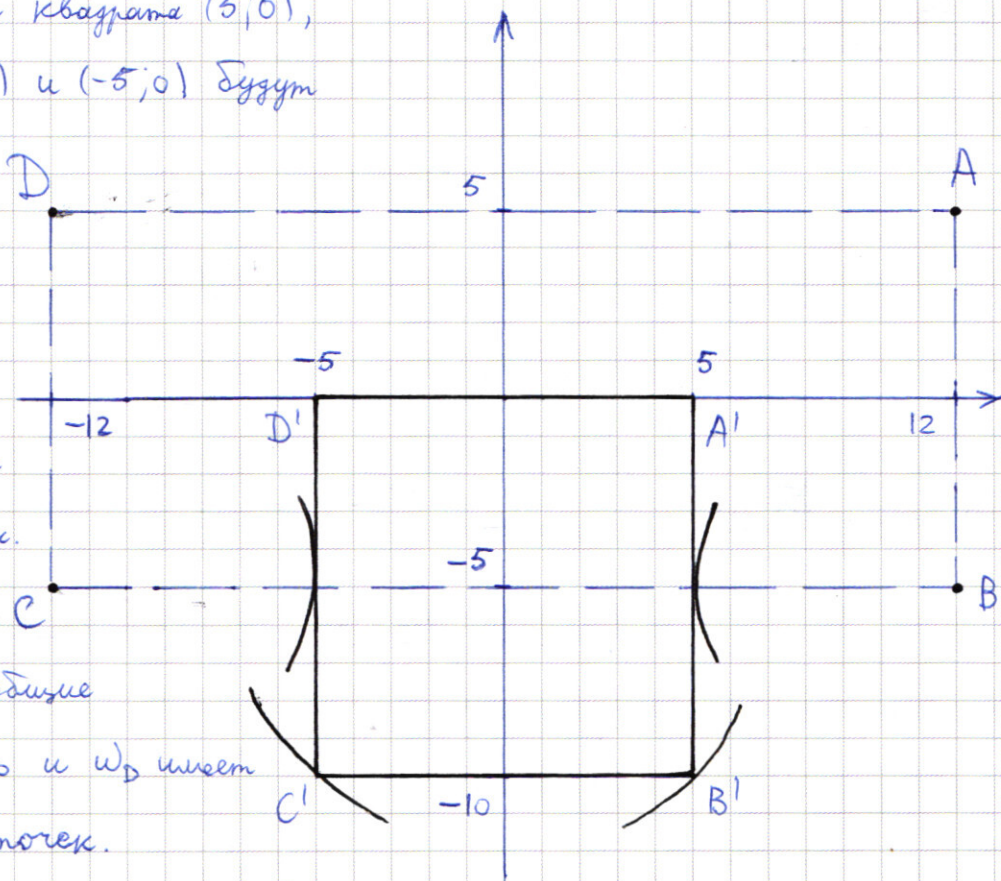
графиком уравнения (2) являются четыре окружности с
радиусом $\sqrt{a}$ и центрами в точках $(12; 5)$, $(12; -5)$,
 $(-12; -5)$ и $(-12; 5)$ (A, B, C и D соответственно).

Пусть вершины квадрата $(5;0)$,
 $(5;-10)$, $(-5;-10)$ и $(-5;0)$ будут

названы A' , B' ,
 C' и D' соответ-
 ственно.

$\omega_A, \omega_B, \omega_C$ и ω_D —
 окруж. с центрами
 в соответст. точках.

Заметим, что
 если ω_A имеет общие
 точки с квадр., то и ω_D имеет
 столько же общ. точек.



Аналогично с ω_B и ω_C . Значит, либо ω_B и ω_C
 имеют по одной общ. т. с квадр., а ω_A и ω_D — нет, либо наоборот.

1) ω_B и ω_C касаются $A'B'$ и $C'D'$ соотв. $\Rightarrow \sqrt{a'} = 7$. При этом
 ω_A и ω_D не им. общ. т. с кв., т.к. $r_{\min} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} > 7$.

Значит $a = 7^2 = 49$;

2) ω_A и ω_D проходят через т. C' и B' соотв. $\Rightarrow \sqrt{a'} = \sqrt{17^2 + 15^2}$
 $= \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514}$. При этом ω_B и ω_C не им. общ. т. с
 кв., т.к. квадрат лежит в ω_B и ω_C , потому что

$$r_{\max} = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314} < \sqrt{514}. \text{ Значит } a = 514.$$

Других случаев нет. Если ω_B и ω_C обе проходят через
 $(0;0)$ и $(0;-10)$, то ω_A и ω_D пересекут $A'B'$ и $C'D'$.

Если ω_A и ω_D проход. через A' и B' соотв., то ω_B и ω_C прохо-
 дят через B' и C' .

Ответ: $\{49; 514\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

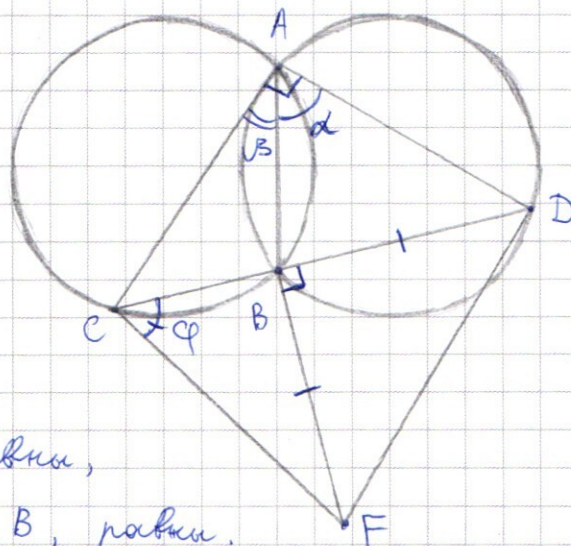
6) $R_1 = R_2 = R = 10$

$\omega_1 \cap \omega_2 \in \{A, B\}$

$C \in \omega_1; D \in \omega_2$

$B \in CD; \angle CAD = 90^\circ$

$BF \perp CD; BF = BD$



а) $CF = ?$

Заметим, что, т.к. ω_1 и ω_2 равны,

дуги, заключен. между т. A и B, равны.

Значит $\angle ACB = \angle ADB$

$B \in CD$

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$;

$\triangle DBF$ — равнобедр. и $BF = BD \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$;

$\angle ADF = \angle ADC + \angle BDF = 90^\circ$; пусть $\angle BAD = \alpha$, $\angle BAC = \beta = 90^\circ - \alpha$;

$CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = \sqrt{BC^2 + BD^2}$, по т. син. $2R = \frac{BC}{\sin \beta} = \frac{BD}{\sin \alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow BC = 20 \sin \beta = 20 \sin(90^\circ - \alpha)$ и $BD = 20 \sin \alpha$;

$BC = 20 \sin(90^\circ - \alpha) = 20 \cos \alpha$; $CF = \sqrt{400 \cos^2 \alpha + 400 \sin^2 \alpha} =$
 $= \sqrt{400 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)} = \sqrt{400} = 20$ Ответ: $CF = 20$

8) $BC = 12$ $S_{ACF} = ?$ $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{400 - 144} = 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow BD = 16 \Rightarrow CD = 16 + 12 = 28 \Rightarrow AC = \frac{28}{\sqrt{2}} = \frac{28\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$;

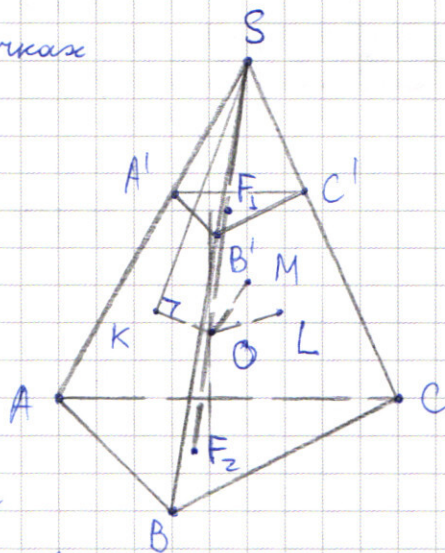
$\angle ACF = \angle ACB + \angle FCB$; пусть $\angle FCB = \varphi$, тогда $\sin \varphi = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$,

$\cos \varphi = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$; $\angle ACF = 45^\circ + \varphi \Rightarrow \sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \varphi) =$
 $= \sin 45^\circ \cos \varphi + \sin \varphi \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$;

$S_{ACF} = \frac{1}{2} \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 = 14^2 = 196$ Ответ: 196

- ④ Пусть сфера пересекла SO в точках F_1 и F_2 , где $F_1 \in [SO]$.

Рассмотрим касат. к сфере:
они перпенд. прямой, соедин. точки касания и т.О. Тогда из усл. касательные к сфере, перпендикулярные SO , касаются сферы в т. F_1 и F_2 , и площади сечений их равны 1 и 16 соотв.



Заметим, что плоскости параллельны. $\Rightarrow$ Тетр. $SA'B'C'$ можно перевести в тетр. $SABC$. ~~$K \neq \frac{16}{1} = 16$~~ $S_{A'B'C'} : S_{ABC} = 1 : 16 \Rightarrow$

$$\Rightarrow SF_1 : SF_2 = 1 : 4 \Rightarrow \text{если } SF_1 = x, \text{ то } SF_2 = 4x;$$

$$F_1 F_2 = SF_2 - SF_1 = 4x - x = 3x = 2R \Rightarrow R = 1,5x = KO = LO = MO;$$

$$SO = SF_1 + F_1 O = x + 1,5x = 2,5x; \triangle KSO - \text{прямоуг.} \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{1,5x}{2,5x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\textcircled{7} \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $9261 = 3 \cdot 3087 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

I. $9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$

II. $9261 = 3 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

I. $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$

II. $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$

$1120 + 560 = 1680$

2. $(\cos 9x - \cos 5x) \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$

$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$\sqrt{2} \cos 4x = 0 \Rightarrow \cos 4x = 0$

$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) = 0$

$\cos 2x = \sin 2x$

$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$

3. $(x^2 y^4) \ln x = y \ln (y/x)$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$y^2 - 4y + 4$

$\cos(\pi/2 + 2\pi/3) = \cos(\pi/2 + 2\pi/3 - \pi/2) = 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos(\pi/2 - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cos(\pi/2 - \frac{\pi}{4})$

$\cos \pi/2 + 2\pi/3 = 2 \cos \pi/4 \cos \pi/6$

$-\ln x \ln(x^2 y^4) = \ln y \ln(\frac{y}{x})$

$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = \ln y (\ln y - 7 \ln x)$

$2 \ln^2 x + \ln^2 y - 3 \ln x \ln y = 0$

$\frac{\ln^2 y}{\ln^2 x} - 3 \frac{\ln y}{\ln x} + 2 = 0$

$\frac{\ln y}{\ln x} = k$

$$5. \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ y=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} - 2\pi k$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} - 2\pi k$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x = ?$$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos(\frac{\pi}{4} - 2x) = \sqrt{2} \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\sin 7x = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} - 7x) = \cos(\frac{\pi}{4} - 2x)$$

$$\frac{\pi}{2} - 7x = \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi n$$

$$\frac{\pi}{2} - 7x = 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$y \geq x \text{ или } y = x^2$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$-2x(x-2) = 0$$

$$x=0 \text{ или } x=2$$

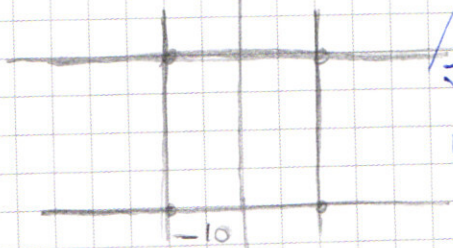
$$y=x^2$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x(x-2)(x^2+x-4) = 0$$



$$\frac{2}{x+y+z}$$



$$x+y+5 = 10 - |y-x+5|$$

$$x+y+5 = -10$$

$$16 = 2(x+y+z)r_1$$

$$r_1 = \frac{8}{x+y+z}$$

$$\frac{6}{x+y+z} - |x+5| = x+y+15$$

$$y-x+5 = 5-x-y$$

$$x+y+5 = -x-y-15$$

$$y = -10$$

$$4x$$

$$4y$$

$$16$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

