МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

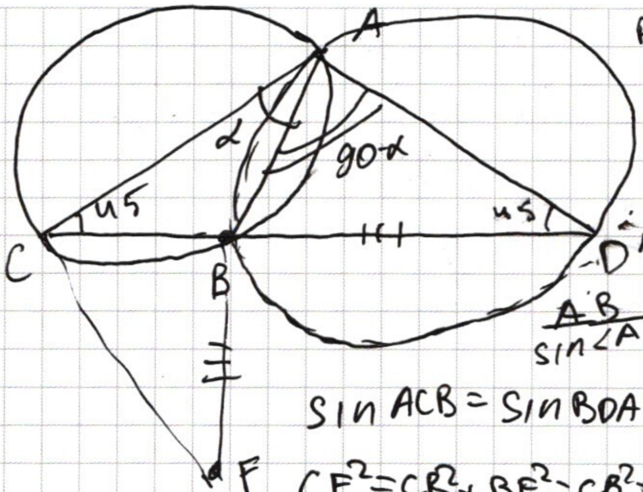
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 6



Решение

$R=10 \quad CF^2 = CB^2 + BF^2$

$CF^2 = CB^2 + BD^2$

$CF = \sqrt{BC^2 + BD^2}$

по свойству т. sin.

$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R = \frac{AB}{\sin\angle ADB} \Rightarrow$

$\sin ACB = \sin BDA \Rightarrow \begin{cases} \angle ACD + \angle CDA = \pi \ (ACD\triangle) \\ \angle ACD = \angle CDA = \frac{\pi - \angle CAD}{2} = 45^\circ \end{cases}$

$CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2$

Пусть $\angle CAB = \alpha \Rightarrow \angle BAD = 90 - \alpha \qquad \frac{CB}{\sin\alpha} = 2R = \frac{BD}{\sin(90-\alpha)}$

$CB = 2R\sin\alpha$; $BD = 2R\sin(90-\alpha) = 2R\cos\alpha$

$BD^2 + BC^2 = 4R^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 4R$

$CF^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = 2\cdot R = 20$

б) $BC = 12 \qquad BC = 2R\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \qquad \cos\alpha = \frac{4}{5}$

$\sin(45+\alpha) = \frac{\sqrt2}{2}(\sin\alpha + \cos\alpha) = \frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{7}{5} = \frac{7\sqrt2}{10} \qquad \frac{AC}{\sin(45+\alpha)} = 2R \Rightarrow$

$\Rightarrow AC = 2\cdot\frac{7\sqrt2}{10}\cdot 10 = 14\sqrt2.$

$\triangle CBF$: $CB = 12$

$CF = 20$

$BF = BD = 2R\cos\alpha = \frac{20\cdot 4}{5} = 16$

$\angle BCF = x$, $\sin x = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$, $\cos x = \frac{3}{5}$

$S_{ACF} = \frac12 AC\cdot CF\cdot \sin\angle ACF = \frac12\cdot 14\sqrt2\cdot 20\cdot \sin(45+x)$

$\sin(45+x) = \frac{\sqrt2}{2}(\sin x + \cos x) = \frac{7\sqrt2}{10}$

$S_{ACF} = \frac12\cdot 14\sqrt2\cdot 20\cdot\frac{7\sqrt2}{10} = 196$

Ответ: 20 ; 196.

№3 $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1)\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0. & (2)\end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ y>0, \text{ т.к. } \frac{y}{x^7}>0, \text{ а } x^7>0.\end{cases}$

I. ~~Талогбагаем~~ Прологарифмируем правую и левую часть (1)

$(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$\ln(x^2y^4)^{-\ln x}=\ln y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$, по св. логарифма.

$-\ln x\cdot\ln x^2\cdot y^4=\ln\frac{y}{x^7}\cdot\ln y$

$-\ln x(2\ln x+4\ln y)=(\ln y-7\ln x)\ln y$

$-2\ln^2x-4\ln x\ln y=\ln^2y-7\ln x\ln y$

$\ln^2y-3\ln x\ln y+2\ln^2x=0$

$(\ln y-2\ln x)(\ln y-\ln x)=0$

$\left[\begin{array}{l}\ln y=2\ln x\\ \ln y=\ln x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=x^2\\ y=x\end{array}\right.$

II для 1 варианта решение $y=x^2$ подставим во (2)

$x^4-x^3-2x^2+8x-4x^2=0$

$x(x^3-x^2-6x+8)=0$

1) $\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 2) $x^3-x^2-6x+8=0$ подходит корень $x=2$ поделим на $x-2$

получим $(x-2)(x^2+x-4)=0$

$x-2=0$ $x^2+x-4=0$

$D=17$

$\begin{cases}x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\\ y_1=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})^2\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\\ y_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{17})^2\end{cases}$

По ОДЗ $\begin{pmatrix}x>0\\ y>0\end{pmatrix}$

подходит $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$ и $\begin{cases}y=\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})^2\end{cases}$

III) Подставим 2 вариант решение $y=x$ во второе уравнение

$x^2-x^2-2x^2-8x-4x=0$

$2x(-x+2)$

$\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$, $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$ по ОДЗ подходит $\begin{cases}x=2\\ y=2\end{cases}$

Ответ: $(2;4);(2;2);\left(\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})^2\right)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7 $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$76 + 2^{33}\cdot x - 2x > 2^x + 3\cdot 2^{34}$

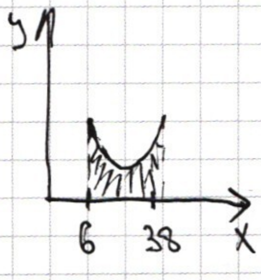
$76 + 2^{33}\cdot (x-6) > 2^x + 2x$

При $x=6$ и $x=38$ левая часть равна правой

Д-ем, что при всех x от $[7;37]$ и $x \in \mathbb{Z}$ выполнено нужное неравенство, а при остальных правая часть больше левой

$(76+2^{33}(x-6)-2^x-2x)' = 2^{33} - \ln 2(2^x - 2)$

$\ln 2 > \frac{1}{2}$ т.к. $\sqrt{e} < 2$, тогда при $x<33$ производная >0 $\Rightarrow$ функция возрастает. при $x \geq 34$ функция убывает. в $x=38$ она обращается в 0. Значит до этого была >0



подходит все y, лежащие между $2^x+3\cdot 2^{34}$ и $76+2\cdot(2^{32}-1)\cdot x$. Таких y для данного x $2\cdot(2^{32}-1)\cdot x + 76 - 2^x - 3\cdot 2^{34}$, значит всего будет: $(2^{33}-2)\cdot(7+8+\ldots+37) +$

$+ 76\cdot 31 - 93\cdot 2^{34} - (2^7+2^8+\ldots+2^{37}) =$

$= 2^{33}\cdot 682 - 2\cdot 682 + 76\cdot 31 -$

$93\cdot 2^{34} - (2^{38}-2^7) = 1020 + 2^{34}\cdot(341 -$

$-93-16) =$

$= 2^{37}\cdot 29 + 1020$

№7 $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$$\sqrt{2}\cos 4x = (\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x)$$

$$\sqrt{2}\cos 4x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

(Формула двойного угла

$$\cos 9x - \cos 5x = 2\sin\frac{5x-9x}{2}\cdot\sin\frac{5x+9x}{2} = -2\sin 2x \sin 7x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 2\sin 7x\cos 2x$$)

Итого:

$$0 = 2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$0 = (\cos 2x - \sin 2x)\big(2\sin 7x - \underbrace{\sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)}_{= 2\sin(2x+\frac{\pi}{4})}\big)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)\left(2\sin 7x - 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$2\cdot(\cos 2x - \sin 2x)\left(\sin 7x - \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x - \sin 2x = 0\\ \sin 7x = \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)\end{array}\right.$$

1) $\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k, \\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2x + 2\pi k \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z}$

$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\qquad x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

2) $\sin 7x - \sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cos\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right)$

$\begin{cases} \frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} = \pi k \\ \frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k. \end{cases}$ (Вместе) $\begin{cases} 5x = 2\pi k + \frac{\pi}{4}. \\ 9x = \pi + 2\pi k - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases}$

Ответ: $\boxed{\left.\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}; \\ \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}; \\ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}. \end{array}\right\} k \in \mathbb{Z}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

Найдите кол восьмизначных чисел, произведение цифр каждого 9261

$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$ $\quad 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\alpha+\beta = x$

$\alpha-\beta = y$ $\quad \alpha = \frac{x+y}{2}$ $\beta = \frac{x-y}{2}$

$\alpha+\beta = x$

$\alpha-\beta = y$ $\quad \alpha = \frac{x+y}{2}$ $\beta = \frac{x-y}{2}$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$-2\sin 7x\sin 2x + 2\sin 7x\cos 2x$

$\sin 7x \cdot 2 \cdot (-\sin 2x + \cos 2x)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) + \sqrt{2}\cos 4x$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) + \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x + \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x))$

$\cos 2x = \sin 2x$

$2\sin 7x + \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

Разложим 9261 на множители.

$9261 : 9 = 1023$ $\quad 3\cdot 3\cdot 1023$

$1023 : 3 = 341$

$343 : 3$

$3\cdot 3\cdot 141$

$3\cdot 3\cdot 47\cdot 3$

$3^4\cdot 47$

$141 : 3 = 47$

$9261 : 3 = 1087$ $\quad 1087 \times 3 = 3261$

$9261 : 3 = 3087$

$3087 : 3 = 1029$

$1029 \times 9 = 9261$

$1029 : 3 = 343$

$9261 = 3\cdot 3\cdot 3$

$y \geq 0$, $x \geq 0$. $x+y+5+|y-x+5|$.

$$\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=9 \end{cases}$$

$|y+x+5|+(y-x+5|=10.$

8!

~~cos 8x - cos 5x~~

$9261 \mid 3$ → 3087; $3087 \mid 3$ → 1029; $1029 \mid 3$ → 343; $343 \mid 7$ → 49. 49

$\begin{pmatrix} 11333777 \\ 11139777 \end{pmatrix}$

$\boxed{9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7}$

Число состоит из 11333777 — число состоит из цифр 11333777

11.333.777

Как считать количество вариантов? :)

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\frac{2}{2}(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) = 0.$

$2(\cos 2x - \sin 2x)\left(\sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)\right) = 0.$

$2(\cos 2x - \sin 2x)\left(\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) = 0.$

$-2(\sin 2x - \cos 2x) \cdot 2\cos\left(\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0.$

$-4\left(\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\right)\cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$

$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right)\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0.$

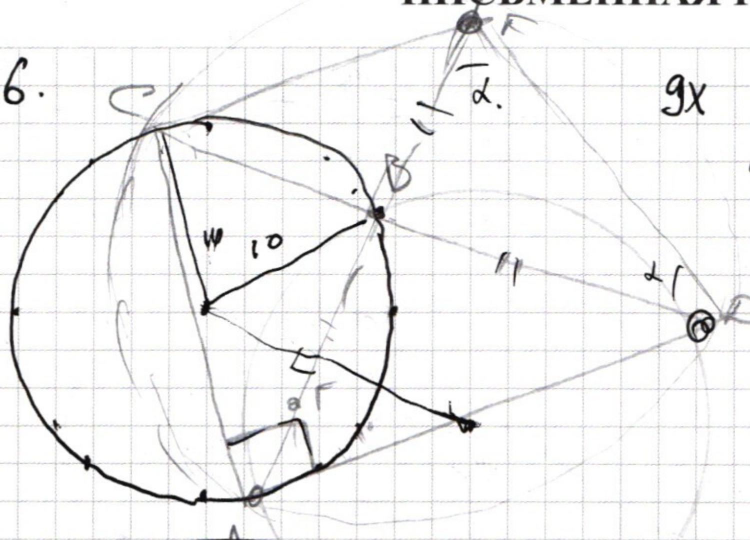
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

МФТИ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.



9x

1) $x=0$; $y=0$

2) $x^3-x^2-6x+8=0$, подходит корень $x=2$,

поделим $x^3-x^2-6x+8 \mid x-2$, x^2

получим, что и сходное уравн

$(x-2)(x^2+x-4)=0$

$x-2=0$ $\qquad x^2+x-4=0$

$x^2+x-4.\ D=17$

9x.

№3. $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)} & (1)\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0 & (2)\end{cases}$

$\begin{cases}x_1=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\\ y_1=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})^2\end{cases}$

$x_2=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$

$y_2=\frac{1}{4}(-1-\sqrt{17})^2$

ОДЗ: $x>0$,

$y>0$, т.к. $\frac{y}{x^7}>0$, а $x^7>0$

по ОДЗ $\begin{cases}x>0\\ y>0\end{cases} \Rightarrow$ подходит $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$

$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{17}-1}{2}\\ y=\frac{1}{4}(-1+\sqrt{17})^2\end{cases}$

1) прологарифмируем первую и левую часть первого (1)

$(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$

$\ln(x^2y^4)^{-\ln x}=\ln y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$, по свойству логарифма

$-\ln x\cdot\ln x^2y^4=\ln\frac{y}{x^7}\cdot\ln y$.

$-\ln x\cdot\ln x^2y^4=\ln\frac{y}{x^7}\cdot\ln y$, по св логарифмов

$\log_a bc=\log_a b+\log_a c$

$-\ln x\cdot(2\ln x+4\ln y)=(\ln y-7\ln x)\ln y$

$-2\ln^2x-4\ln x\ln y=\ln^2y-7\ln x\ln y$

$\ln^2y-3\ln x\ln y+2\ln^2x=0$

$(\ln y-2\ln x)(\ln y-\ln x)=0$

$\left[\begin{array}{l}\ln y=2\ln x\\ \ln y=\ln x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=x^2\\ y=x\end{array}\right.$

2) для ~~первого~~ варианта решения $y=x^2$, подставим во (2)

$x^4-x^3-2x^2+8x-4x^2=0$

$x(x^3-x^2-6x+8)=0$

III) подставим второй вариант решения $y=x$ во второе уравнение:

$x^2-x^2-2x^2-8x-4x=0$

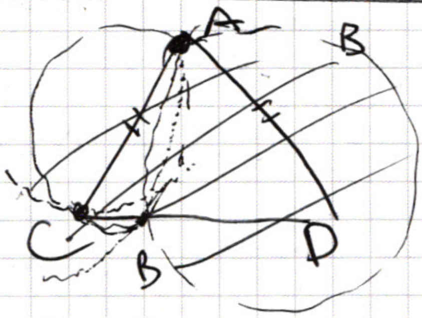
$2x(-x+2)=0$

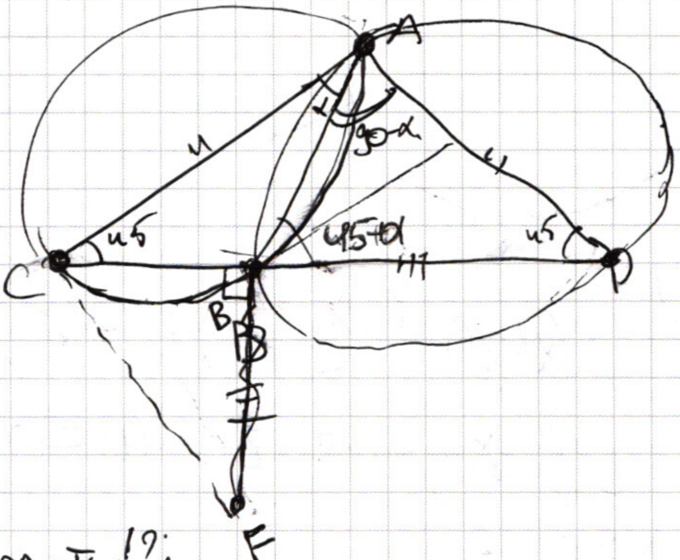
подходит.

$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, по ОДЗ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}; \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$

Ответ: $\left\{ \cancel{x_4=2} \right.$ $(2;4), (2;2) \left(\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2} \right\}; \frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{17}\right)^2$

а)





Решение

$R=10$

$CF^2=CB^2+BF^2$ - т. Пиф. $\triangle CBF$

$CF^2=CB^2+BD^2$

$CF=\sqrt{BC^2+BD^2}$

по свойству

$\frac{AB}{\sin\angle ACB}=2R=\frac{AB}{\sin\angle ADB} \Rightarrow$

$\sin ACB=\sin BDA \Rightarrow \begin{cases} \angle ACB+\angle CDA=\pi \;!? \;(ACD \triangle \text{ р/б}) \\ \angle ACD=\angle CDA=\frac{\pi-\angle CAD}{2}=45^\circ \end{cases}$

$CF^2=CB^2+BF^2=CB^2+BD^2$

Пусть $\angle CAB=\alpha \Rightarrow \angle BAD=90-\alpha$ $\qquad \frac{CB}{\sin\alpha}=2R=\frac{BD}{\sin(90-\alpha)}$

$CB=2R\sin\alpha$, $BD=2R\sin(90-\alpha)=2R\cos\alpha$

$BD^2+BC^2=4R^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=4R^2$

$CF^2=4R^2 \Rightarrow CF=2R=20$ $\qquad$ Ответ: 20.

б) $BC=12$ $\quad BC=2R\sin\alpha \Rightarrow \sin\alpha=\frac{12}{20}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ $\quad \cos\alpha=\frac{4}{5}$

$\sin(45+\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{7}{5}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$ $\qquad \frac{AC}{\sin(45+\alpha)}=2R \Rightarrow$

$\triangle CBF$:

$CB=12$

$CF=20$,

$BF=BD=2R\cos\alpha=\frac{20\cdot4}{5}=16$ $\qquad \angle BCF=x$, $\sin x=\frac{BF}{CF}=\frac{16}{20}=\frac{4}{5}$

$\cos x=\frac{3}{5}$

$AC=2\frac{7\sqrt{2}}{10}\cdot10=$

$=2\cdot7\sqrt{2}=$

$=14\sqrt{2}$

$S_{ACF}=\frac{1}{2}AC\cdot CF\cdot\sin\angle ACF=\frac{1}{2}\cdot14\sqrt{2}\cdot20\cdot\sin(45+x)$

$\sin(45+x)=$

$=\sin45\cos x+\cos45\sin x=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{4}{5}+\frac{3}{5}\right)=\frac{7\sqrt{2}}{10}$

$S_{ACF}=\frac{1}{2}\cdot14\sqrt{2}\cdot20\cdot\frac{7\sqrt{2}}{10}=196.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a. \end{cases}$

Замена $x+y=b$, $y-x=c$

$|b+5|+|c+5|=10$

Разберем 4 случая, где лежат b и c

1 сл: $b\geq -5$; $c\geq -5$ => тогда $b+c+5+5=10$

$b+c=0 \Rightarrow x+y+y-x=0$, $y=0$

Если $b\geq -5 \Rightarrow x\geq -5$

Если $c\geq -5 \Rightarrow x\leq 5$

2 сл: $b\geq -5$; $c\leq -5$, тогда => $b-c=10$

$b+5-c-5=10$ $(x+y)-(y-x)=10$, $x=5$

если $b\geq -5 \Rightarrow y\geq -10$

Если $c\leq -5 \Rightarrow y\leq 0$

3 сл: $b\leq -5$, $c\geq -5$, тогда $|-b-5|+|c+5|=10$ $c-b=10$

$y-x-x-y=10$, $x=-5$

Если $b\leq -5 \Rightarrow y\leq 0$, Если $c\geq -5 \Rightarrow y\geq -10$

4 сл: $b\leq -5$, $c\leq -5$ $-b-c-5-5=10$

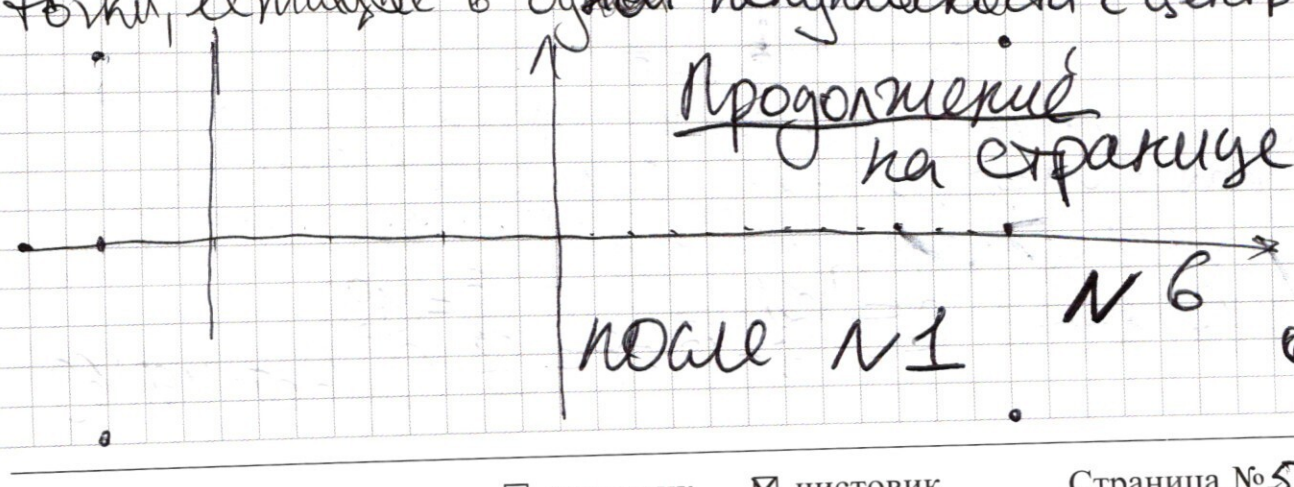
$(x+y)+(y-x)=-20$ $y=-10$

Если $b\leq -5 \Rightarrow x\leq 5$, Если $c\leq -5 \Rightarrow x\geq -5$

Значит решение первого уравнение – это квадрат с вершинами $(-5;-10)$; $(-5;0)$; $(5;0)$; $(5;-10)$

Теперь посмотрим на решение второго уравнение это 4 окружности с центрами $(12;5)$; $(-12;5)$; $(-12;-5)$; $(12;5)$

Причем на одной окружности подходят только точки, лежащие в одной полуплоскости с центром



Продолжение на странице после №1 №6

№1 $9261 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 1\cdot 1$

два варианта набора цифр:

1) 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7 или 2) 1, 1, 1, 3, 9, 7, 7, 7

сначала ставим 7-ки

C_8^3 - способов, затем тройки C_5^3 способов.

Оставшиеся цифры это 1-цы

2) Расставим 7-ки

C_8^3 способов, затем 9 — 5 способов.

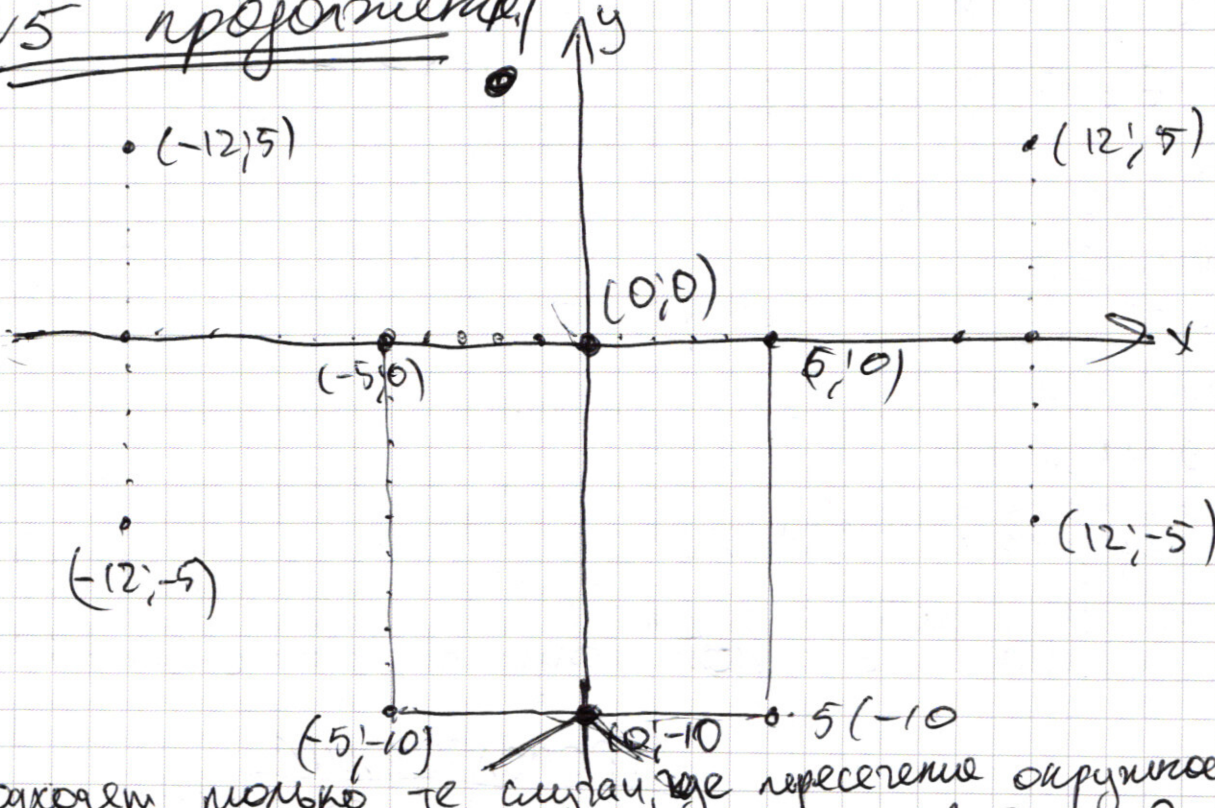
Затем 3-ки — 4 способа.

Затем поставим 1

$C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 30 = 1680$

Ответ: 1680.

№5 продолжение



Подходят только те случаи, где пересечение окружностей с квадратом ⇒ таких вариантов всего 2

~~нижние окружности касаются квадрата либо нижние~~ окружности пересекают квадрат в точка (0; −10), а верхние в т. (0; 0) (0; 0),

в одном случае $a = (12-5)^2 + (5-5)^2 = 49$

во втором случае $a = (0-12)^2 + (10-5)^2 = 169$

Ответ: 49; 169

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 7 $\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$

$\sqrt{2}\cos 4x = (\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)