МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М.

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложим число 9261 на простые множители: $9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$. Получаем, что в нашем 8-знач. числе можно использовать цифры 2-мя способами, т.к. $3\cdot3=9$, а $7\cdot7=49$, поэтому точно будут 3 семёрки и 1 тройка, плюс 1 девятка, либо ещё 2 тройки.

1) цифры: 7 7 7 3 3 3 1 1

Посчитаем количество их перестановок:

для семерок – $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{\cancel{3!}} = 56$ сп.

для троек – $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5\cdot4^2}{\cancel{2!}} = 10$ сп.

Единицы зависят от 7-ок и 3-ек.

2) цифры: 7 7 7 1 1 1 3 9

Посчитаем кол-во перестановок:

для семёрок – $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = 56$ сп.

для единиц – $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = 10$ сп.

для тройки – $C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2$ сп.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

В 1-ом случае получаем:

$56 \cdot 10$ – способов.

Во 2-ом:

$56 \cdot 10 \cdot 2$ – способов.

Находим их сумму: $56 \cdot 10 \cdot 3 = 1680$

Ответ: всего будет 1680 чисел.

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cdot \cos 2x$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x \cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}}\, 2x$

$\sqrt{2}\cos 4x = \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = (\cos 2x + \sin 2x) *$

$* (\cos 2x - \sin 2x)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x -$

$- \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x) =$

$= 0.$

$\sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = \sqrt{2}(\cancel{\cos}\ \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x) =$

$= 2\sqrt{2}(\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos(2x - \frac{\pi}{4})) = 2\cancel{\sin}\ \cos(2x - \frac{\pi}{4})$

1) $\cos 2x = \sin 2x$

$\sin(\frac{\pi}{2} - 2x) - \sin 2x = 0.$

$2\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 0.$

$\sin(\frac{\pi}{4} - 2x) = 0.$

$\frac{\pi}{4} - 2x = \pi n, \quad n \in Z$

$2x = \frac{\pi}{4} - \pi n, \quad n \in Z$

$x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, \quad n \in Z$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $2\sin 7x - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.$

$2\left(\sin 7x - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right)\right) = 0.$

$4\cdot\sin\left(4{,}5x - \frac{3\pi}{8}\right)\cdot\cos\left(2{,}5x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0.$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(4{,}5x - \frac{3\pi}{8}\right) = 0.\\ \cos\left(2{,}5x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0.\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll}4{,}5x - \frac{3\pi}{8} = \pi m, & m\in Z\\ 2{,}5x + \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k, & k\in Z\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}4{,}5x = \pi m + \frac{3\pi}{8},\\ 2{,}5x = \frac{\pi}{8} + \pi k,\end{array}\right. \quad k,m\in Z$$

$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi m}{4{,}5} + \frac{\pi}{12},\\ x = \frac{\pi k}{2{,}5} + \frac{\pi}{20},\end{array}\right. \quad k,m\in Z.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{ll}x = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi n}{2}, & n\in Z\\ x = \frac{2\pi m}{9} + \frac{\pi}{12}, & m\in Z\\ x = \frac{2\pi k}{5} + \frac{\pi}{20}, & k\in Z\end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

7. $\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$

$76 + 2(2^{32}-1)x > y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

Первая функция растёт сначала медленнее 2-ой, но затем всё быстрее и быстрее, поэтому найдём x, принадлежащие этим парам по условию сравняв 1 и 2 функцию.

$$3\cdot 2^{34} + 2^x = 76 + 2^{33}\cdot x - 2x$$

$$(6-x)\cdot 2^{33} + 2^x - 76 + 2x = 0$$

Нетрудно заметить, что $x=6$; $x=38$.

Если $x \geq 39$, то условие не выполняется, т.к. 1-ая функция будет расти быстрее 2-ой; если $x \leq 5$, то условие не выполняется, т.к. 1-ая функция имеет минимум $3\cdot 2^{34}$, а у 2-ой при $x \leq 5$ будет число меньшее $3\cdot 2^{34}$. Также $x=6$ и $x=38$ не подходят, т.к. мы имеем 1-но строгое неравенство, поэтому получаем значения $x \in \{7; 37\}$.

Теперь найдём количество целых y, принадлежащие каждому из x.

При $x=7$ получается:

$y \in [2^7 + 3\cdot 2^{34}; 62 + 7\cdot 2^{33} - 1]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Количество y для $x=7$ будет:

$7\cdot 2^{33}+62-128-3\cdot 2^{34}-1+1=$

$=2^{33}-66$ (т.к. с 1-ой стороны рав. нестрогое)

При увеличение x будет меняться и кол пар y для каждого из x, поэтому умножим кол-во решение для $x=7$ на 31, прибавим и удалим появившиеся числа:

$(2^{33}-66)\cdot 31+45\cdot 15\cdot 2^{33}-45\cdot 15\cdot 2-2^{37}+2^{7}=$

$=31\cdot 2^{33}-31\cdot 66+675\cdot 2^{33}-675\cdot 2-16\cdot 2^{33}+128=$

$=690\cdot 2^{33}-3268$

Ответ: получится $(690\cdot 2^{33}-3268)$ пар.

3. $\begin{cases}(x^2y^4)^{-\ln x}=y^{\ln(y/x^7)}\\ y^2-xy-2x^2+8x-4y=0\end{cases}$

$y^2-xy-2x^2+8x-4y=0$

$(y-2x)(y+x)-4(y-2x)=0$

$(y-2x)(x+y-4)=0$

$\left[\begin{array}{l}y=2x\\ y=4-x\end{array}\right.$

1) $(16x^{6})^{-\ln x} = (2x)^{\ln(2/x^{6})}$

2) $x^{2}(4-x)^{4-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^{6}}\right)}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$

$\begin{cases} x+y\le 5 \\ y-x\le 5 \end{cases}$ $\begin{cases} x+y\ge -15 \\ y-x\ge -15 \end{cases}$

$675 \cdot 2 = 1200+150 = 1350.$

$1350 - 128 = 1222$

$6\cdot 2^{33}+16\cdot 2^{33}=22\cdot 2^{33}$

7. $x\in\{7;37\}$ $x_{min}=7.$ $x_{max}=37.$

$76+2^{33}-2x>y\ge 2^x+3\cdot 2^{34}$

$76+7\cdot 2^{33}-14>y\ge 3\cdot 2^{34}+128$

$675+15=690$

$y\in\{3\cdot 2^{34}+128;\ 7\cdot 2^{33}+61\}$

$7\cdot 2^{33}+2>y\ge \cancel{22}\ 22\cdot 2^{33}$

$y\{22\cdot 2^{33},$

$76+7\cdot 2^{33}-2x>y\ge 2^x+3\cdot 2^{34}$

$128-61=67$

$(67+7\cdot 2^{33}-2^7-3\cdot 2^{34})\cdot 31$

$+2^7+2^8+2^9\ldots+2^{36}=2^{36}-2^6-30\cdot 31.$

$7\cdot 2^{33}-6\cdot 2^{33}+61-128=(2^{33}-67)\cdot 31+2^{36}-2^6=$

$=31\cdot 2^{33}-31\cdot 67+8\cdot 2^{33}-2^6-30\cdot 31=$

$=39\cdot 2^{33}-2^6-31\cdot 97$

2^6

$2046+1222=3268$

$45\cdot 15 = 675$

$66\cdot 31=2046$

$2^{36}=8\cdot 2^{33}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

7. $\begin{cases} y \geq 2^{x} + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$ $x > 0$ всегда. $y > 3\cdot 2^{34}$

$\begin{cases} y \geq 3\cdot 2^{34} + 2^{x} \\ y < 76 + 2^{33}x - 2x \end{cases}$

$3\cdot 2^{34} + 2^{x} = 76 + 2^{33}x - 2x$

$(6-x)\cdot 2^{33} + 2^{x} - 76 + 2x = 0.$

$x = 6. \quad y = 3\cdot 2^{34} + 64$

$[1, 31] =$
$[7, 37] =$
$= 31$ реш.

$76 + 2^{33}x - 2x > y \geq 3\cdot 2^{34} + 2^{x}$ $\quad x \in (6; 38)$

$76 + 2^{33}\cdot 7 - 14 > y \geq 3\cdot 2^{34} + 128$

$62 + 7\cdot 2^{33} > y \geq 6\cdot 2^{33} + 128$ $\quad 7$

$56 + 10\cdot 2^{33} > y \geq 6\cdot 2^{33} + 1024$ $\quad 10.$

$* 36 + 10\cdot 2^{33} > y \geq 6\cdot 2^{33} + 2^{20}$ $\quad 20$

$10 + 33\cdot 2^{33} > y \geq 6\cdot 2^{33} + 2^{33}$ $\quad 33$

$38\cdot 2^{33} > y \geq 6\cdot 2^{33} + 32\cdot 2^{33}$ $\quad 38$

при $\begin{cases} x = 6. \\ x = 38. \end{cases} \Rightarrow y_1 = y_1 \Rightarrow x \in \{7; 37\}$

$39\cdot 2^{33} - 2 \geq y \geq (6+64)\cdot 2^{33}$

уже не подходит и дальше не будет. при $x \geq 39$.

При $x < 6$: Ответ: 31 решение.

$6.6 + 5\cdot 2^{33} > y \geq 6\cdot 2^{33} + 5\cdot 2^{5}$

$(0{,}25y^{8})^{-\ln 0{,}5y} = 0\cdot y^{\ln\left(\frac{128}{y^{6}}\right)}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	1

$261 : 3 = 87$, $1029 : 3 = 343$, $343 : 7 = 49$

$343 \cdot 27$: $2401 + 686 = 9261$

Числа: 1; 3; 9; 7.

Всего: 7773

1) 7773 | 3311

2) 7773 | 9111

$3396 - 128 = 3268$

1) $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{6} = 56$

$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4\cdot5}{2} = 10$

$56\cdot10 = 560$

2) $C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{8\cdot7\cdot6}{6} = 56.$

$C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{4\cdot5}{2} = 10.$

$C_2^1 = \frac{2!}{1!1!} = 2$

$560\cdot2 = 1120.$

Ответ: $560\cdot3 =$
$= 1500+180 =$
$= 1680.$ ~~т.~~ ч.

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x =$

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$7+38$ $\frac{8+37}{2} \cdot 30$ $45 \cdot 15$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x \cdot \cos 2x.$

$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 7x \cdot \sin 2x$

2^7+2^8 $7+8$ $36=$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \cancel{\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos 4x} = 0.$

$\sin 7x \cdot \cos 2x - \sin 7x \cdot \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos^2 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin^2 2x$

$\cos 2x\left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x\right) - \sin 2x\left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x\right)$

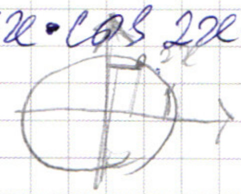
$\sin\frac{\pi}{6} \cdot \cos 9x + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \sin 9x + \sin 5x \cdot \cos$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$2\sin 7x \cdot \cos 2x - 2\sin 7x \cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}} 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0.$

$2\sin 7x \cdot \cos 2x - 2\sin 7x \cdot \sin 2x + \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}}\sin^2 2x - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 0$



$\sin\frac{\pi}{2} - 2x$

$+\sqrt{2}(\sin 2x + 1)(\sin 2x - 1)$

$(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0.$

$\sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2}\sin 7x - \sin 2x - \cos 2x) = 0.$

$\cancel{\sin 2x - \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0}$

$\cancel{2\sin\frac{\pi}{4} \cdot \cos(2x}$ $\quad 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$\cancel{\sqrt{2}\sin 7x + \sqrt{2} \cdot 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)}$

$\cancel{\sin 7x + 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0.}$

$\cancel{2\sin\left(4{,}5x - \frac{\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(2{,}5x - \frac{\pi}{8}\right) = 0.}$

$2\sin\left(4{,}5x - \frac{3\pi}{8}\right) \cdot \cos\left(2{,}5x + \frac{3\pi}{8}\right) = 0.$

$\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\cancel{\sin\frac{\pi}{4}} \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 7x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$\sin 7x - \sin\left(\frac{3\pi}{4} - 2x\right) = 0.$

$$\begin{array}{r} 66 \\ \times\ 31 \\ \hline 66 \\ 198 \\ \hline 2046 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2046 \\ +\ 1350 \\ \hline 3396 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$(y-2x)(y+x) - 4(y-2x) = 0.$

$(y-2x)(x+y-4) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4-x \end{array}\right. \qquad x = 0{,}5y$$

1) $(16x^6)^{-\ln x} = 2x^{\ln(2/x^6)}$

$(16x^6)^{-\ln x} = 64x^{6\ln\frac{1}{3x^6}}$

~~2) $x^2(4-x)^4 = (4-x)$~~

~~$x^2(16-$~~

$xy^{2-2/\ln x} = y^{\ln y/x^7}$

$4x^{3-2\ln x} = 2x^{\ln 2/x^6}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)