

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- + 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 532 (пересчитали)

- X 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- + 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- + 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- а) X 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

- + 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{33} < 76 + 2x \cdot 2^{32} - 2x$$

$$6 \cdot 2^{33} \text{ дано } < , x \cdot 2^{33}$$

$$\exists x = 6$$

$$2^6 + 6 \cdot 2^{33} < 76 + 6 \cdot 2^{33} - 12$$

$$64 < 64 \Rightarrow y \text{ не имеет решений} \Rightarrow x \geq 7$$

$$2^{x-33} + 6 \neq x \Rightarrow x \leq 37$$

Количество решений для y = длине отрезка $\Rightarrow$

$$2^{33}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 37) + 76 \cdot 31 - 6 \cdot 2^{33} \cdot 31 -$$

$$- 2^7 - 2^8 - \dots - 2^{37} - 2(7 + 8 + 9 + \dots + 37) =$$

$$= 496 \cdot 2^{33} + 76 \cdot 31 - 6 \cdot 2^{33} \cdot 31 - 2 \cdot 672 -$$

$$- 16 \cdot 2^{33} - 8 \cdot 2^{33} - 4 \cdot 2^{33} - 2 \cdot 2^{33} - 2^{33} - 2^{32} - \dots - 2^7 =$$

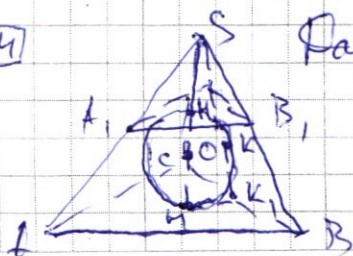
$$= 278 \cdot 2^{33} + 76 \cdot 31 - 2 \cdot 672 - \frac{1}{2} \cdot 2^{33} - \frac{1}{4} \cdot 2^{33} - \dots - \frac{1}{2^8} \cdot 2^{33} =$$

$$= 278 \cdot 2^{33} + 76 \cdot 31 - 2 \cdot 672 - \left(1 - \frac{1}{2^8}\right) \cdot 2^{33} =$$

$$= 278 \cdot 2^{33} + 1140$$

Ответ: $278 \cdot 2^{33} + 1140$

[4]

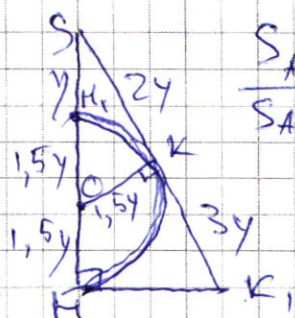


Равно: K, L, M - точки касания;

$$\frac{S_{A_1 B_1 C_1}}{S_{ABC}} = \frac{1}{16}$$

Найти: $\angle KSO$

Решение:



$$\frac{S_{ABC}}{S_{A,B,C_1}} = \frac{16}{1} \Rightarrow \frac{SH_1}{SH} = \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow SH_1 = y, H_1H = 3y \Rightarrow R = 1.5y$$

$$\sin KSO = \frac{1.5y}{2.5y} = \frac{3}{5} = 0.6$$

Найти: S_{KLM}

Решение: $KK_1 = SK_1 - SK, HK_1 = 3y \Rightarrow SK_1 = 5y \Rightarrow$

$$\frac{SK}{KK_1} = \frac{2}{3} = \frac{SK}{SK_1} = \frac{2}{5} \Rightarrow \frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \frac{4}{25} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{KLM} = 16 \cdot \frac{4}{25}$$

$$\text{Ответ: } S_{KLM} = \frac{64}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11

1) $9261 = 7^3 \cdot 3^3 \cdot 1^2 = 7^3 \cdot 9^1 \cdot 3^1 \cdot 1^3$

2) Рассмотрим общее число комбинаций из 3-х тысяч и 3-х сотен

$$\left. \begin{array}{l} 333*** - 1 \\ 337*** - 3 \\ 37*** - 6 \\ 7**** - 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 20$$

3) Рассмотрим общее число вариантов расположения единиц в 8-ми значном числе

$$\left. \begin{array}{l} 1***** - 7 \\ 1***** - 6 \\ 1***** - 5 \\ 1***** - 4 \\ 1***** - 3 \\ 1*** - 2 \\ 11 - 1 \end{array} \right\} \Rightarrow 28$$

Если мы будем располагать 9 и 3 в 8-ми значном числе, то вариантов будет в 2 раза больше

4) Общее количество

$$\left. \begin{array}{l} 7^3 \cdot 3^3 \cdot 1^2 = 20 \cdot 28 = 560 \\ 7^3 \cdot 9^1 \cdot 3^1 \cdot 1^3 = 20 \cdot 56 = 1120 \end{array} \right\} \Rightarrow 1680 \text{ - общее кол-во вариантов}$$

Ответ: 1680

$$\begin{aligned} [2] \quad & \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \\ & -2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \\ & -\sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad \cos 4x = 0 \end{aligned}$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \text{ где } n - \text{целое}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n$

5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

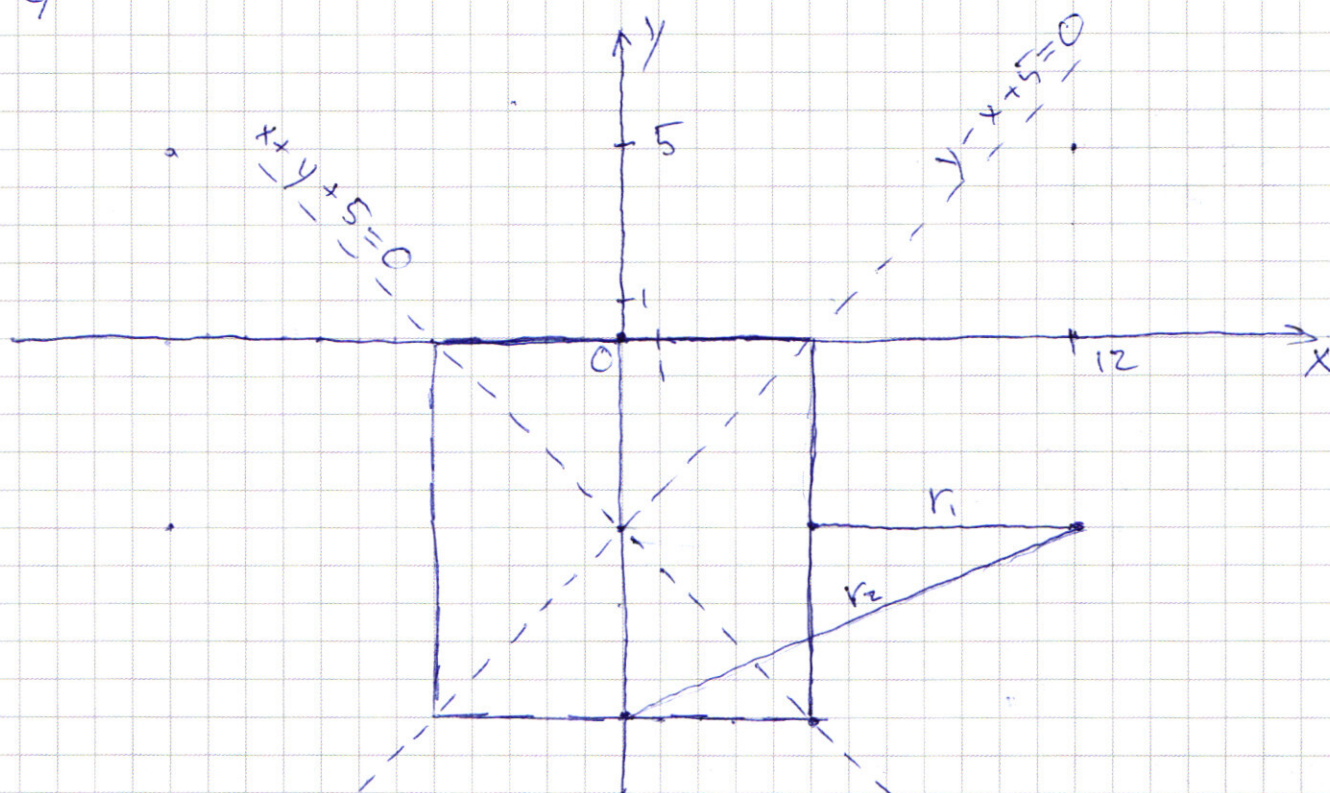
4 симметричных окружности или точки

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0, y-x+5 \geq 0 \\ y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 < 0, y-x+5 \geq 0 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \leq 0, y-x+5 < 0 \\ y=-10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0, y-x+5 < 0 \\ x=5 \end{cases}$$

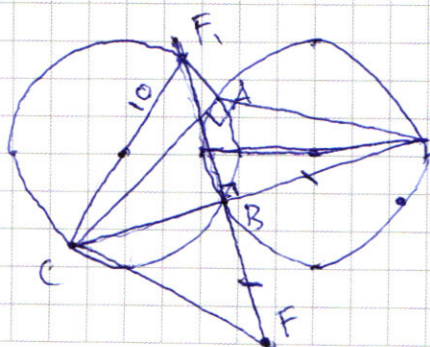


При $a = r_1^2$ решения: $(5; -5)$ и $(-5; -5)$ $r_1 = 7 \Rightarrow a = 49$

При $a = r_2^2$ решения: $(0; 0)$ и $(0; -10)$ $r_2^2 = 12^2 + 5^2 = 169 \Rightarrow a = 169$

Ответ: 49, 169.

6



Дано: $R=10$; $\angle CAB=90^\circ$,

$BF=BD$; $BF \perp BD$.

Найти: CF



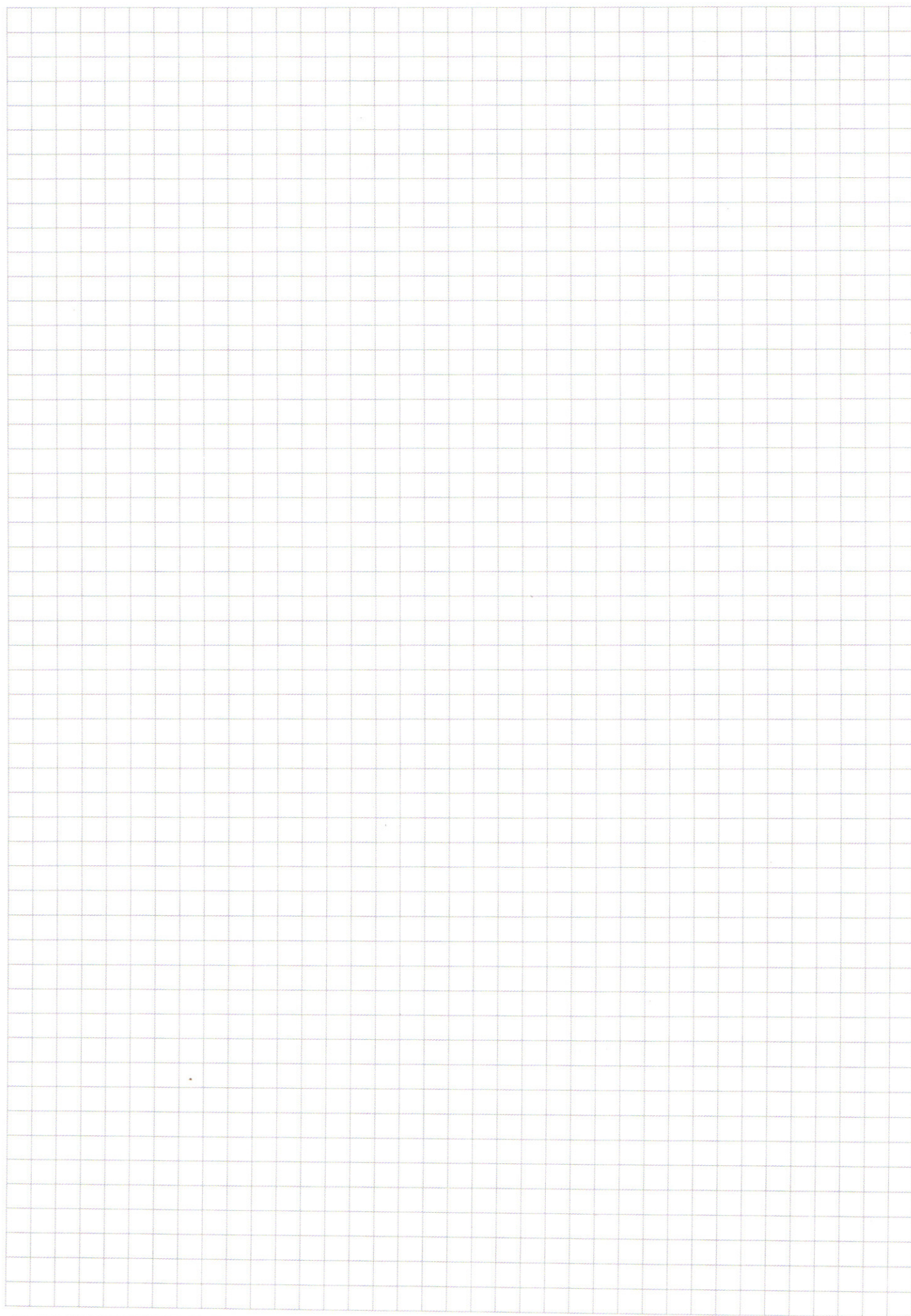
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

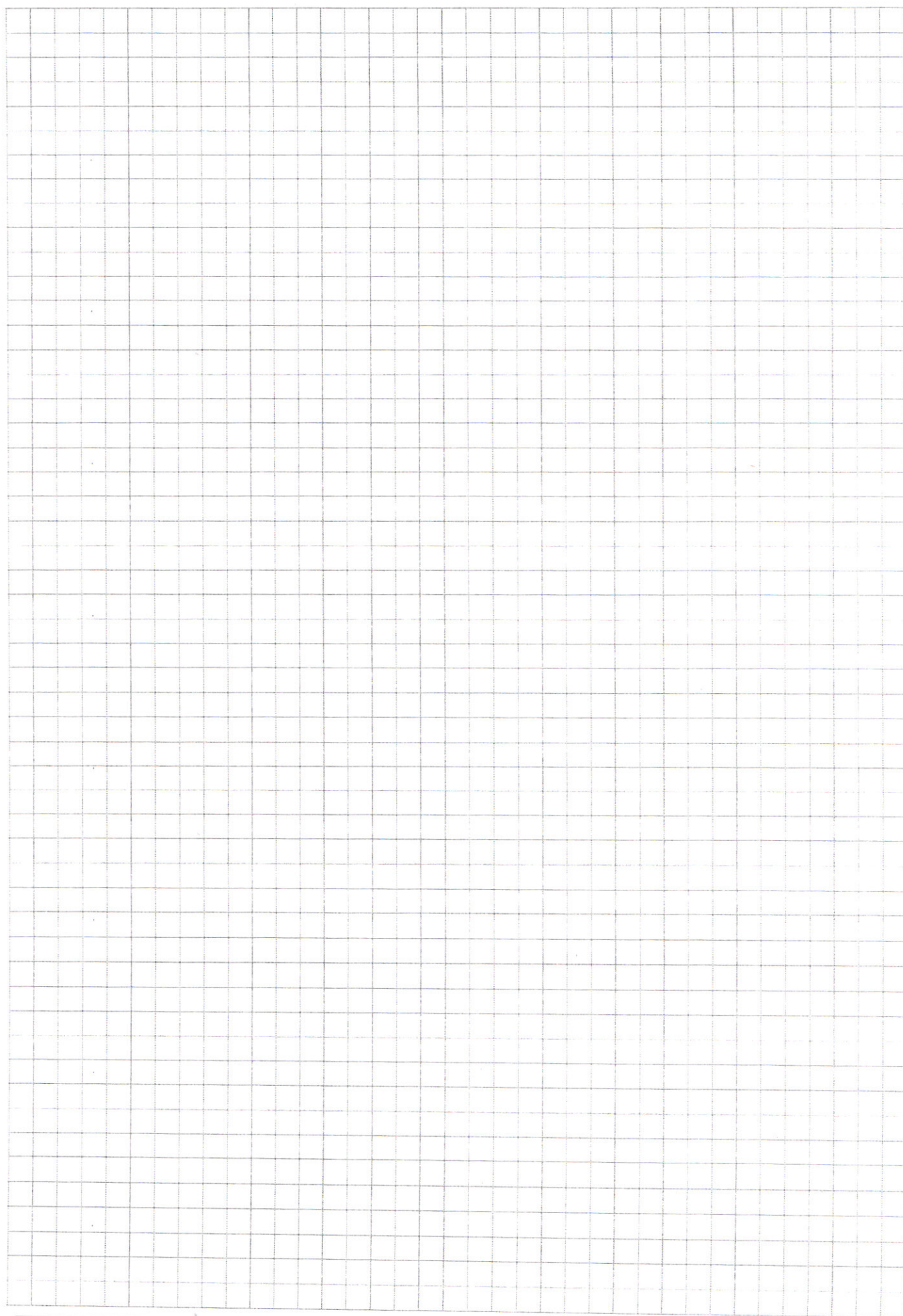
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

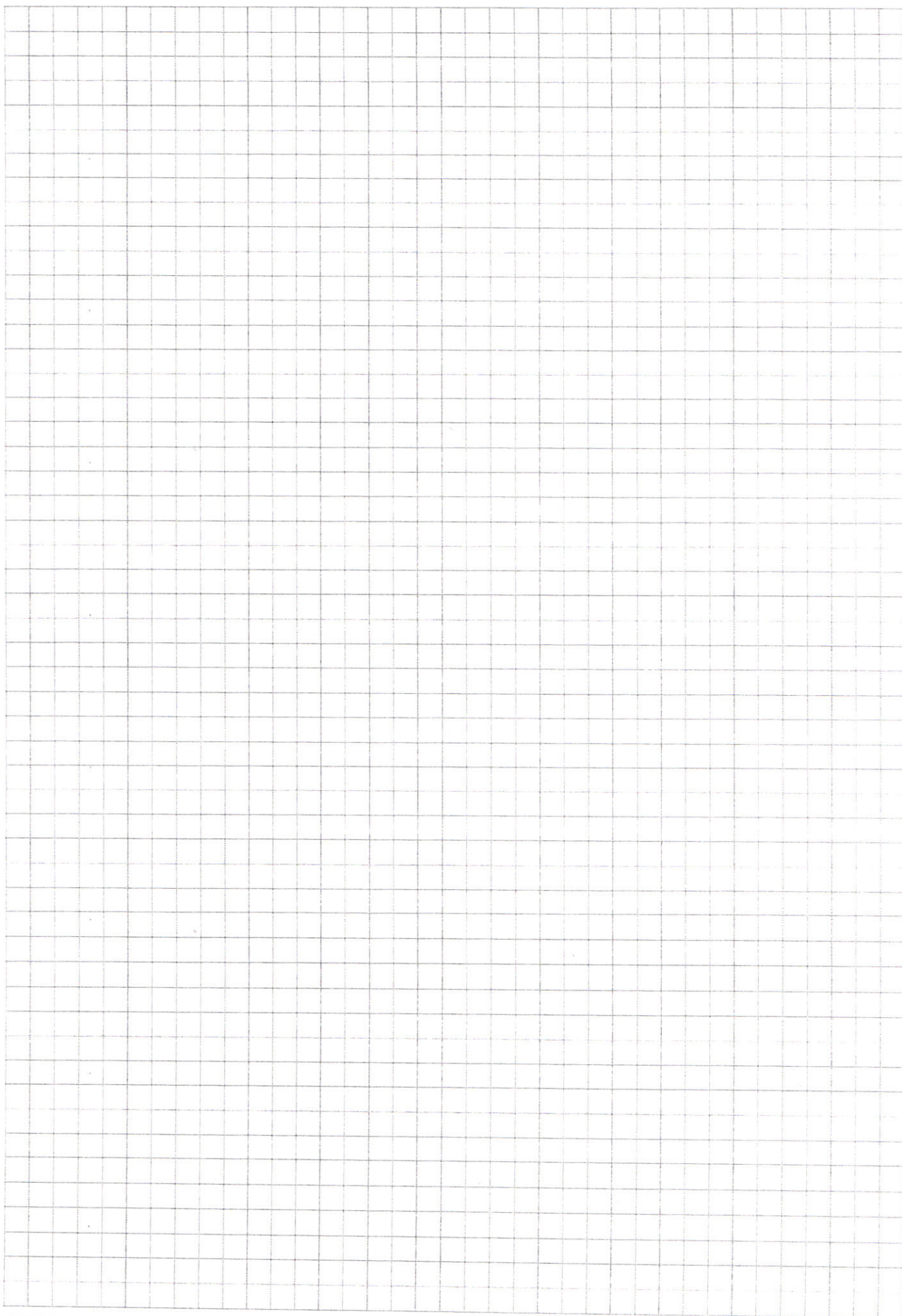
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

(заполняется секретарем)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

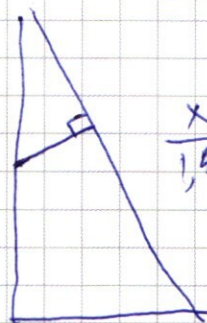
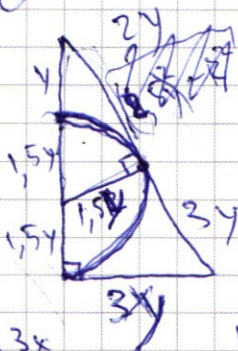
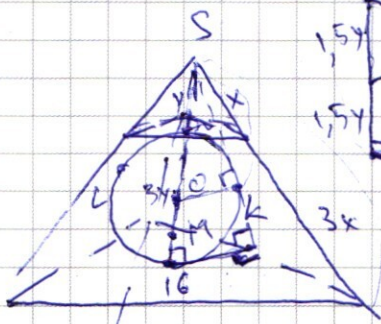
$$2) \cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = 0$$

$$4x = \pi n$$

$$x = \frac{\pi n}{4}$$



$$\frac{x}{1,5y} = \frac{4y}{2y}$$

$$3) x \neq 0$$

$$x > 0$$

$$y > 0$$

$$\frac{4}{25}$$

$$S = 16 \cdot \frac{4}{25}$$

$$\frac{R}{x} = \frac{\sqrt{(2,5y)^2 - R^2}}{4y}$$

$$x = \frac{4Ry}{\sqrt{(2,5y)^2 - R^2}}$$

$$y^2 - 2xy + x^2 + xy - 3x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(x-y)^2$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4) \ln x} = \frac{y \ln y}{y \ln x^2}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x} \cdot y^{4 \ln x}} = \frac{y \ln y}{y \ln x^2}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x}} = y \ln y \cdot y^{3 \ln x}$$

$$\sin \angle = \frac{1,5x}{2,5x} = \frac{\ln y + 3 \ln x}{2,5x}$$

$$= 0,6$$

$$\frac{\ln y}{x} = \frac{\ln y}{x} + \frac{3 \ln x}{x} = \frac{\ln y}{x} + \frac{3 \ln x}{x}$$

$$\pm 88 \pm 6$$

$$\begin{matrix} \pm 88 \pm 6 \\ \pm 88 \pm 6 \\ \pm 88 \pm 6 \end{matrix}$$

3	7	3	3	7	7	7	3	3	3	7	7				
3	7	3	7	3	7	7	3	3	7	3	7				
3	7	3	7	7	3	7	3	3	7	7	3				
3	7	7	3	3	7	7	3	7	3	3	7				
3	7	7	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	3	7	7
3	7	7	7	3	3	7	7	3	3	3	7				
						7	7	3	3	7	3				
						7	7	3	7	3	3				
						7	7	7	3	3	3				

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 7$

$$256 + 16 = 272$$

$$76 + 7 \cdot 2^{33} - 14 - 128 - 6 \cdot 2^{33} = 76 + 2^{33} - 142 = 2^{33} - 66$$

$$76 + 8 \cdot 2^{33} - 16 - 2^8 - 6 \cdot 2^{33} = 2 \cdot 2^{33} - 196$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 7 \\ \hline 217 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 672 \overline{) 131} \\ - 62 \\ \hline 52 \end{array}$$

$$3 \cdot 2^{33} - 2^9 - 18 + 76$$

20

$$31 \cdot 2^{33} - 16 \cdot 2^{33} - 74 + 76 = 15 \cdot 2^{33} - 2$$

$$7 \cdot 31 = \underline{217}$$

$$496 - 217 = 279$$

$$2^{33}(1+2+3+4+5+6+\dots+31) + 76 \cdot 31 - \cancel{6 \cdot 2^{33} \cdot 31} - 2^7 - 2^8 - 2^9 \dots - 2^{37} - \underline{2(7+8+9+\dots+37)} =$$

$$= 496 \cdot 2^{33} + 76 \cdot 31 - \cancel{6 \cdot 2^{33} \cdot 31} - 2 \cdot 672 -$$

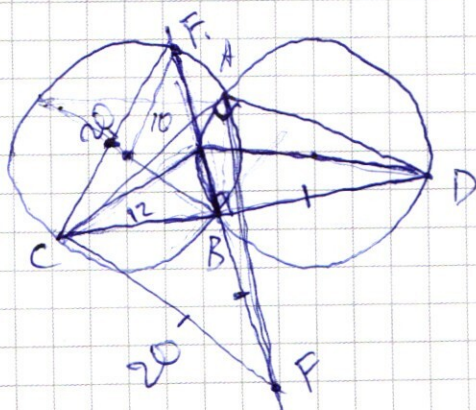
~~$$-16 \cdot 2^{33} - 8 \cdot 2^{33} - 4 \cdot 2^{33} - 2 \cdot 2^{33} - 2^{33} - 2^{32} \dots =$$~~

$$= 279 \cdot 2^{33} + \frac{31}{1} \cdot 2^{33} - 2 \cdot 672 - \frac{1}{2} \cdot 2^{33} - \frac{1}{4} \cdot 2^{33} - \dots - \frac{1}{2^{26}} \cdot 2^{33} =$$

$$= 279 \cdot 2^{33} + 76 \cdot 31 - 2 \cdot 672 - \left(1 - \frac{1}{2^{26}}\right) \cdot 2^{33} =$$

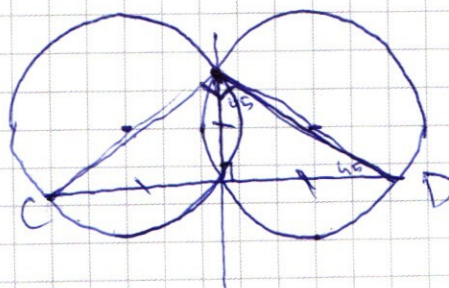
$$= \left(278 + \frac{1}{2^{26}} \right) 2^{33} + 1012 = 278 \cdot 2^{33} + 2^7 + 1012 =$$

$$= 278 - 2^{33} + 1140$$



$$BF = BD$$

~~$R^2 + R^2$~~



a) ~~20~~

$$y^2 - 4y + 4 - 4 + 8x - 2x^2$$

$$(y-2)^2 = (2x-2)^2 - 2x^2$$

$$y=0 \quad x=0$$

$$\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$x+y+5=0$$

$$y = -x-5$$

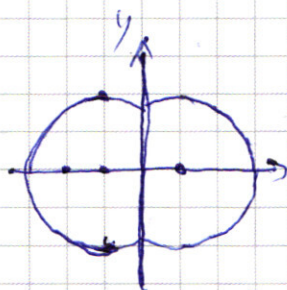
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-1)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$$y = x-5$$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

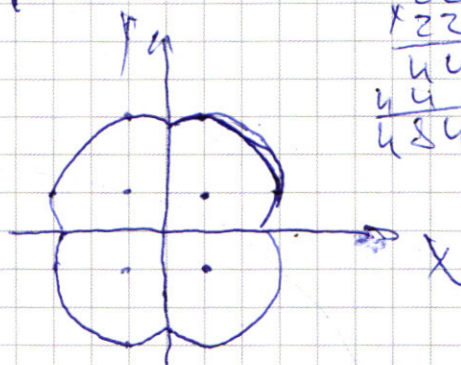
$$2y=0 \quad y=0$$

$$(|x|-1)^2 + y^2 = 4$$



$$(|x|-1)^2 + y^2 = 4$$

$$(|x|-1)^2 + (|y|-1)^2 = 4$$



$$\begin{array}{r} 22 \\ \times 22 \\ \hline 44 \\ 44 \\ \hline 484 \end{array}$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x=10$$

$$x=-5$$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$x=5$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y=20$$

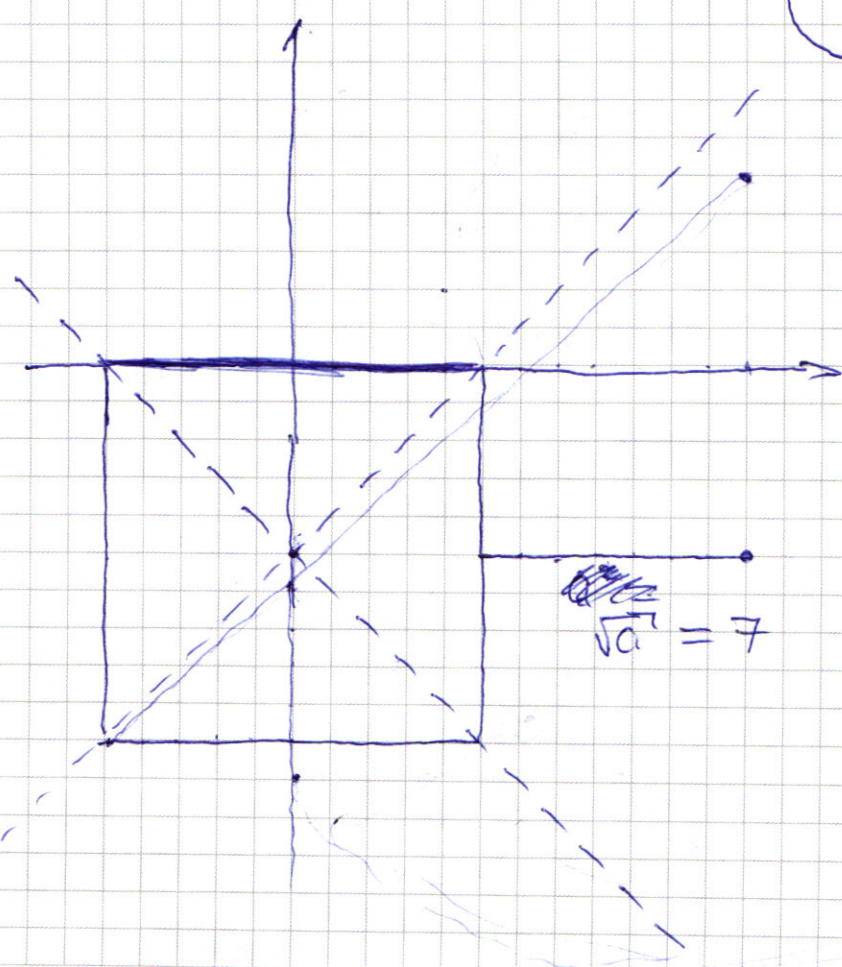
$$y=-10$$

$$17^2 + 15^2 = 124$$

$$289 + 225 = a = 7$$

$$= \sqrt{524}$$

$$a = 524$$

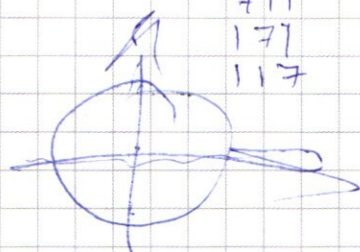


$$\sqrt{a} = 7$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 0 0 0 0 0 0 0

$$\frac{\pi}{2} + \pi n$$



7331

711
177
117

117

2.

$$\begin{array}{r} 926 \ 119 \\ \underline{9} \\ \underline{26} \\ \underline{18} \\ \underline{81} \\ \underline{21} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \ 19 \\ \underline{9} \\ \underline{42} \\ \underline{9} \\ \underline{39} \\ 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ - 28 \\ \hline 63 \end{array}$$

$7^3 \cdot 3^3$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ - 9 \\ \hline 12 \\ - 12 \\ \hline 9 \\ - 9 \\ \hline 0 \end{array}$$

7	7	7	3	3	3	V	1
7	7	7	9	3	1	1	1

1	1
1	
2	
4	
1	
1	
1	

- 1
- 2
- 3
- 4
- 5
- 6
- 7

$$\begin{array}{r} 7 \\ 28 \\ \times 19 \\ \hline 252 \\ 28 \\ \hline 532 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x =$$

532.3

1596

1	1	3	3	7	7	7	1
1	1	3	3	7	3	7	2
1	1	3	3	7	7	3	3
1	1	3	3	7	7	3	4
1	1	3	7	3	3	7	5
1	1	3	7	3	7	3	6
1	1	3	7	3	7	7	7
1	1	3	7	7	3	3	8
1	1	3	7	7	3	7	9
1	1	3	7	7	7	3	10
1	1	7	3	3	3	7	11
1	1	7	3	3	7	3	12
1	1	7	3	3	7	7	13
1	1	7	3	7	3	7	14
1	1	7	3	7	7	3	15
1	1	7	7	3	3	3	16
1	1	7	7	3	3	7	17
1	1	7	7	3	7	3	18
1	1	7	7	7	3	3	19

$$7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \quad 38 \cdot 2 = 19 \cdot 4$$

$$-2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}^{-2}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x$$

$$2^{34} \cdot 3 = \underbrace{1,000,000}_{34} \cdot 3 = \underbrace{11,000,000}_{34}$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ \times 31 \\ \hline 76 \\ 228 \\ \hline 2356 \end{array}$$

$$y \geq \underbrace{1,0000}_x + \underbrace{11,000,000}_{34}$$

$$76 = 1001100$$

$$2^{33} = \underbrace{1,000,000}_{33} - 10$$

$$\underbrace{11111110}_{32}$$

$$y < 1001100 + \underbrace{11111110}_{32} \cdot x$$

$$y \geq 2 + 3 \cdot 2^{34} = 2(1 + 2^{33}) = 2(1 + 2^{32} \cdot 6)$$

$$y < 76 + 0 \cdot x \Rightarrow y < 76 + 2(2^{32} - 1)$$

$$76 + 2(2^{32} - 1) - 2(1 + 2^{32} \cdot 6) =$$

$$= 76 + 2^{33} - 2 - 2 - 6 \cdot 2^{33} =$$

$$= 76 - 4 - 5 \cdot 2^{33} \Rightarrow x \geq 6$$

$$76 + 2(2^{32} - 1) - 6 - 2^6 - 6 \cdot 2^{33} =$$

$$= 76 + 2^{33} - 6 - 12 - 2^6 - 6 \cdot 2^{33} =$$

$$= 76 - 12 - 64 = 0 \Rightarrow x \geq 7$$

$$x = 38$$

$$\cancel{76 + 38 \cdot 2^{33}} - \cancel{76} - \cancel{32 \cdot 2^{33}} + \cancel{6 \cdot 2^{33}} = 0$$

$$\begin{array}{l} 2^{x-38} \geq x \\ x = 38 \\ 32 + 6 \geq 38 \end{array}$$

$$225 + 37 = 262$$

$$120 + 34 + 35 + 36 + 37 = 70$$

$$1121314151617181920$$

$$55$$

$$10$$

$$55$$

$$10$$

$$55$$

$$10$$

$$55 + 155 + 255 + 31 = 496$$

$$410 + 262 = 672$$

$$255$$

$$155$$

$$55$$

$$10$$

$$55$$

$$10$$

$$55$$

$$10$$

$$55$$