

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра-
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Разложите 9261 на произведение простых:

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ \hline 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\Rightarrow 9261 = 3^3 \cdot 7^3 \Rightarrow \text{количество произведений}$$

было равно 9261 а другие цифры

равны 1. $\Rightarrow$ количество различных

восемизначных чисел будет равно:

$$\frac{8!}{3!3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

Ответ: 560

№ 2

$$\cos 90^\circ - \cos 50^\circ - \sqrt{2} \cos 40^\circ + \sin 90^\circ + \sin 50^\circ = 0$$

$$-2 \sin \frac{90+50}{2} \sin \frac{90-50}{2} - \sqrt{2} (\cos 20^\circ - \sin 20^\circ) + 2 \sin \frac{90+50}{2} \cos \frac{90-50}{2} = 0$$

$$+2 \sin 70^\circ (\cos 20^\circ - \sin 20^\circ) - \sqrt{2} (\cos 20^\circ - \sin 20^\circ) (\cos 20^\circ + \sin 20^\circ) = 0$$

$$(\cos 20^\circ - \sin 20^\circ) (2 \sin 70^\circ - \sqrt{2} (\cos 20^\circ + \sin 20^\circ)) = 0$$

$$\cos 20^\circ - \sin 20^\circ = 0 \quad \text{или} \quad \sin 70^\circ - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 20^\circ + \sin 20^\circ \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 0$$

$$1 - \sqrt{2} \sin 20^\circ = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 20^\circ = 1$$

$$20^\circ = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{1}; k \in \mathbb{Z}$$

или $\cos 20^\circ = 0 \Rightarrow \sin 20^\circ = 1 \Rightarrow$
 $0 \neq 1 \Rightarrow \text{невозможно}$

$$\frac{50}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{90}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi r; r \in \mathbb{Z}$$

$$90^\circ = \frac{3\pi}{4} + 2\pi r; r \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi r}{3}; r \in \mathbb{Z}$$

№2 продолжение:

Ответ:
$$\begin{cases} b = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}; k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\sqrt{5}}{20} + \frac{2\pi n}{5}; n \in \mathbb{Z} \\ b = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi r}{9}; r \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№3

① $(x^2 y^4)^{\ln x} = y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$

$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$-\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \cdot \ln y$

пусть $\ln x = a$
 $\ln y = b$.

$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 2 \ln x) \ln y$

$-a(2a + 4b) = (b - 2a)b$

$-2a^2 - 4ab = b^2 - 2ab$

$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$

по ф. Виета

$\begin{cases} b = 2a \\ b = a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ln y = 2 \ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = 2x \\ y = x^2 \\ y = x \end{cases}$

$\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x^2 \\ y = 4 - x \\ y = x \\ y = 2x \\ y = x^2 \\ y = 2x \\ y = x \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 = 4 - x \\ y = x^2 \\ y = 4 - x \\ y = x \\ y = 2x \\ 2x = x^2 \\ x = 2x \\ y = x \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \text{ или } y = x \\ y = x^2 \\ x = 2 \\ y = 2 \\ x = 0 \\ y = 2x \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \\ b = 2 \\ y = 2 \\ x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

Ответ: $\left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}, \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right), (2; 2), (2; 4)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} |x-y+5| + |y-x-5| = 10 & (1) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

①

$$x + y + 5 = 0$$
$$y = -x - 5$$

$$y - x + 5 = 0$$
$$y = x - 5$$

2) принцип гендерности

на 4.

$$x + y + 5 \geq 0 \quad y - b + 5 \geq 0$$

you ~~for~~ ~~for~~ ~~for~~

$$2y = 0 \quad y = 0$$

Case $x+y+5 \geq 0$ $y-x+5 < 0$

$$b + y + z - x + z - z = 10$$

$$y = 4.560 \quad y = 0 + 5.10$$

$$-x - y - 5 - y + 6 - 5 = 0$$

$$y = -10$$

• nun $x+y+5 < 0$ $y-x+5 \geq 0$

$$D \quad -x - y - 5 + y - 0 + 5 = 0$$

$$x = -5$$

② зетере окружности в

Затверю эту верную с центрами
в точке $(\overset{C}{12}, \overset{D}{5}) / (\overset{D}{12}, \overset{B}{-5}) (\overset{B}{-12}, \overset{A}{5}) (\overset{A}{-12}, \overset{B}{-5})$

каждая из окружностей выводит за свою
границу. при $a = 49 \Rightarrow 12 \times 12 \times 7$

1) окружности A и D касаются внутренно $x = -5$ и $x = 5$ $\rightarrow$ д.р. $\rightarrow$ (в к. и с. п.)

$\Rightarrow a \geq 49$ yes yes, при $a < 49$ нет пересечения. (-)

2) при ~~19~~⁴⁹ $\Gamma a < 169$ / 4 пересечения⁴⁰ (-)

при $a \approx 169$ $r \approx 13$

системы пересекаются в точке O и в точке R

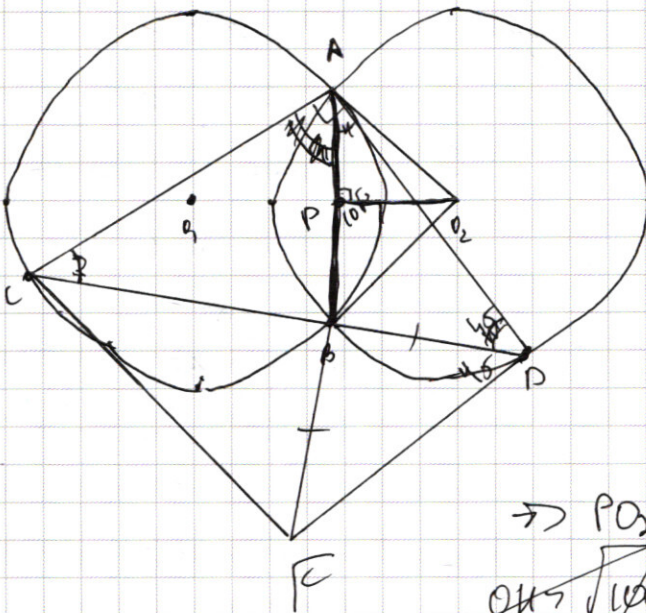
√5

Продолжение при $a > 169$ нет пересечения (-) ⇒

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$$

ответ $\begin{cases} a = 49 \\ a = 169 \end{cases}$

√6



1) тк $r_1 = r_2$ AB - ось симметрии ⇒

⇒ $\angle ACD = \angle CDA$ ⇒ углы ACD

$$\angle A = 90^\circ \Rightarrow \angle ACD = \angle CDA = 45^\circ$$

окружность O описана вокруг

$$\triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{\sin C} = 2R$$

$$AB = 2R \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} \Rightarrow \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow PO_2 = 5\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$OH = \sqrt{100 - \left(\frac{30}{2}\right)^2}$$

расстояние от центра го круга AB = OH ⇒

$$\frac{AD}{OH} = \frac{AB}{PO_2}$$

$$\frac{b}{\sqrt{100 - \left(\frac{30}{2}\right)^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{2}}$$

$$b = 2\sqrt{100 - \left(\frac{30}{2}\right)^2}$$

$$b^2 = 4\left(100 - \frac{900}{4}\right)$$

$$b^2 = 100 - b^2$$

$$2b^2 = 100$$

$$b^2 = 50$$

$$b = 10\sqrt{2}$$

⇒ $\textcircled{1} \quad \textcircled{1}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

18) $\cos x = \cos y \Rightarrow -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$
 $\sin x \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$

777333 ~~PP~~
 $\frac{8!}{3!3!2!} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2} =$
 $2 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 = 560$

$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$

$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$
 $(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x) = 0$
 $(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x) = 0$

$y \geq 2 + 3 \cdot 2^{34}$
 $y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$y \geq 3 \cdot 2^{34}$

$y <$

$\sin 2x = 0$
 $2x = \frac{\pi}{2} + \pi k$
 $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$\sin(2x + \frac{\pi}{4}) = \sin 7x$
 $\sin(7x) = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$
 $2 \sin(\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8}) \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8})$

$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k$

$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}$

$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$

$3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} - 76 + 2(2^{32} - 1)x \geq 0$

14.23

12:05

2:18

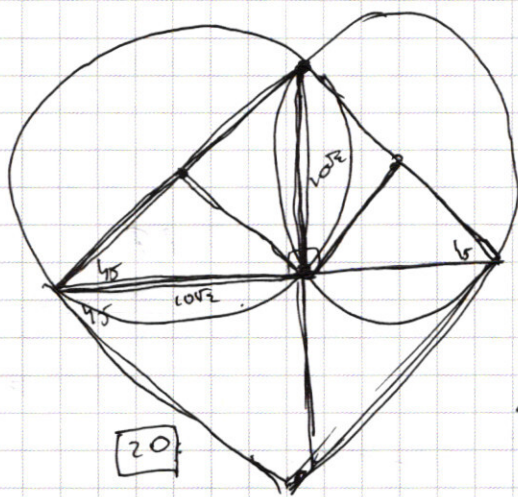
7.4

14.50

$3 \cdot 2^{34} < 76$

$2(3 \cdot 2^{34} + 1) \cdot 2^{34} / (2^{34} + 3)$





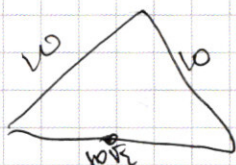
10 -

$$b^2 = \sqrt{100 - \left(\frac{b^2}{2}\right)^2}$$

$$x^2 = 4\left(100 - \frac{b^2}{4}\right)$$

$$20^2 = 400$$

$$\frac{200}{2}$$



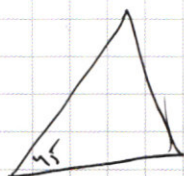
$$\frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{20}{\sqrt{2}}$$

$$100 - \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 = 0$$

$$AB = 20 \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$

$$\left(\frac{b^2}{2}\right)^2 = 100$$

$$b^2 = 400$$



$d = b = 10\sqrt{2}$

$$AC^2 - AB^2 + AD^2 - AB^2 = CF^2$$

$$AC^2 + AD^2 - 2AB^2 = CF^2$$

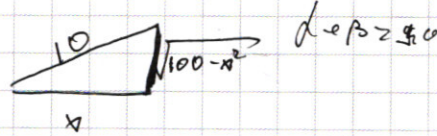


$$y = 2^b + 3 \cdot 2^{34}$$

$$- y = -26 - 2(2^{32} - 1)$$

$$2^b + 3 \cdot 2^{34} - 26 - 2(2^{32} - 1) = 20$$

$$135 - d = 135$$



$$(x \cdot 2^{31}) + 2(2^{32} - 1) = 20$$

$$x \cdot 2^{31} = 20 - 2(2^{32} - 1)$$

$$x \cdot 2^{31} = 20 - 2^{33} + 2$$

$$x \cdot 2^{31} = 22 - 2^{33}$$

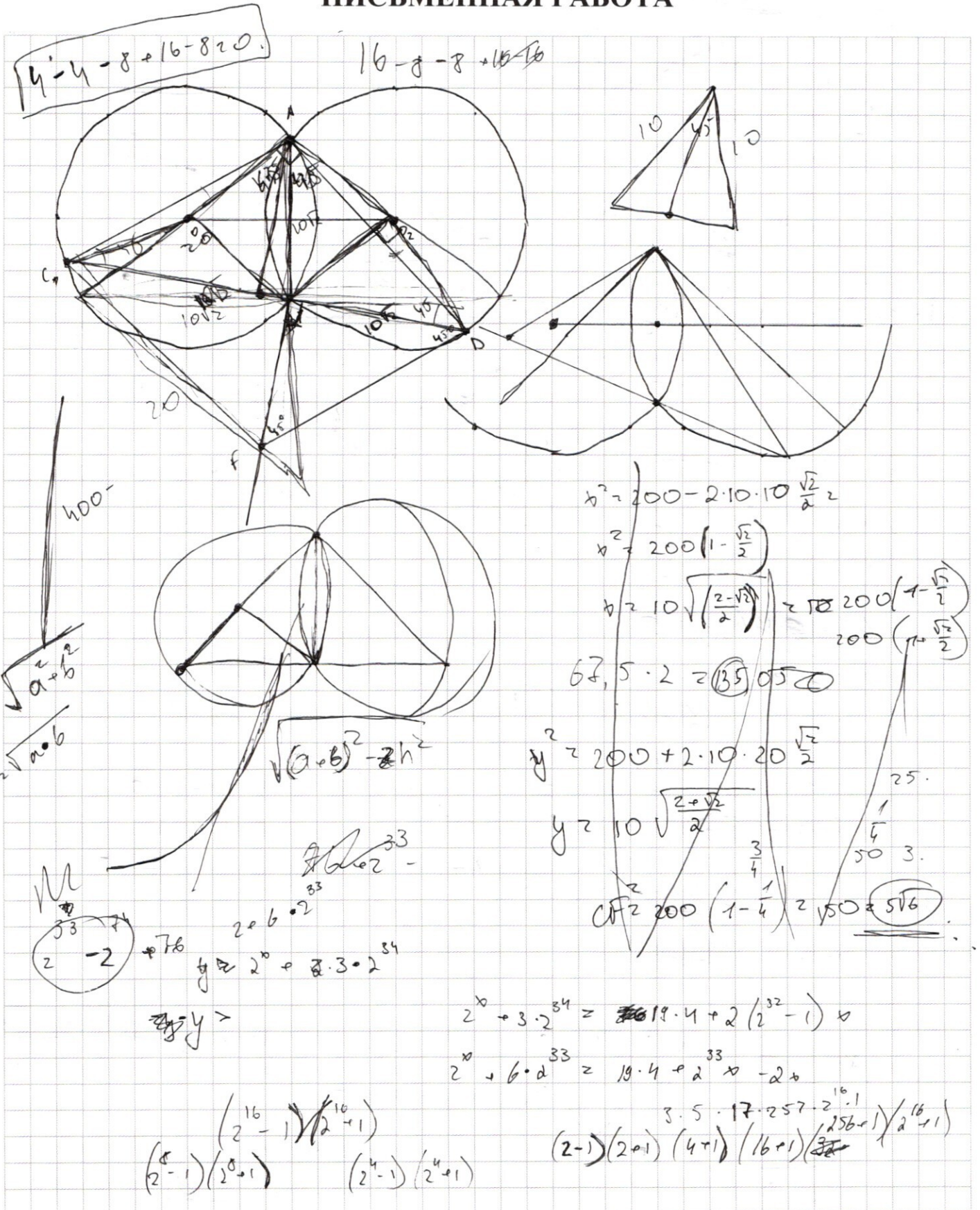
$$\frac{1}{\sqrt{100 - b^2}} = \frac{10\sqrt{2}}{5\sqrt{5}}$$

$$2x = \sqrt{100 - b^2}$$

$$4x^2 = 100 - b^2$$

$$3b^2 = 1100$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{24}{2 \cdot 2} = 6.$$

$$3322$$

$$4! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\bar{2}6 \quad 3 \quad 322$$

$$232$$

$$223$$

$$256 \cdot 4$$

$$(1024)$$

$$\frac{1}{1024 \ln 2}$$

$$x^2 y = 2$$

$$\frac{1}{2} \ln 1624$$

$$y^2 - y(x+4) + 2x^2 + 8x = 0$$

$$(-\ln x / (2 \ln x + 4 \ln y)) = (\ln y - 2 \ln x)$$

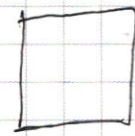
$$y = 4 - x$$

$$y = 2x$$

$$13^2$$

$$\ln x = a$$

$$\ln y = b$$



$$\left(\frac{x^2 y^4}{16x^4} \right)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right)$$

$$-a/(2a+4b) = (b-2a)$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 2ab$$

$$b^2 - 2ab + 2a^2 = 0$$

$$2a + a$$

$$b = a$$

$$b = 2a$$

$$2x = 4 - x$$

$$b = 4$$

$$y = 8$$

$$2; 4$$

$$2; 4$$

$$y = 4$$

$$2; 4$$

$$y = x^2$$

$$y = 4 - x$$

$$x/(x-2) = 0$$

$$x = 3$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = x^2$$

$$y = 4 - x$$

$$2x^2 = 4 - x$$

$$2x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 \cdot 2 = 33$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$$1+16 = \sqrt{17}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$y = \frac{15 - 2\sqrt{5} + 1}{4}, \frac{15 - 2\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\frac{8 - \sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{8 + 1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{8 - \sqrt{5}}{2}$$

$$2x = 4 - x$$

$$x = 4 - x$$

$$4 - 4 - 8 + 16 - 8$$

$$16 - 8 - 8 + 16 - 16$$

$$4 + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{9 - \sqrt{5}}{2}$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 8 \cdot 4 = 33$$

$$y = x^2$$

$$y = 4 - x$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \frac{8 + 1 - \sqrt{5}}{2}$$

$$y = \frac{16 - 1 \pm \sqrt{33}}{4}, \frac{15 \pm \sqrt{33}}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten calculations and diagrams on grid paper.

Top Left: A diagram showing a horizontal line with a vertical line intersecting it, and a circle with a vertical line passing through its center.

Top Middle: Division problems: $9261 \div 9 = 1023$, $1023 \div 3 = 343$, $343 \div 7 = 49$, $49 \div 7 = 7$.

Top Right: A diagram showing a horizontal line with a vertical line intersecting it, and a circle with a vertical line passing through its center.

Middle Left: Factorial calculations: $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5040$, $2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 216$.

Middle Middle: Division problems: $9261 \div 27 = 343$, $343 \div 7 = 49$, $49 \div 7 = 7$.

Middle Right: A diagram showing a horizontal line with a vertical line intersecting it, and a circle with a vertical line passing through its center.

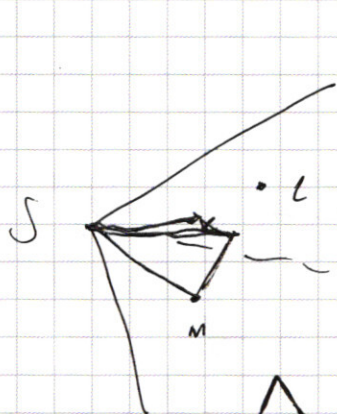
Bottom Left: A diagram showing a circle with a vertical line passing through its center, and a horizontal line intersecting it.

Bottom Middle: Trigonometric identities: $\cos 8x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$, $\cos 8x - \cos 5x = 2 \sin \frac{8x+5x}{2} \sin \frac{8x-5x}{2} = 0$, $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2} = 0$.

Bottom Right: A diagram showing a circle with a vertical line passing through its center, and a horizontal line intersecting it.

$$\begin{cases} (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{x}{y})} \\ y^2 - xy - x^2 + 8x - 8y = 0 \end{cases}$$

$$-\ln(x^2 y) = \ln(\frac{x}{y}) \ln y$$



$$(x \ln x)^2$$

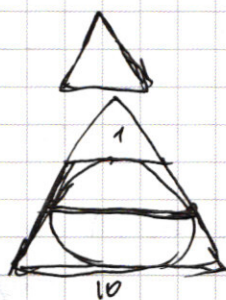
$$\left(10 \ln x\right)^{\ln x} = 10^{\ln^2 x}$$

$$\frac{1}{10^2 \ln^2 x} = \frac{1}{10^2 \ln^2 x} \cdot \frac{\ln y - \ln x}{\ln y - \ln x}$$

$$\frac{1}{10^2 \ln^2 x} = \frac{10^{\ln^2 y}}{b^2}$$

$$x + y + 5 = 0$$

$$y = x - 5 \quad (0; -5) \quad (-5; 0)$$



$$\frac{17}{2} = 8,5$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 7$$

$$y = x + 5 = 0$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 7 \end{cases}$$

$$25 + 49 = \sqrt{74}$$

$$1) \quad x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2) \quad x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$3) \quad -x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

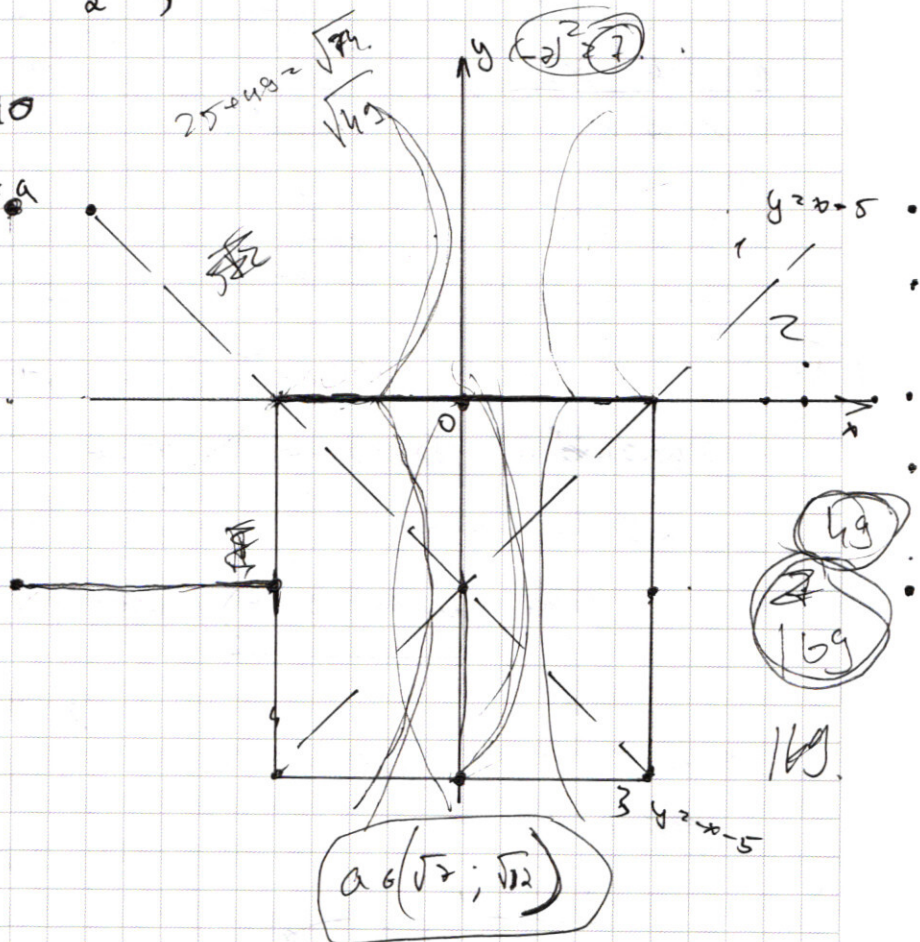
$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

$$x^2 - 24x + y^2 - 10y + 25 = a$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2$$



$$\begin{matrix} 49 \\ 2 \\ 169 \end{matrix}$$

$$169$$



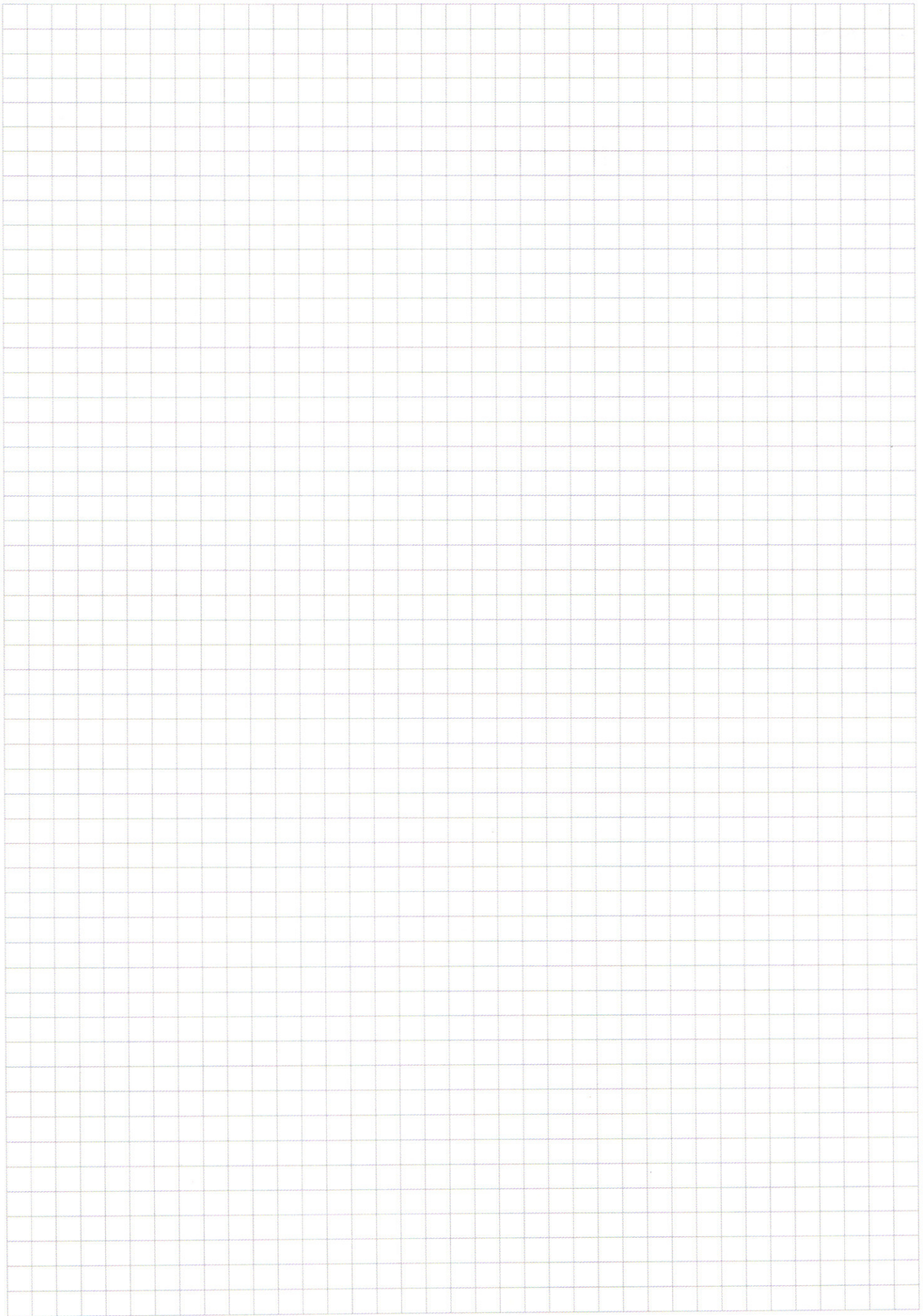
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)