

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) 9261 = 9 \cdot 3 \cdot 7^3 = 3^3 \cdot 7^3$$

Поскольку среди цифр числа может быть набор $(9, 3, 7, 7, 7, \overset{1}{\cancel{9}}, \overset{1}{\cancel{3}}, \overset{1}{\cancel{7}})$ или $(3, 3, 3, 7, 7, 7, \overset{1}{\cancel{9}}, \overset{1}{\cancel{3}})$. Другим быть не может, потому что цифры не могут превосходить 9, а и дей^не содержащиеся множителем числа 9261.

1 случай $(9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1)$. Выберем места для 3х семерок $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56$. Теперь расставим 9 и 3 в оставшиеся места (их всего 5) $5 \cdot 4$, все остальные места будут заняты единицами. Получается $56 \cdot 20$ вариантов

2 случай. $(3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1)$ Расставим тройки: $C_8^3 = 56$, в еще расставим 3 семерки в 5 мест: $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 10$, остальные места занимаются единицами. $56 \cdot 10$ вариантов

Складываем 1 и 2 случай

$$56 \cdot 20 + 56 \cdot 10 = 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680

$$2) \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

Применим формулы разности косинусов и суммы синусов: $-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$
 $2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

~~Произведение~~ Произведение равно 0, когда один из множителей равен 0.

$$1) \cos 2x = \sin 2x \quad \cos 2x = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

Косинус равен, либо когда их аргументы равны, либо когда они в сумме сумма аргументов равна $0 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 2x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x \in \emptyset \\ 4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 7x - 2(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x) = 0$$

Преобразуем с помощью формулы суммы.

$$2 \sin 7x - 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$ Синус равен, когда их аргументы равны, или когда аргументы в сумме дают $\pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{cases} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x + 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5| -x + y + 5 | + | y - x + 5 | = 10 \quad (1)$$

$$(11x - 12)^2 + (1y - 5)^2 = a \quad (2)$$

Построим график первого уравнения (1)

$$1) y + x + 5 \geq 0$$

$$y \geq -x - 5$$

$$y - x + 5 \geq 0$$

$$y \geq x - 5$$

Раскроем знаки
модуля:

$$2y + 10 = 10$$

$$2y = 0$$

На данном
отрезке данный
отрезок задает
прямая $y = 0$.

$$2) y + x + 5 \leq 0$$

$$y \leq -x - 5$$

$$y - x + 5 \geq 0$$

$$y \geq x - 5$$

$$-2x \leq 10$$

$$x \leq -5 - \text{вертикальная}$$

прямая.

$$3) y + x + 5 \geq 0$$

$$y \geq -x - 5$$

$$y - x + 5 \leq 0$$

$$y \leq x - 5$$

$$2x = 10$$

$$x = 5 - \text{вертикальная прямая}$$

$$4) y + x + 5 \leq 0 \quad y \leq -x - 5$$

$$y - x + 5 \leq 0 \quad y \leq x - 5$$

$$-2y - 10 = 10 \quad -2y = 20$$

$$y = -10 - \text{горизонтальная}$$

прямая

Данное выражение

задает прямоугольник со

сторонами 10 и 10, то есть квадрат

Второе выражение задает 4 окружности с

одинаковым радиусом $\sqrt{a}$. Найдем центры

даны окружности
 1. $x \geq 0$ $y \geq 0$ (1) $(12; 5)$ 2. $x < 0$ $y \geq 0$ $(-12; 5)$ 3. $x > 0$ $y \leq 0$ $(12; -5)$
 4. $x < 0$ $y < 0$ $(-12; -5)$ Обозначим их на графике

Окружности с центрами в (1) $(-12; 5)$ и $(-12; -5)$ равно удалены от сторон квадрата на 7.

Окружности с центрами в (1) $(12; 5)$ и $(12; -5)$ также равноудалены от сторон квадрата

на расстоянии $\sqrt{7^2 + 5^2} = \sqrt{49 + 25} = \sqrt{74}$

П.к. необходимо, чтобы было равно 2 решения, следовательно, т.к. у нас окружности попарно равноудалены от квадрата, значит, единственные варианты, которые нам могут подойти, это моменты, касающиеся окружностей с квадратом, 1 случай окружности с центрами $(12; -5)$ $(-12; 5)$ касающихся ближайшей стороны квадрата.

Тогда т.к. $r \geq \sqrt{74}$ $r < \sqrt{74}$, значит, обе окружности будут иметь по 1 общей точке с квадратом, а две другие не будут касаться значит $\sqrt{a}$ может быть равно 7, $a = 49$

2 случай окружности касаются с центрами $(-12; 5)$ и $(12; 5)$

Найдём расстояние от двух друг друга окружностей до углов (данных) квадрата, т.к. как необходимо, чтобы при условии касания квадрата с 2 окружностями две другие не касались квадрата.

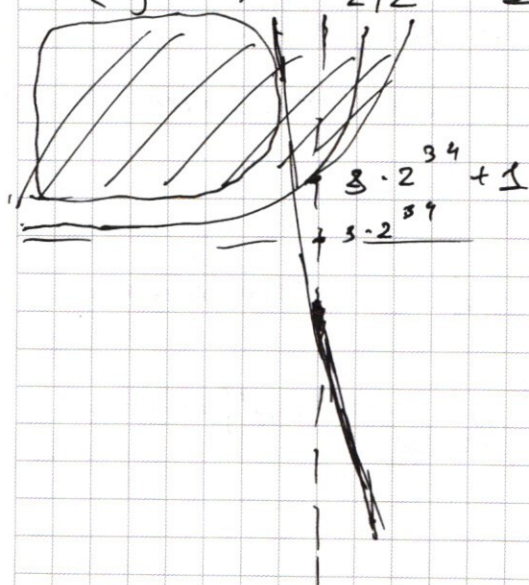
$\sqrt{5^2 + 17^2} > \sqrt{5^2 + 7^2}$, значит, если окр. с центрами

$(-12; 5)$ и $(12; 5)$ касаются квадрата, две другие пересекают квадрат. Такой случай нам не подходит.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Иногда из соображений симметрии понятно, что
большее количество вариантов, где есть только два каса-
ния окружностей с квадратом не существует.
П.к. окружностей можно удалить равноудаленно
от квадрата. Мы рассмотрим по 1 (единичному)
варианту касаний для каждой пары окру-
жностей. Других быть не может, т.к.
центры окружностей, не лежа на
продолжении диагоналей квадрата, не имеют
у каждой окружности единичный

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2^{33} - 2x \end{cases}$$



3 случая окружностями $(12; 5)$ и $(-12; 5)$ касаются
данных вершин квадрата. Тогда радиус
равен $\sqrt{17^2 + 15^2}$. Это больше чем $\sqrt{5^2 + 17^2}$,
значит, две другие окружности касаются
квадрата не будут. Получается данный
вариант нам подходит. $\sqrt{a} = \sqrt{17^2 + 15^2}$

$$a = 17^2 + 15^2 = 289 + 225 = 514$$

Окружности $(12; -5)$ и $(-12; -5)$ всего 2 варианта 1 касаются, т.к. обе окруж. равноудалены от данных точек.

Мы рассмотрим все возможные случаи
касания окружностей с квадратом (единственного
касания одной окружности с квадратом)

Ответ: $a = 49$; $a = 514$

$$\begin{cases} y \geq 2^x \cdot 3 \\ (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})} \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Преобразуем первое выражение:

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

возводим в квадрат

Видно $x > 0$ и $y > 0$

т.к. показательная функция не равна
нулю никогда, можно разделить обе части

$$\frac{x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x}}{y^{\ln y - 7\ln x}} = 1$$

$$\frac{x^{-2\ln^2 x} \cdot y^{-4\ln x \ln y}}{y^{\ln^2 y - 7\ln x \ln y}} = 1$$

$$\frac{e^{-2\ln^2 x} \cdot e^{-4\ln x \ln y}}{e^{\ln^2 y - 7\ln x \ln y}} = \frac{e^{-2\ln^2 x - 4\ln x \ln y}}{e^{\ln^2 y - 7\ln x \ln y}} = e^{-2\ln^2 x - \ln^2 y + 3\ln x \ln y} = 1$$

$$-2\ln^2 x - \ln^2 y + 3\ln x \ln y = 0$$

$$2\ln^2 x + \ln^2 y = 3\ln x \ln y$$

Отсюда все

Рассмотрим 2 случая:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 случай: $\ln x = 0$ (1) или $\ln y = 0$ (2)

1) тогда $\ln^2 y = 0$ $\ln y = 0$

2) $\ln^2 x = 0$ $\ln x = 0$

Получается $x=1$ $y=1$ являются решениями
данного уравнения

2 случай $\ln x \cdot \ln y \neq 0$, значит, на данное
выражение можно разделить обе части:

$$\frac{2\ln^2 x + \ln^2 y}{\ln x \ln y} = 3 \quad \text{разделим почленно}$$

$$\frac{2\ln x}{\ln y} + \frac{\ln y}{\ln x} = 3 \Rightarrow 2\log_y x + \frac{1}{\log_y x} = 3$$

Можно домножить на $\log_y x$, т.к. $x \neq 1$

$$2\log_y^2 x - 3\log_y x + 1 = 0 \quad \text{Пусть } t = \log_y x$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4} \quad t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_x y = 1 \Rightarrow x = y$$

$$\log_x y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = x^2$$

Рассмотрим второе уравнение, подставив
найденные корни:

1 случай: $x=1$ $y=1$

$$\text{получаем } 1 - 1 - 2 + 8 - 4 = 0$$

$$2 \neq 0$$

Значит $x=1$ $y=1$ не подходит

2 случай $x = y$

исключаем: $y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$

$$-2y^2 + 8y - 4y = 0 \quad |:y, \text{ м.к. } y > 0$$

$$-2y + 4 = 0 \quad y = 2 \Rightarrow x = 2$$

$y = 2 \quad x = 2$ нас устраивает

3 случай $x = y^2$

исключаем: $y^2 - y^3 - 2y^4 + 8y^2 - 4y = 0$

$$-2y^4 + 9y^2 - y^3 - 4y = 0 \quad |:y, \text{ м.к. } y > 0$$

$$-2y^3 - y^2 + 9y - 4 = 0$$

$$2y^3 + y^2 - 9y + 4 = 0$$

$$y^3 + y^2 + y^3 - y - 8y + 4 = 0$$

$$y^2(y+1) + y(y^2-1) - 4(2y-1) = 0$$

$$y^2(y+1) + y(y+1)(y-1) - 4(2y-1) = 0$$

$$y(y+1)(y+y-1) - 4(2y-1) = 0$$

$$(2y-1)(y(y+1)-4) = 0$$

$$\begin{cases} 2y-1=0 \\ y^2+y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$y = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \text{ - не подходит, м.к. } y > 0.$$

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$x = \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)^2 = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

Ответ: $y = 2 \quad x = 2$ подходит

$y = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{4}$ подходит

$y = \frac{\sqrt{17}-1}{2} \quad x = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ подходит

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\ln^2 y + 2 \ln^2 x = 3 \ln x \ln y$$

$$\frac{\ln^2 y + 2 \ln^2 x}{3 \ln x \ln y} = 1$$

$$\frac{\ln x}{3 \ln x} + \frac{2 \ln x}{3 \ln y} = 1$$

$$\frac{1}{3} \ln x y + \frac{2}{3} \ln y x = \left(\frac{\ln x y}{3} \right) + \frac{2}{3 \ln x y} = 1 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$$

$$\ln x = 0 \text{ or } \ln y = 0$$

$$\ln y = 0 \quad \boxed{x=1 \quad y=1}$$

$$\ln x y + \frac{2}{\ln x y} = 3 \quad | \cdot \ln x y$$

$$\ln^2 x y - 3 \ln x y + 2 = 0$$

$$\ln x y = 1 \quad \ln x y = 2$$

$$x = y$$

$$y = x^2$$

$$x = y^2$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = \ln_y x = 2 \quad 2 + 1 + 4 - 9 \neq 0$$

$$2 : 16 + 4 - 18 + 4 \neq 0$$

$$-2 : -16 + 4 - 18 + 4 \neq 0$$

$$4 : 128 + 16 - 38 + 4$$

$$\frac{1}{2} : \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{9}{2} + 4 = 0$$

$$\begin{array}{r} 2y^3 + y^2 - 9y + 4 \\ 2y^3 + 2y^2 - 8y \\ \hline -y^2 - y + 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} y^2 + y - 4 \\ 2y - 1 \\ \hline \end{array}$$

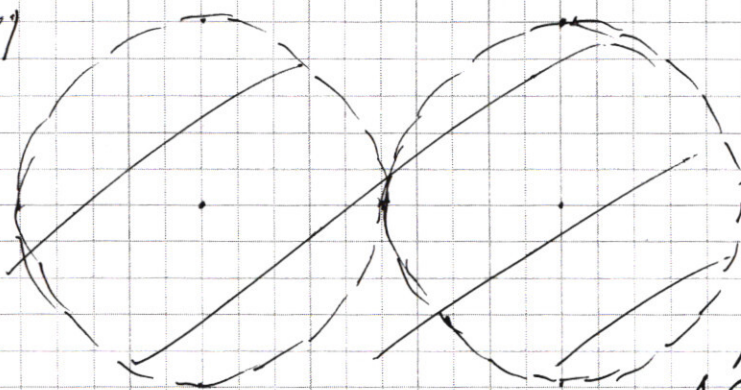
$$3t^2 - 2t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{6}$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1-8}}{4}$$

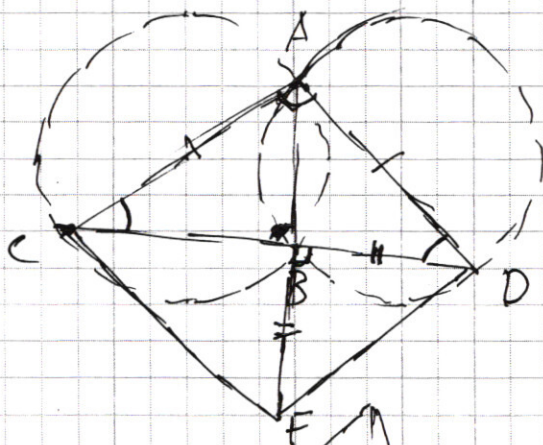
6)



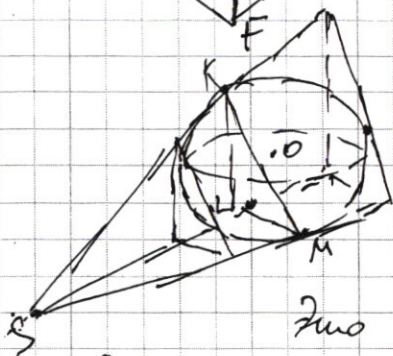
$$\angle ACB = \angle ADB, \text{ т.к.}$$

окружности имеют
равные радиусы и
отмечаются на
равные дуги

$\Rightarrow \triangle ACD$ - равнобедренный
 $AC = AD$



4)



Из условия про площади
сечений для можно
построить картинку (1)

Это трехгранная пирамида, обозна-
чим её вершины буквами.

$$\text{т.к. } S_{DFE} = 1, \text{ а } S_{ABC} = 16$$

$\Rightarrow$ т.к. это параллельное ^{сечение} ~~плоскости~~
пирамиды, $\triangle DFE \sim \triangle ABC$

$\Rightarrow$ стороны относятся с

коэффициентом $\frac{1}{4}$. Также

подобны $\triangle SFE$ и $\triangle SCB$, а т.к. $\frac{EF}{CB} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{SE}{FC} = \frac{1}{4}$ $\frac{SE}{EB} = \frac{1}{4}$ ~~получается аналогично~~
в гранях SAC : $\frac{SD}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{1}{4}$. Получается, что

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Все элементы пирамиды $SDEF$ меньше~~

~~Все грани Δ пирамиды $SDEF$ подобны~~

~~граням $\Delta SABC$~~

~~$SE = SF = SD$ как~~

Все элементы пирамиды $SDEF$ меньше

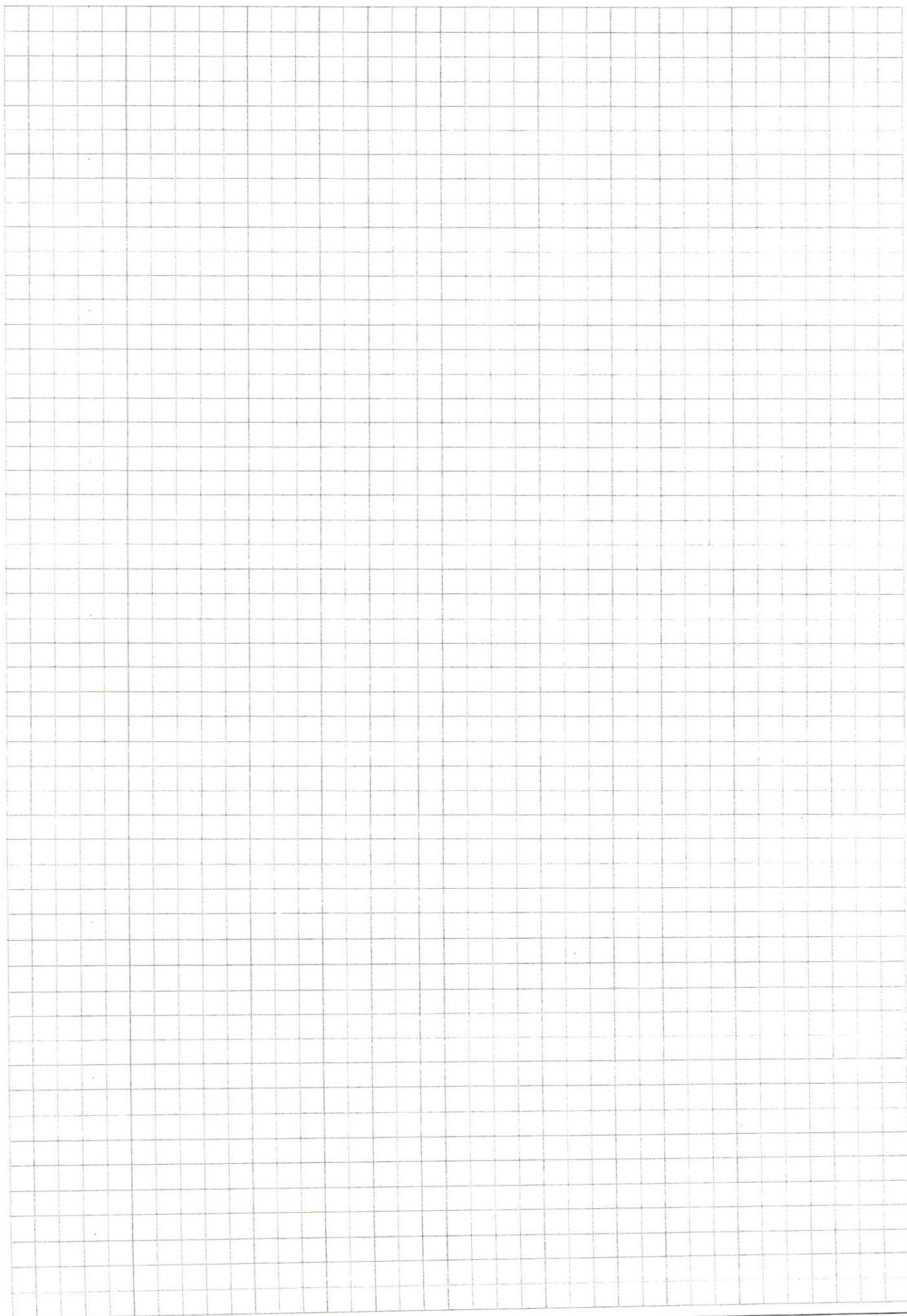
элементов пирамиды $SABC$ в 4 раза

Δ соответственно и высоты тоже.

Центр сферы лежит в плоскости

параллельной DEF и ACB между ними

на равном расстоянии.



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{x^2 y^4}{x^2 y^4} \right)^{\ln x} = y^{\ln y - 2 \ln x} \quad \ln x = a \quad \ln y = b$$

$$\frac{y^{\ln y - 2 \ln x}}{y^{\ln y - 2 \ln x}} = \frac{y^{\ln y} \cdot x^{-2 \ln x}}{y^{\ln y}} = 1$$

$$\frac{y^{3 \ln x} e^{-2 \ln^2 x}}{e^{-2 \ln^2 y}} = 1$$

$$\ln y = t \quad y = e^t \quad \ln x = v \quad x = e^v$$

$$2 \ln^2 y - 2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln y = 0$$

$$2t^2 - 2v^2 + 3tv = 0$$

$$t^2 - v^2 + 1.5tv = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 2x^2) / (8x - 4y)$$

$$(y - 2x) / (y + 2x)$$

$$y^2 - xy - 2x^2 = 4x - 4y$$

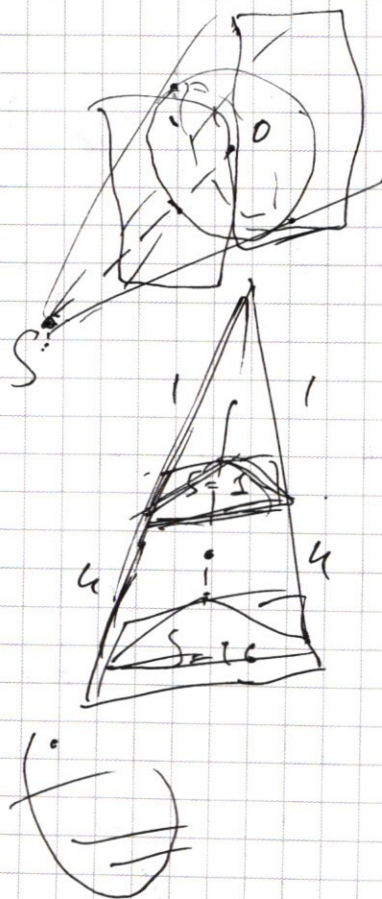
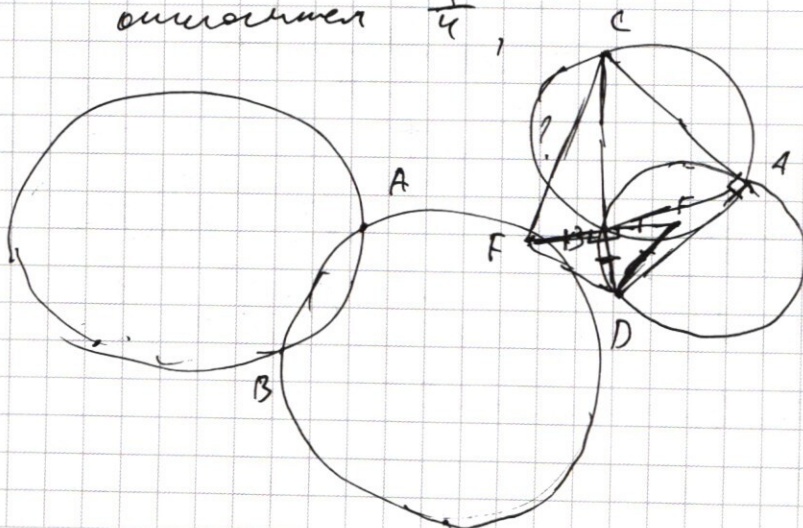
$$(y^2 - 2x^2) - 2(x^2 - 2) = -12 - xy$$

$$y = y(x+4) - 2x(x-4) + y^2$$

$$y(y-x-4) =$$

Решение

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16} \Rightarrow \text{соотношение площадей } \frac{1}{4}$$



$$2 \ln^2 y - 2 \ln^2 x + 3 \ln x \ln y = 0$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y \cdot \ln x}$$

$$x^{2-\ln x} = x^{-2 \ln x} = e^{-2 \ln^2 x}$$

$$y^4 = y^{-4 \ln x} = e^{-4 \ln x \ln y}$$

$$y^{\ln y - 4 \ln x} = e^{\ln^2 y - 4 \ln x \ln y}$$

$$\frac{e^{-2 \ln^2 x} \cdot e^{-4 \ln x \ln y}}{e^{\ln^2 y - 4 \ln x \ln y}} = e^{\frac{-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y}{\ln^2 y - 4 \ln x \ln y}} = e^{-2 \ln^2 x - \ln^2 y + 3 \ln x \ln y}$$

$$\ln^2 y + 2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y = 0$$

$$\ln y \rightarrow \ln x \rightarrow \ln^2 x \rightarrow \ln^2 y \rightarrow \ln x \ln y$$

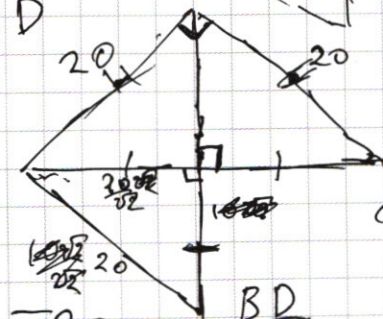
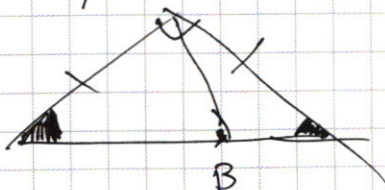
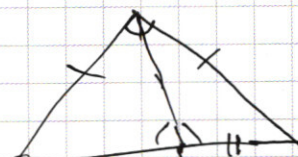
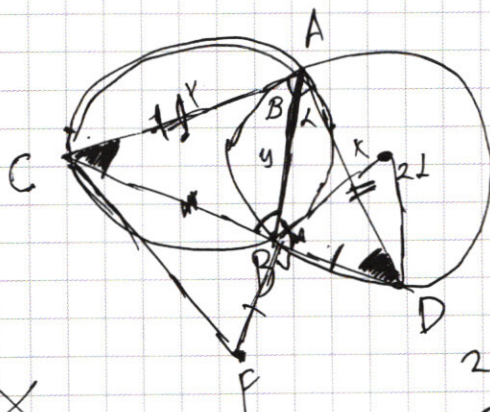
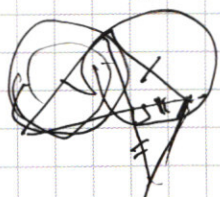
$$(\ln y + \ln x)^2 - \ln^2 x + \ln x \ln y = 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - 4y - xy = 2x^2 - 8x$$

$$y(y-4) = x(2x-8+y)$$

CF-?



$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

$$\frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{BC}{\cos \alpha}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = CD^2 \\ x^2 + y^2 - 2xy \cos(90^\circ - \alpha) = CB^2 \end{cases}$$

$$2xy(\cos(90^\circ - \alpha) - \cos \alpha) = CB^2 - CD^2$$

$$2xy(\sin \alpha - \cos \alpha) = CB^2 - CD^2$$

$$2xy$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $9 \overline{) 261} \mid 9 \overline{) 5029} \mid 3 \overline{) 343}$

$9 \overline{) 261}$
 $\begin{array}{r} 9 \\ - 26 \\ \hline 18 \\ - 18 \\ \hline 0 \end{array}$

$9 \overline{) 5029}$
 $\begin{array}{r} 9 \\ - 50 \\ \hline 129 \\ - 126 \\ \hline 29 \\ - 27 \\ \hline 2 \end{array}$

$3 \overline{) 343}$
 $\begin{array}{r} 343 \\ - 300 \\ \hline 43 \\ - 39 \\ \hline 4 \end{array}$

$343 = 7^3$

$9 = 3^2$ (расчитать)

$9 \overline{) 343}$
 $\begin{array}{r} 343 \\ - 270 \\ \hline 73 \\ - 63 \\ \hline 10 \end{array}$

$9 \overline{) 5029}$
 $\begin{array}{r} 5029 \\ - 4500 \\ \hline 529 \\ - 4761 \\ \hline 528 \end{array}$

$9 \overline{) 56}$
 $\begin{array}{r} 56 \\ - 54 \\ \hline 2 \end{array}$

8 мес.: $8 \cdot 7 \cdot 6 = 56$

C_8^3 - кол-во мес-ов для 7 семерок

Остается 5 мес.: $5 \cdot 4$ - размещение нулей и девишек

$56 \cdot 20$ - без учета первого разряда

$\underline{0}$

$C_7^3 \cdot 4 \cdot 3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35 \cdot 4 \cdot 3 = 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

Ответ: $56 \cdot 20 - 35 \cdot 12 = 5 \cdot 4 (56 - 7 \cdot 3) =$
 $= 20 \cdot (56 - 21) = 20 \cdot 35 = 700$

2) $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$
 $- 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$
 $2 \sin 7x (\sin 2x - \cos 2x) - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$
 $2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$
 $(\cos 2x - \sin 2x)(2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$

$$1) \cos 2x = \sin 2x$$

$$\cos 2x = \cos(2x - \frac{\pi}{2})$$

$$\sin(2 \cdot \frac{\pi}{2}) = \sin \pi = 0$$

$$\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\cos(2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = 1$$

$$2x = 2x - \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$2x = \frac{\pi}{2} - 2x + 2\pi k$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2|2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos x - \sqrt{2} \sin 2x| = 0$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 7x = 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x + 2x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$$

$$3. \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(4/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y' = 0 \end{cases}$$

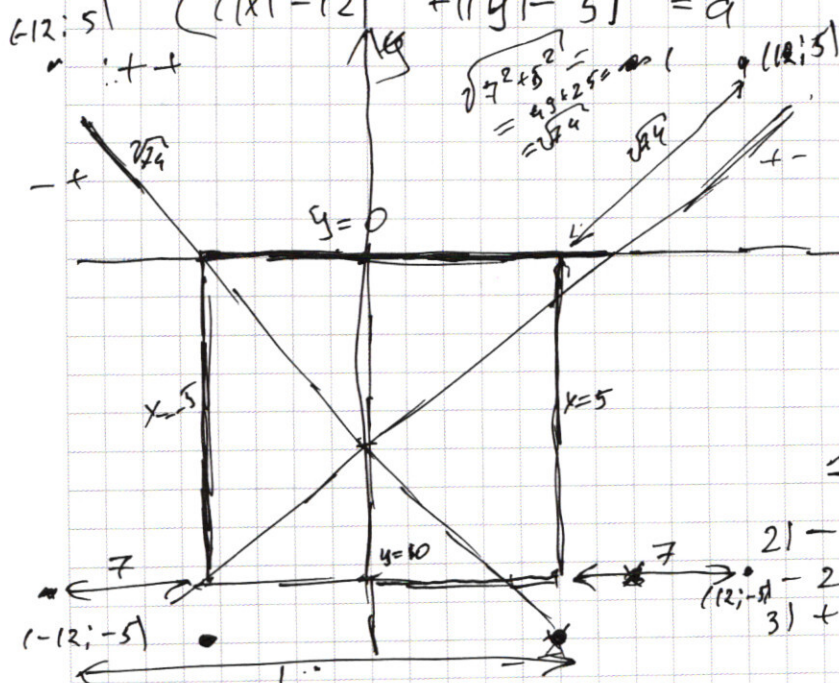
$$(y' - 2)^2 - 4 - xy - 2x^2 + 8x = 0$$

$$-(2x^2 + 8x + 4) = -2(x^2 - 4x + 2)$$

$$|y - 2|^2 - 2(x^2 - 4x + 2) - 8 - xy = 0$$

$$5. \begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 9 \end{cases}$$

ровно 2 решения.



$$y \neq 5 + x \geq 0 \quad y - x + 5 \geq 0$$

$$y \geq -x - 5 \quad y \geq x - 5$$

Опр. с центром $x=0$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad (12; 5)$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases} \quad (12; -5)$$

$$ср = \sqrt{9} \quad (-12; 5) \quad (-12; -5)$$

$$1) \text{ оба } ++ \quad 2y + 10 = 10 \quad y = 0$$

$$2) - +;$$

$$-2x = 10 \quad x = -5$$

$$3) + -; \quad 2x = 10 \quad x = 5$$

$$-2y = 20 \quad y = -10$$

Квадрат.