

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в рз
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $19261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$

2) ~~Эти числа~~ Эти множители (их 6) ^{эти множители} представляют ^{двух} нейтральных чисел трёх нейтральных отрицательно умножения значений, т. е. единиц.

3) П.к. $3 \cdot 7 = 21 > 9$ (макс. цифра), $9 \cdot 3 > 9$, то набор цифр: 333777 и 93777111 .

4) Их к-во можно считать, указав общее число перестановок, а потом разделив на число перестановок повторяющихся цифр:

$$\text{I)} \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} \quad \text{II)} \frac{8!}{3! \cdot 3!} \quad \text{III)} 3.$$

$$\text{Итого: } \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{3 \cdot 8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{3 \cdot 8!}{6 \cdot 6 \cdot 2} = \frac{7!}{3} = 1680.$$

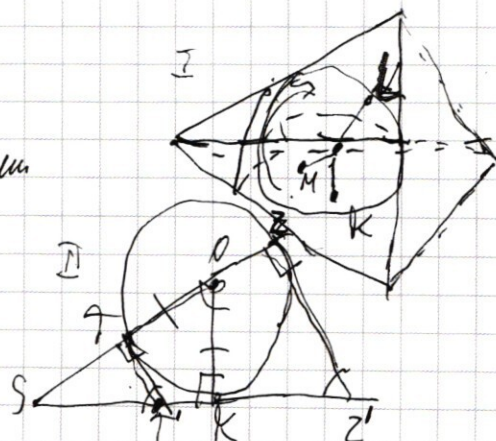
Ответ: 1680.

4) Дан: (QT) - сфера, S - трёхгранный угол, K, M и N - точки касания (O, P) сфера отрезки угла S; сечение S плоск., перпенд. SO и кас.

Q: равны ли площади 1 и 16.

Найти: $S_{\text{пл.к. S}}$ и $\angle KSO$.

Решение:



1) На чертеже II TT' и ZZ' изображены сечения плоскостями KSO, она пересекает O на окружности; TT' и ZZ' - отрезки плоскостей - сечения.

2) П.к. сечения трёхгранного угла - треугольники, из отн. между их площадями (они равны (треуг. подобны) равны квадрату

Расср. по формуле $k^2 = \frac{16}{1} \Rightarrow k = 4 \Rightarrow \frac{TT'}{22'} = \frac{1}{4}$.

3) $\frac{ST}{TT'} = \frac{ST + 2R}{22'}$

$ST = \frac{1}{4}(ST + 2R)$

$\frac{1}{2}R = \cancel{ST} + \frac{3}{4}ST$

$R = 1,5 ST$

$\sin \angle KSO = \frac{R}{R+ST} = \frac{3}{5}$

$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

4) $ST' = \frac{ST+ST}{\sqrt{1-\frac{9}{25}}} = \frac{5}{4}ST$

$SK = 2,5 ST \cdot \frac{4}{5} = 2ST$

Расположение точек K, L и M в силу симметрии сферы относительно плоскости точек T' и её проекции на грани, содержащих L и M, значит, $S_{\text{окр. KLH}} = 8 \cdot \left(\frac{SK}{ST'}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = 2\frac{14}{25}$.

Ответ: $2\frac{14}{25}$.

15) $\sqrt{x+y+5} + \sqrt{y-x+5} = 10$

$[(x-12)^2 + (y-5)^2] = a$ — 2 реш.

$x+y+5 = I, \quad y-x+5 = II$

1) $I > 0, II > 0$

$2y+10=10$

$y=0$

$x \in [-5; 5]$

2) $I \leq 0, II \leq 0$

$-2y-10=10$

$-2y=20$

$y=-10$

$x \in [-5; 5]$

3) $I > 0, II < 0$

$y-x+5 > 0 \Rightarrow y > x-5$

$x+y+5 - y+x-5 = 10$

$2x=10$

$x=5$

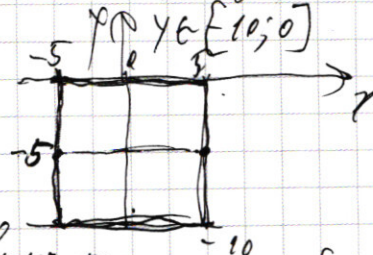
$y \in [10; 0]$

4) $I \leq 0, II > 0$

$2x=-10$

$x=-5$

$y \in [10; 0]$



Видно, что получается такой квадрат, все решения лежат на нём.

2) Если мы возьмём такой a , чтобы $\neq 0$ двумя различными способами $x \neq 0$ и соответствующие значения y на отрезках $\neq 0$ и -10 от y , то найдём и два решения, в которых x имеет тот же модуль, но другой знак; аналогично получается для всех

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \neq -5$.

3) Если взять $x=0$, то $a_1 = (y-5)^2 + 144$, но ~~возникает проблема~~
если взять $y = -5$, то $a_2 = 25 + (x-12)^2$ (соответственно
 $a_1 = (0-5)^2 + 144 = 169$, $a_2 = 25 + (-5-12)^2 = 244$ (при $y=0$ и $x=5$
те же числа).

Ответ: 169, 244.

15) Даны $(4, 10)$, $(2, 10)$ — центры, радиусы OA и OB .
 $\angle CAD = 90^\circ$, $B \in CD$, $BF \perp CD$, $CF = BD$.

Найти: CF ?

Если $BC = 12$, CF — ?

Решение:

1) Центры O_1 и O_2 — центры окружностей ΔABO_1 и ΔABO_2 равны,
 $AO_1 = AO_2$ (т.к. $\sin \angle BO_1A = \sin \angle BO_2A$).

2) $\Delta AO_1C = \Delta AO_2D$ (стороны равны по пункту 1, как радиусы).

3) $\angle O_1AO_2 = 90^\circ$ ($\angle CAD + \angle O_1AC - \angle O_2AD$), $\angle O_1BO_2 = 90^\circ \Rightarrow \angle BO_1A$ и $\angle BO_2A$ равны, т.к.
 90° как углы.

4) По т. косинусов $BC^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(\alpha - 90^\circ)$ ($\alpha = \angle CO_1A$),

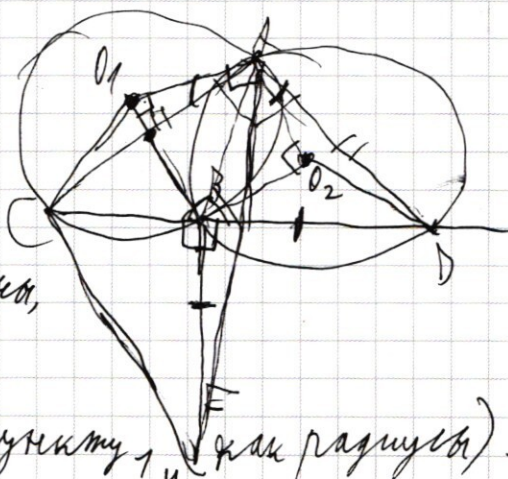
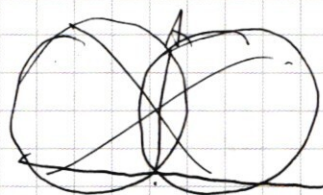
$BF^2 = BD^2 = r^2 + r^2 - 2r^2 \cos(360^\circ - 90^\circ - \alpha)$.

$BC^2 + BF^2 = 4r^2 - 2r^2(\cos(70^\circ - \alpha) + \cos(\alpha - 90^\circ)) = 4r^2 - 2r^2 \cdot 2 \cdot \cos 90^\circ \cdot \cos(180^\circ - \alpha) = 4r^2$.

$BC^2 + BF^2 = CF^2 = 400$, $CF = 20$.

Ответ: 20. $CF = 20$.

2) $\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$



$$\sqrt{2} \sin\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} (\cos 9x \cos 5x + \sin 9x \sin 5x) = 0.$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\cos 4x + \cos 2x}{\sqrt{2}} =$$

$$\textcircled{3} \quad \begin{cases} x^2 y^{\ln 2} = y^{\ln(4/x^2)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0.$$

$$D = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2.$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} \Rightarrow y = -x+4, y = 2x.$$

$$1) \quad (16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{16x^6}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 5 \ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2} \cdot (64x^6)^{-\ln x} \quad | : 16x^6^{-\ln x}$$

$$(2x)^{\ln 2} \cdot 4^{-\ln x} = 1.$$

$$x = 2.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(16z^6)^{\ln 7} = (2z)^{\ln \frac{1}{64z^6}}$$

$$(16z^6)^{-\ln 7} = 2z^{-6\ln 2z}$$

$$(16z^6)^{-\ln 7} = (64z^6)^{-\ln 2z}$$

$$(16z^6)^{-\ln 7} = (64z^6)^{-(\ln 2 - \ln z)}$$

$$1 = (64z^6)^{-\ln 2} \cdot 4^{-\ln z}$$

$$z^{-6\ln 2} \cdot 4^{-\ln z} = \frac{1}{64} 64^{\ln 2}$$

$$-2\sin 7x \sin 2x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x (\sin 2x \cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$-2\sin 7x \sin 2x + 2\sin 7x \cos 2x + \sqrt{2} \cos^2 2x = 0$$

$$\sin 2x (-2\sin 7x - \sqrt{2} \sin 2x) + \cos 2x (2\sin 7x + \sqrt{2} \cos 2x) = 0$$

$$-- (\cos(4x - \frac{\pi}{4}) - \sin(4x - \frac{\pi}{4}))$$

$$-2(\cos 2x - \frac{\pi}{2}) \cos 2x + \frac{\pi}{2}$$

$$2R = \frac{3}{4}S$$

$$R = \frac{3}{8}S$$

$$y > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

$$x > -10$$

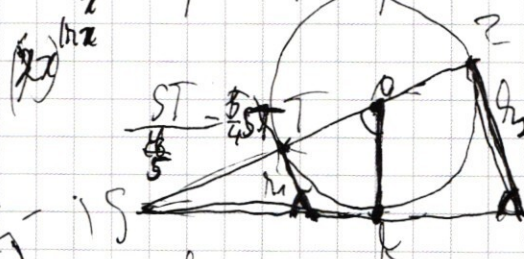
$$(x^2 y)^{\ln 7} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$y > 0 \text{ and } y \neq 1, \ln \frac{y}{x^2} \text{ dim}$$

$$\sin \alpha = \frac{56}{200} = \frac{14}{50} = \frac{7}{25} (x^2 y)^{-\ln 7} = \frac{1}{y} (\ln y - \ln x^2) \cdot y^{-\ln 2x^2}$$

$$\frac{1}{(x^2 y)^{\ln 7}} = \frac{1}{y^{\ln y} \cdot y^{2\ln x}}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x}} \cdot y^{-\ln y} = y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}$$



$$\frac{h_2}{h_1} = 2\sqrt{2}$$

$$d = (2\sqrt{2} - 1)S$$

$$\frac{1}{2}d = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}S$$

$$\frac{1}{2}d = \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}S + 1$$

$$\begin{vmatrix} -4 & -8 & +5 \\ 7 & +4 & +5 \\ +5 & & \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & +8 & +5 \\ 7 & - & +5 \\ -5 & & \end{vmatrix} = 10$$

$$x + y + 5 > 0 \quad y > -x - 5$$

$$y - x + 5 > 0 \quad y > x - 5$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

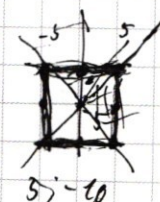
$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$

$$-3.75$$



$$x < -5$$

$$\frac{-2\ln x}{x} \cdot y = y \cdot \frac{-4\ln x}{x} \Rightarrow y = y \cdot \frac{-2\ln x}{x} \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right) = y \cdot \frac{-2\ln x}{x} \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{1}{x} \Rightarrow -\ln a = -\ln x \Rightarrow \frac{-x+4}{x^2} = \frac{4}{x^2} \Rightarrow$$

$$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0$$

$$\cos \sqrt{2} \sin \left(6x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2\sqrt{2} \sin 4x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin \sqrt{2} \cos 2x + \sin 2x \sin 3x - \cos 2x \cos 3x + \sin 2x \sin 3x - \sqrt{2} (\cos 2x \cos 3x + \sin 2x \sin 3x) + \sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x +$$

$$+ \sin 2x \cos 3x + \sin 3x \cos 2x$$

$$\cos 7x \cos 2x - \cos 5x + \cos 5x \sin 4x$$

$$\sin 5x (\sin 4x \cos 4x + 1 - \sin 4x) - \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x - \sqrt{2} \sin 3x)$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^2}}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 2\ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (64x^6)^{-\ln x} \cdot (2x)^{\ln 2}$$

$$2 \sin 2x \sin 7x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$

$$\frac{\sin 2x (\sin 7x + \sqrt{2} \sin 4x)}{\cos 2x} + \frac{2 \sin 7x}{\sin 2x} - \sqrt{2} \tan 2x + \sqrt{2} \tan 2x = 0$$

$$-\sqrt{2} \cos 9x \cos 5x + \sqrt{2} \sin 9x \sin 5x$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 9x \cos 5x$$

$$\frac{\cos 7x - \cos 2x}{\sqrt{2}}$$

$$2 \cos 9x \cos 5x = \cos 7x + \cos$$

$$\frac{\alpha - \beta}{2} =$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cos \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) =$$

$$\cos 9x \left(1 - \frac{\cos 5x}{\sqrt{2}}\right) =$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 926 \overline{) 10293} \\ \underline{1029} \\ 343 \\ \underline{343} \\ 0 \end{array}$$

1029.9

3707, 3720 3 4 27201

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{9}\right) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$7^3 \cdot 3^3$$

UML 3no 7, 9no 9, 1no 3, 3no 1

$$\begin{aligned} s_1 &= 1 \\ s_2 &= 16 \\ 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\cos(2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})) + \sqrt{2}\sin(5x-\frac{\pi}{4}) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$17, 2^2 + 2^{35} + 2^3$$

$$y \ln \frac{y}{x^2}$$

4940

$$-\ln x = \ln \frac{y}{x^2}$$

$$240 \cdot 7 = \begin{pmatrix} 14 \\ 24 \end{pmatrix} = 7$$

$$7 > 2^2 + 3 \cdot 2^3$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\frac{8!}{3!3!2} + \frac{8!2}{3!3!2} = \frac{7!}{3}$$

$$2(x+y+5) + (y-x+5) = 70$$

$$y^2 - 2y - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(2-12)^2 + (4-5)^2 = 0$$

$$2 \quad \textcircled{2} = \cancel{4}$$
$$y - (4+x)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$d = 16 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

~~$x+y=5$~~

$$x + y + 5 > 0 \quad y > -x - 5$$

$$x - 2 + 5 > 0 \quad y > x - 5$$

$$4+2 \pm 137+4$$

$$y_1 = 2x + 4$$

$$y_2 = -x$$

$$2^7 + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 46 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^n/n! \quad 2 \cdot (2^{32} - 1)$$

$$2) (x^6)^{-1/2} = 2 \ln x^6 = 2 \cdot 6 \ln x = 12 \ln x$$

$$2^2 \cdot 43 \cdot 2^{34} < 96 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2^7 - 2(2^{32} - 1)x < 76 - 3 \cdot 2^{34} \quad x = 8$$

$$2^8 - 2^{36} 4^4 \leq 76 - 2^{35} - 2^{34}$$

~~xe~~ μ57?

$$128 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^2 \ln 2 > \frac{2^{33} - 1}{\ln 2}$$

$$76 + 2^{33} - 14$$

$$2^{33} + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\cos \frac{\sqrt{x}}{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left(4x - \frac{\pi}{4} \right) +$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$x^2 - (4+x)x - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - y - 2 + 8 - 4y = 0$$

$$y^2 - 5y + 6 = 0$$

$$y_1 = \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$y_2 = -1$$

$$= \sin\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 72, 13$$



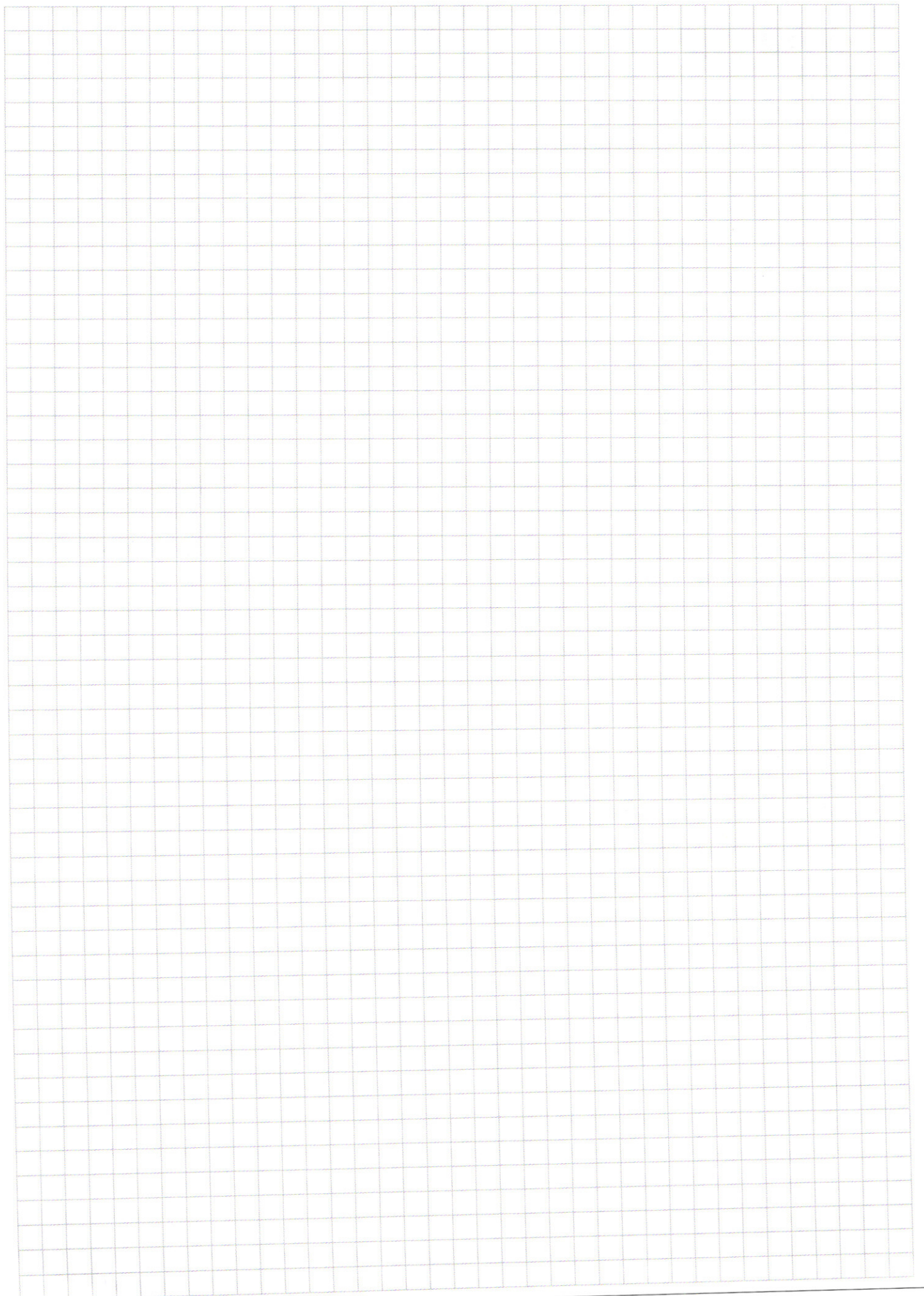
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ»
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ____
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)