МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ[illegible]

Бланк задания должен быть вложен в ра[illegible]
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

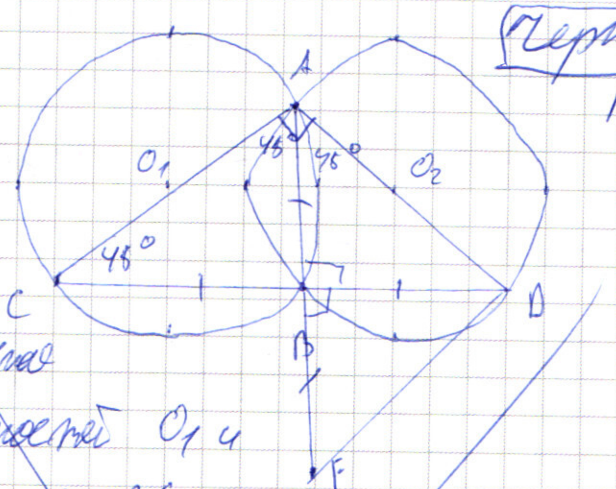
Задача 6;

Черновик

$R_{O_1} = R_{O_2} = 10$

$BD = BF$

$\angle CAD = 90^\circ$



а)

1) AB − радикальная ось для окружностей O_1 и O_2 => $\triangle BAC = \triangle BAD$ (по 3м сторонам) => $\triangle CAD$ − р/б =>
=> $AB \perp CD$ (т.к. $CB = BD$) => $\angle CBA = 90^\circ$ => CA − диаметр окр. O_1. ~~AD~~ Аналогично AD − диаметр O_2. $AC = AD = 20$

2) $AB = AC \cdot \cos 45^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} = BF$

3) Т. косин.

$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 = 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

$27 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$

~~б)~~

$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Задача 1: Чистовик.

$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 43 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Возможно два случая:

1) Цифры: $\{3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1\}$. Здесь вариантов чисел 8!, т.к. каждую цифру можно использоват 1 раз

2) Цифры: $\{9; 3; 7; 7; 7; 1; 1; 1\}$. Здесь также 8! вариантов.

$8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 56 \cdot 30 \cdot 12 \cdot 2 = 56 \cdot 720 = 40320$

Ответ: $2 \cdot 8! = 80640$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2:

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2\sin 2x \cdot \sin 7x + 2\sin 7x \cdot \cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x$$

$$2\sin 7x\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) - \sin 2x\right) = \sqrt{2}\cos 4x$$

$$2\sin 7x \cdot \left(2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\cdot\cos\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos 4x$$

$$2\sin 7x\left(\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right) = \sqrt{2}\cos 4x$$

$$2\sin 7x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\left(\sin 7x - \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right) = 0$$

1) $\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = 0$

$\frac{\pi}{4} - 2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$-2x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$

$-x = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$

знак не имеет значения.

2) $\sin 7x - \cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4}-2x\right)\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right) = 0$

$2\sin\left(\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos\left(\frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

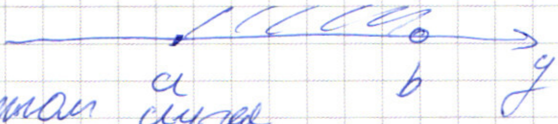
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5x-\frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x+\frac{\pi}{4}}{2} = \pi b, b \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 5x = 2\pi k + \frac{\pi}{4} \\ 9x = 2\pi b - \frac{\pi}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2}{5}\pi k + \frac{\pi}{20} \\ x = \frac{2}{9}\pi b - \frac{\pi}{36} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow$ Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi}{36} + \frac{2}{9}\pi b, b \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Задача 7: $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} & (1) \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x & (2) \end{cases}$, т. е.

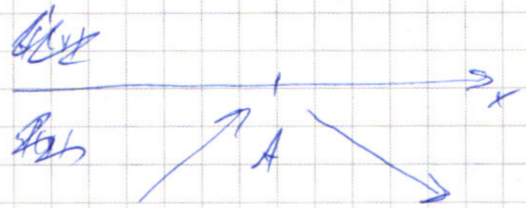
мы имеем промежуток 

1) Найдём a_b. По сути, в данном случае разность (2)−(1) должна давать максимальное значение.

$76 + 2(2^{32}-1)x - 2^x - 3\cdot 2^{34} = \max f(x)$

$f'(x) = 2(2^{32}-1) - 2^x\cdot \ln 2 = 0$; $2^x = \frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}$;

$x = \log_2\left(\frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}\right) = A$



Но число должно быть целым, соответственно нам нужна целая часть

$\left[\log_2\left(\frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}\right)\right] = \cancel{\log_2(2^{33}-2) - \log_2 \ln 2} = 33$

2) Найдём $\min(y)$: Разность (2)−(1) должна быть равна 0. $76 + 2(2^{32}-1)x - 2^x - 3\cdot 2^{34} = 0$.

Можно заметить, что $x = 6$ является решением и это именно тот корень, который нам нужен, ~~так как другой корень мы нашли в [1] пункте~~

$76 + 2^{33}\cdot 6 - 12 - 64 - 3\cdot 2^{34} = 0$; $0 = 0$.

~~Итого чисел 33−6=27~~ Итого чисел: $\left[\log_2\left(\frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}\right)\right] - 6$

~~Ответ 27 чисел~~

Ответ: $\left[\log_2\left(\frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}\right)\right] - 6$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3:

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Решим (2), как квадратное:

$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$; $D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$

$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$; $\left[\begin{array}{l} y_1 = \frac{x+4-3x+4}{2} = 4-x \ (**) \\ y_2 = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x \ (*) \end{array}\right.$

$(*)$ $\begin{cases} y = 2x \\ (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \end{cases}$

$(x^2\cdot(2x)^2)^{-2\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$; Прологарифмируем:

$-2\ln x \cdot \ln(4\cdot x^3) = \ln(2x)\cdot\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)$

$-2\ln x(2\ln 2 + 3\ln x) = (\ln 2 + \ln x)(\ln 2 - 6\ln x)$

$-4\ln x\cdot\ln 2 - \cancel{6\ln^2 x} = \ln^2 2 - 5\ln 2\cdot\ln x - \cancel{6\ln^2 x}$

$\ln x\cdot\ln 2 = \ln^2 2$

$\ln x = \ln 2$

$\underline{x=2}$; $\underline{y = 2x = 4}$

$(**)$ $\begin{cases} y = 4-x \\ (x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)} \end{cases}$

$(x(4-x)^2)^{-2\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

Прологарифмируем:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3 (Нумеровать только чистовики)

$\ln(x(4-x)^2)\cdot(-2\ln x)=\ln(4-x)\cdot\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)$

$(\ln x+2\ln(4-x))(-2\ln x)=\ln(4-x)\cdot(\ln(4-x)-7\ln x)$

$\ln x=a;\ \ln(4-x)=b$

$(a+2b)(-2a)=b(b-7a)$

$-2a^2-4ab=b^2-7ab$

$b^2-3ab+2a^2=0$

$D=9a^2-8a^2=a^2$

$$\left[\begin{array}{l} b=\frac{3a-a}{2}=a\ (\mathrm{I}) \\ b=\frac{3a+a}{2}=2a\ (\mathrm{II}) \end{array}\right.$$

$(\mathrm{I})\quad \ln(4-x)=\ln(x);\ 4-x=x;\ \underline{x=2;\ y=4-x=2}$

$(\mathrm{II})\quad \ln(4-x)=2\ln(x)=\ln(x^2);$

$4-x=x^2;\ x^2+x-4=0;\ D=1+16=17$

$$\left[\begin{array}{l} x_1=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}\ \text{н. уд } x>0 \\ \underline{x_2=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}};\ \underline{y=4-x=\frac{8}{2}-\frac{\sqrt{17}-1}{2}=\frac{9-\sqrt{17}}{2}} \end{array}\right.$$

Ответ: $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$, $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, $\begin{cases} x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1: $9261 = 9\cdot 1029 = 9\cdot 3\cdot 343 = \underbrace{3\cdot 3\cdot 3\cdot 7\cdot 7\cdot 7}_{6} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 7-ми значное число должно состоять из 3-х троек, 3-х семёрок и 2-х единиц. Т.е мы имеем 8 цифр $(3; 3; 3; 7; 7; 7; 1; 1;)$, из которых можно составить число. $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 8!$ способов т.к. цифры нельзя повторять

$8! = 56\cdot 30\cdot \overset{24}{12\cdot 2} = 56\cdot 420 = 40320$

Ответ: 40320 чисел.

Задача 5: $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2) \end{cases}$

Построим график (1)

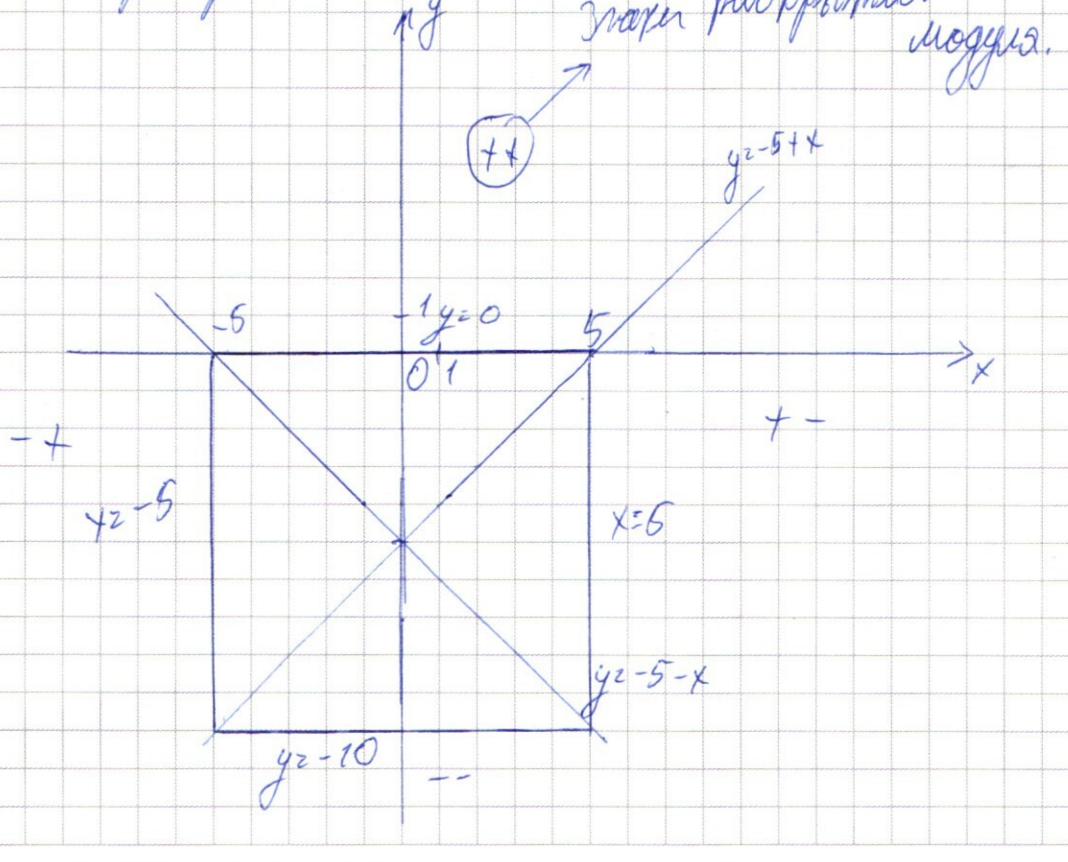
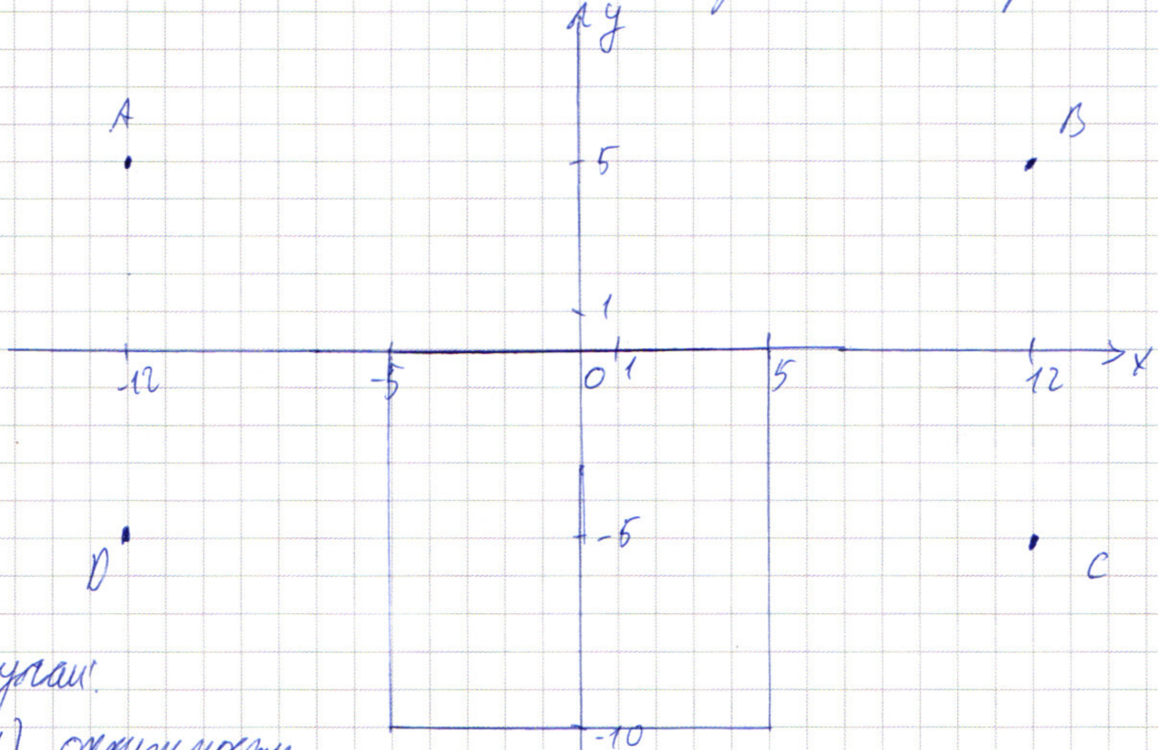


График (2) задаёт 4 окружности с центрами $(12;5)$; $(12;-5)$; $(-12;5)$; $(-12;-5)$. Построим оба графика.



Случаи:

1) окружности D и C касаются $x=-5$ и $x=5$ соответственно. Тогда $R = 7 = \sqrt{a}$; $a=49$, при этом окружности A и B не коснутся квадрата вообще, т.к. $dist(A;(-5;0)) = \sqrt{49+25} = \sqrt{74} > 7$.

2) окружности A и B коснутся точек $(5;-10)$ и $(-5;-10)$ соответственно. Тогда $R=\sqrt{17^2+15^2} = \sqrt{289+225} = \sqrt{514} = \sqrt{a}$; $a=514$. При этом окр. D и C не коснутся квадрата т.к. $dist(D;(5;0)) = \sqrt{17^2+5^2} < \sqrt{514}$.

Ответ: $\left[\begin{array}{l} a=514 \\ a=49 \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)