Рег. №:

Класс участия: 11

Место проведения: Уфа

Дата проведения: 22 февраля 2020 г.

Время начала (местное): 13:00

ШК

(заполняется секретарём)

МФТИ

Олимпиада школь

по математи

Название пред...

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

Фамилия	Имя	Отчество	Дата рождения	Возраст
Яхшигулов	Тимур	Азаматович	26.01.2002	18 лет

Страна	Регион	Населенный пункт
Российская Федерация	Респ Башкортостан	г Уфа

Документ, удостоверяющий личность	Серия	Номер	Дата выдачи	Код подразделения
Паспорт гражданина РФ	80 16	358564	04.03.2016	020-004

Страна школы	Регион школы	Населенный пункт школы
Российская Федерация	Респ Башкортостан	г Уфа

Класс обучения	Полное название образовательного учреждения
11	МБОУ „Лицей № 153"

Мобильный телефон	Доп. телефон	E-mail
89174928368		otim142@ya.ru

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограниченно доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиад в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля 2020 г

ЯТ

Подпись участника олимпиады

ФИО законного представителя

Степень родства

Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.

Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР 2 0 0 0 3 1 6 4

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1680 ✓

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)},\\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0.\end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}|x+y+5| + |y-x+5| = 10,\\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases}y \geqslant 2^x + 3\cdot 2^{34}\\ y < 76 + 2\left(2^{32}-1\right)x\end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 9261 Разложим 9261 на простые множители:

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	1
1	1

3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1. $9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2 = 1^2 \cdot 3^3 \cdot 7^3$

Количество способов расставить эти числа:

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{3!\,2!} \cdot \frac{2!}{0!\,2!} = \cancel{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 2}} =$$

расставляем 3 тройки по 8 местам; 3 семерки по 5 оставшимся; 2 единички по 2 оставшимся

$0! = 1$

$$= \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 28 \cdot 20 = 56 \cdot 10 = 560.$$

Такое же произведение даст другой набор чисел:

$$9261 = 3 \cdot 7^3 \cdot 9 \cdot 1^3 = 1^3 \cdot 3 \cdot 7^3 \cdot 9$$

Кол-во способов расставить эти числа:

$$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{7!\,1!} \cdot \frac{7!}{6! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot \frac{3!}{3!\,0!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 56 \cdot 20 = 112 \cdot 10 = 1120.$$

Итого: $1120 + 560 = 1680$

Ответ: 1680 вариантов.

№5 $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$ (2)

Будем решать графически.

1) $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

а) $x+y+5 \geq 0$ $\quad y \geq -x-5$

$y-x+5 \geq 0$ $\quad y \geq x-5.$

$x+y+5+y-x+5=10$

$2y=0$

$\begin{cases} y=0. \\ x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases}$

б) $x+y+5 \leq 0$ $\quad y \leq -x-5$

$y-x+5 \geq 0$ $\quad y \geq x-5.$

$-x-y-5+y-x+5=10$

$-2x=10$

$\begin{cases} x=-5. \\ y \leq 0 \\ y \geq -10 \end{cases}$

в) $x+y+5 \geq 0$ $\quad y \geq -x-5$

$y-x+5 \leq 0.$ $\quad y \leq x-5.$

$x+y+5-y+x-5=10$

$2x=10$

$\begin{cases} x=5. \\ y \leq 0 \\ y \geq -10 \end{cases}$

г) $x+y+5 \leq 0$ $\quad y \leq -x-5$

$y-x+5 \leq 0$ $\quad y \leq x-5.$

$-x-y-5-y+x-5=10$

$-2y=20.$

$\begin{cases} y=-10. \\ x \leq 5. \\ x \geq -5 \end{cases}$

2) $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$

Заметим, что $a \geq 0$. – сумма 2 квадратов.

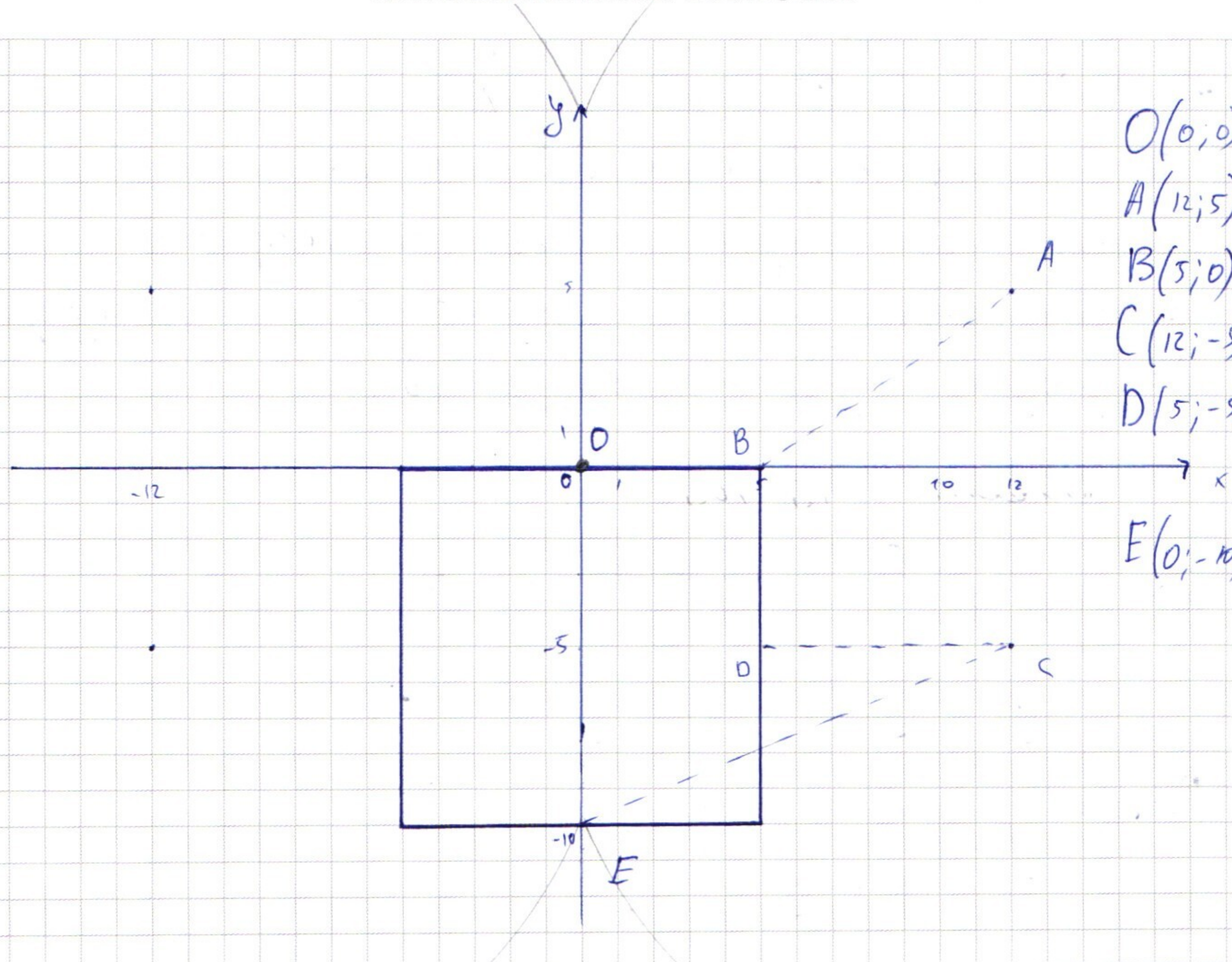
График этого уравнения – либо 4 точки, либо 4 окружности, либо 4 части окружностей.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$O(0;0)$

$A(12;5)$

$B(5;0)$

$C(12;-5)$

$D(5;-5)$

$E(0;-10)$.

Будем решать в 1 и 4 четверти, потому что в 2 и 3 всё симметрично. ~~Когда (2)~~ Случай, когда (2) задаёт точки нам не интересен, ибо тогда решений нет.

а) $\sqrt{a} = CD$; $a = 49$ - тогда справа от $y=0$ у нас 1 решение (точка D), тогда слева есть симметричное решение $\Rightarrow$ 2 решения

б) $\sqrt{a} = AB$; $a = AB^2 = (12-5)^2 + 5^2 = 49 + 25 = 74$. У нас справа есть решение (точка B), но оно не единственно ведь очевидно, при $a > CD$, но $a < CE$ - у нас окружность с центром в точке C пересекает график (1) в 2 точках ⇒ как минимум 4 решения в общем ⇒ не подходит.

в) $\sqrt{a} = CE \Rightarrow a = CE^2 = 144 + 25 = 169$.

~~Но~~ Е: По теореме Пифагора $CO = 169 = CE \Rightarrow$ 2 решения. Они находятся на оси симметрии ⇒ ~~с обоих сторон~~ всего 2 решения ⇒ $a = 169$ подходит.

На рисунке изображён случай в.

Ответ: 49, 169.

№3
$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Начнём решать со (2):

$$y^2 - 4y - xy - 2x^2 + 8x = 0$$
$$y^2 - 4y = 2x^2 - 8x + xy \quad | + xy$$
$$y^2 - 4y + xy = 2x^2 - 8x + 2xy$$
$$y(y - 4 + x) - 2x(x - 4 + y) = 0$$
$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0.$$

2 случая:

1) $y = 2x$ или 2) $y = 4 - x$.

Найдём решения, подставив оба случая в (1)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x$.

$(x^2 \cdot y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$ ОДЗ: $x > 0$, $y > 0$

$(x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

Прологарифмируем по основанию 2

$-\ln x \cdot \log_2(16 \cdot x^6) = \ln\left(\frac{2}{x^6}\right) \cdot \log_2(2x)$

$-\ln x \cdot (4 + 6\log_2 x) = (\ln 2 - 6\ln x)(1 + \log_2 x)$

Замена $\ln x = a$

$\log_2 x = b$

$-a(4 + 6b) = (\ln 2 - 6a)(1 + b)$

$-4a \cancel{-6ab} = \ln 2 - 6a + \ln 2 \cdot b \cancel{-6ab}$

$2a = \ln 2(1 + b)$

Обр. Замена: $2 \cdot \ln x = \ln 2(1 + \log_2 x)$. $/ : \ln 2 \neq 0$

$2\log_2 x = 1 + \log_2 x$.

$\log_2 x = 1$.

$\underline{x = 2} \Rightarrow \underline{y = 4}$ $(2; 4)$.

г) $y = 4 - x.$

$$\left(x^2 \cdot (4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)} \quad ОДЗ: x>0$$

Логарифмируем по основанию e.

$$-\ln x \cdot \ln\left(x^2(4-x)^4\right) = \ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right) \cdot \ln(4-x)$$

$$-\ln x \cdot \left(2\ln x + 4\ln(4-x)\right) = \left(\ln(4-x) - 7\ln x\right) \cdot \ln(4-x)$$

Замена $\ln x = a$

$\ln(4-x) = b.$

$$-a \cdot (2a + 4b) = (b - 7a) \cdot b$$

$$-2a^2 - 4ab = b^2 - 7ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \quad \Big| : a \neq 0.$$

Замена: $\frac{b}{a} = t.$

$$t^2 - 3t + 2 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 2 \end{array}\right.$$

Проверим, что $a \neq 0$

$a = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 1$

$\Downarrow$

$y = 3.$

$$(1 \cdot 3^4)^{-0} = 3^{\ln(3)}$$

$$1 = 3^{\ln(3)}$$

$$\log_3 1 = \ln 3 \cdot \log_3 3$$

$$0 \neq \ln 3$$

не верно.

1. $t = 1.$

$$\frac{\ln(4-x)}{\ln x} = 1.$$

$$\ln(4-x) = \ln x.$$

$$\ln\left(\frac{4-x}{x}\right) = 0.$$

$$\frac{4-x}{x} = 1.$$

$$4 - x = x.$$

$$4 = 2x.$$

$$x = 2$$

$\Downarrow$

$y = 2$

2) $t = 2.$

$$\frac{\ln(4-x)}{\ln x} = 2.$$

$$\ln\left(\frac{4-x}{x^2}\right) = 1.$$

$$4 - x = x^2.$$

$$x^2 + x - 4 = 0.$$

$$D = 1 + 16 = 17.$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}, \quad x > 0 \text{ (по ОДЗ)}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = 4 - \frac{-1+\sqrt{17}}{2} =$$

$$= \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}.$$

Ответ: $(2;4)$; $(2;2)$; $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$\cos(5x+4x) + \sin(5x+4x) + \sin(4x+x) - \cos(4x+x) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= \cos 5x\cos 4x - \sin 5x \sin 4x + \sin 5x \cos 4x + \cos 5x \sin 4x +$

$+ \sin x\cos 4x + \cos x \sin 4x - \cos 4x \cos x + \sin 4x \sin x - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= \cos(4x+x)(\cos 4x + \sin 4x) + \sin(4x+x)(\cos 4x - \sin 4x) +$

$+ \cos 4x(\sin x - \cos x) + \sin 4x(\cos x + \sin x) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= (\cos 4x\cos x - \sin 4x \sin x)(\cos 4x + \sin 4x) + (\sin 4x \cos x + \cos 4x \sin x)(\cos 4x - \sin 4x) +$

$+ \cos 4x(\sin x - \cos x) + \sin 4x(\cos x + \sin x) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= \cos^2 4x\cos x - 2\cos 4x\sin 4x\sin x + 2\cos 4x\cos x\sin 4x - \sin^2 4x \sin x +$

$+ \cancel{\sin 4x\cos 4x\cos x} + \cos^2 4x\sin x - \sin^2 4x\cos x - \cancel{\cos 4x\sin 4x\sin x} +$

$+ \cos 4x(\sin x - \cos x) + \sin 4x(\cos x + \sin x) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= \cos x(\cos^2 4x + 2\cos 4x\sin 4x - \sin^2 4x)$

$+ \sin x(\sin^2 4x + 2\cos 4x\sin 4x - \cos^2 4x) +$

$+ \cos 4x(\sin x - \cos x) + \sin 4x(\cos x + \sin x) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= \cos x \cdot \cos 8x + \sin x \cdot \cos 8x +$

$+ \cos 4x \sin x - \cos 4x\cos x + \sin 4x \cos x + \sin 4x \cdot \sin x - \sqrt{2}\cos 4x$

$= \cos x(\cos 8x - \cos 4x + \sin 4x) + \sin x(\cos 8x + \cos 4x + \sin 4x) -$

$-\sqrt{2}\cos 4x = ?$

Доп. аргумент: $\sqrt{2}\left(\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \sqrt{2}\left(\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)\right) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\cdot\cos 7x \cdot \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$

$$\cancel{1+\sin^2 4x+\cos^2 4x+2\sin 4x-2\cos 4x+2\sin 8x+}$$

$$\cancel{+1+\cos^2 4x+\sin^2 4x-2\sin 4x-2\cos 4x-2\sin 8x=}$$

$$\cancel{=4-4\cos 4x=4-4(\cos^2 2x-\sin^2 2x)}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x+3\cdot 2^{34} \\ y \leq 76+2(2^{32}-1)x. \end{cases}$$

~~Возможно~~ у есть только в таком случае.

$$-(2^x+3\cdot 2^{34})+76+(2^{33}-2)x \geq 0.$$

$$76+2^{33}x-2x-2^x+3\cdot 2^{34} \geq 0.$$

$$2^{33}x-2x-2^x \geq -76-3\cdot 2^{34}$$

~~log~~

$$\cancel{\log_2(2^{33}x-2x-2^x) \geq -76-3\cdot 2^{34}}$$

$$2^{33}x+3\cdot 2^{34} \geq 2^x+2x-76.$$

$$2^{33}(x+6) \geq 2^x+2(x-38)$$

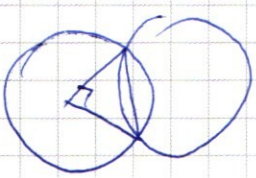
☒ черновик ☐ чистовик

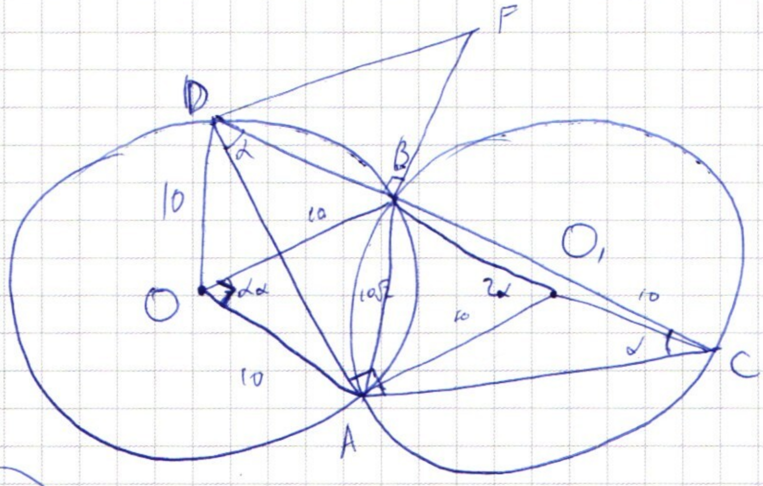
(Поставьте галочку в нужном поле)

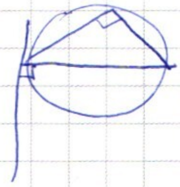
Страница №__

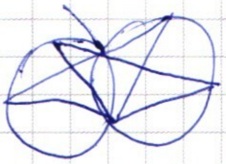
(Нумеровать только чистовики)

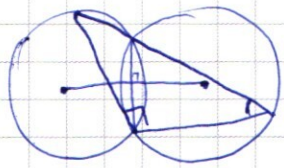
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА











$\alpha = 45^\circ$

$AOBO_1$ – ромб. (4 равные стороны).

Пусть $ACD = \alpha \Rightarrow AO_1B = 2\alpha$ (центральный) $\Rightarrow$

$\Rightarrow AOB = 2\alpha$ (противолежащий в ромбе) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle ADB = \alpha$ (вписанный) $\Rightarrow \triangle DAC$ – равносторонний, прямоугольный $\Rightarrow \alpha = 45^\circ. \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AOB = 90^\circ \Rightarrow AB = 10\sqrt{2}$ (по теор. Пиф).

(осн. св-во треугольника)

$\angle OAB = \dfrac{180 - 2\alpha}{2} = 90 - \alpha$, аналогично

$\angle O_1AB = 90 - \alpha.$; $\Rightarrow$ ~~$\angle OAB + \angle BAO_1 + BO_1AC = 90$~~

~~$90 - \alpha + 90 - \alpha + O_1AC = 90.$~~

~~$\angle O_1AC = 2\alpha - 90 = 0$~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t = -1$

$\log_2 x = -1$

$x = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

$y = 1$

$t^2 = -\frac{9}{24}$

$t = \pm\sqrt{\frac{-\log_2 e}{24}}$

$x = 2^{\sqrt{\frac{-\log_2 e}{24}}}$

$x = 2^{-\sqrt{\frac{-\log_2 e}{24}}}$

$a^{\log_a b} = b$

$2^{\log_2 8} = 8$

$a^{\log_8 a} = 2^{\log_8 2} = 2^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{8}$

$a^{\log_8 a} = \frac{a^{\frac{\ln a}{\ln b}}}{a^{\ln b}}$

$y = 4 - x$

$\cancel{(x^2 \cdot (4-x)^4)}$ $(x^2 \cdot (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$

9261 – делится на 9.

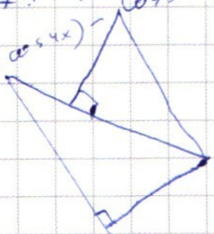
$\cos(9x) = \cos(4x + 5x) =$

$= \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x + \cos 4x \sin 5x + \sin 5x - \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x =$

$= \sin 5x (1 - \sin 4x + \cos 4x) - \cos 5x (\cos 4x + \sin 4x - 1) + \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$y - \frac{\pi}{4} = 4x$

$x = \frac{y}{4} - \frac{\pi}{16}$

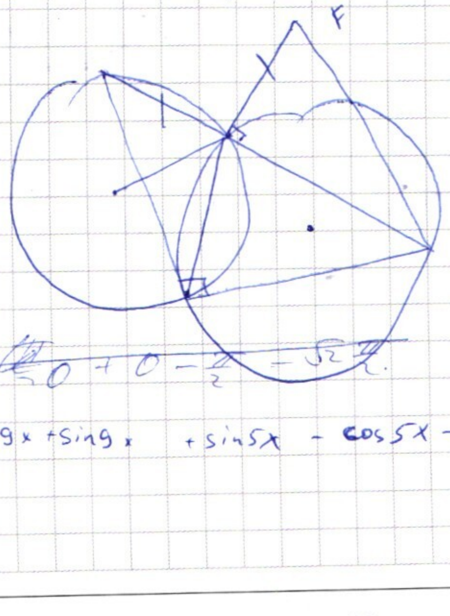


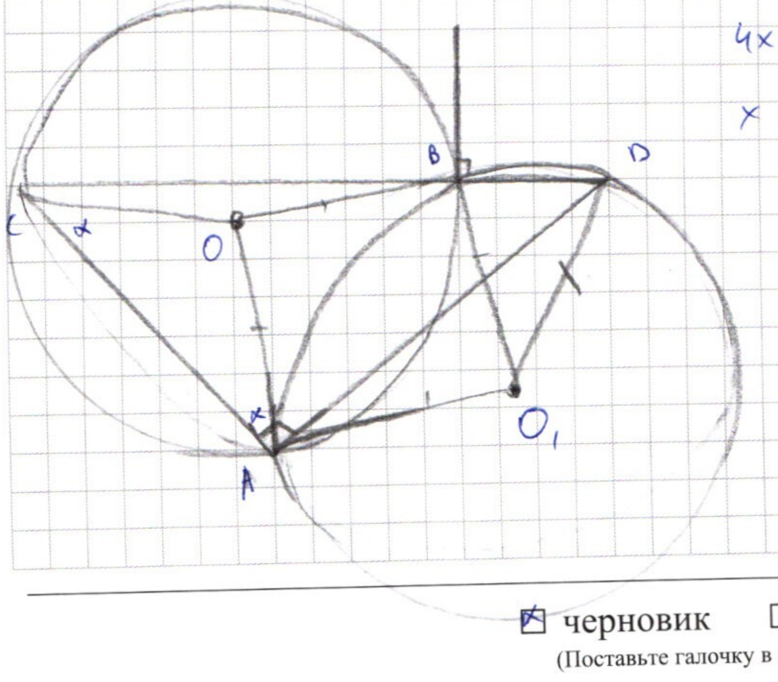
$AD^2 + AC^2 = CD^2$

$AOBO_1$ – ~~квадрат~~ ромб.

$4x = \frac{\pi}{2}$

$x = \frac{\pi}{8}$





$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{...} 0 + 0 - \frac{2}{2} - \sqrt{2}\frac{2}{...}$

$\cos 9x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$

$\cancel{-2\sin 2x \sin 7x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 2x \cos 7x = 0.}$

$\cancel{2\sin 2x \left(\cos 7x - \sin 7x\right) - \sqrt{2}\cos 4x = 0.}$

$\cancel{2\sin 2x \{\cdot \cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 0.}$

$\cancel{2\sin 2x \left(\cos\left(7x + \frac{\pi}{4}\right) + 1\right) = 1.}$

$\cancel{\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos}$

$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} - 5x\right) - \sqrt{2}\cos 4x = 0.$

$2\sin\frac{4x + \frac{\pi}{2}}{2}\cos\frac{14x}{2} - \cos 4x = 0.$

$2\sin\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)\cos 7x - \cos 4x = 0.$

$\cancel{2\left(\sin 4x \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos 4x \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \cos\left(\cos 4x \cos 3x - \sin 4x \sin 3x\right) - \cos 4x = 0}$

$\cancel{\cos 9x + \sin}$

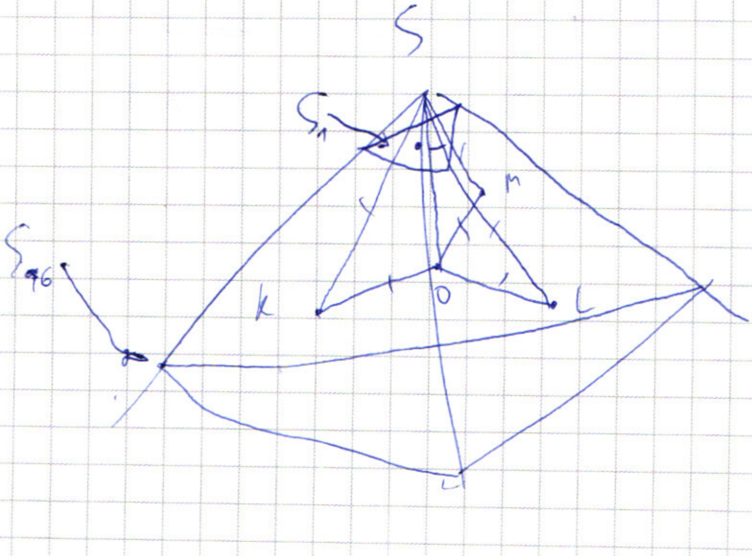
$\cos 4x = 2\cos^2 2x - 1 = 2(\cos 2x)^2 - 1 =$

$= 2(2\cos^2 2x - 1)^2 - 1 =$

$= 2(4\cos^4 2x + 1 - 4\cos^2 2x) - 1 =$

$= 8\cos^4 2x - 8\cos^2 2x + 1$

$\cancel{\sin 4 = 2\sin 2x \cos 2x = 4\cos x \sin x (2\cos^2 x - 1)}$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x \cancel{- (\cos 5x +} + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$$

$$\sqrt{2}\left(\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + \cancel{\sqrt{2}}\left(\sin\left(5x - \frac{5\pi}{4}\right)\right) - \cancel{\sqrt{2}}\cos 4x = 0$$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0.$$

$\sin 5x \cos\frac{\pi}{4} - \cos 5x \sin\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{5}{x}5x - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \end{cases} +$$

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta.$$

$\alpha+\beta = x$, $\alpha - \beta = y$

$9x + \cancel{\frac{\pi}{4}} + 5x - \cancel{\frac{\pi}{4}} = 14x.$

$9x + \frac{\pi}{4}$:

$$\begin{cases} x = \alpha+\beta \\ y = \alpha-\beta \end{cases} \qquad \alpha = \frac{x+y}{2} \qquad \beta = \frac{x-y}{2}.$$

~~$2\sin x \cos y =$~~

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$

$$2\sin\frac{9x + \frac{\pi}{4} + 5x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{9x + \frac{\pi}{4} - 5x + \frac{\pi}{4}}{2} - \cos 4x = 0$$

$$2\sin 7x \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4x = 0$$

$$\cancel{\sqrt{2}\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right)} - \cos 4x = 0$$

$$\cancel{2\cos\frac{9x - \frac{\pi}{4} + 5x + \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{9x - \frac{\pi}{4} - 5x - \frac{\pi}{4}}{2} - \cos 4x = 0.}$$

$$\cancel{2\cos 7x - \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$2\sin 7x \cdot \left(\cos 4x \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 4x \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \cos 4x = 0.$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$\cancel{y^2 - xy - 4y - 2x^2}$

$\cancel{y(y-x) - 2x^2}$

$\cancel{4(2x-y) + (y-\sqrt{2}x)(y+\sqrt{2}x)}$

$\cancel{y^2 - x(y+2x) + 4(2x-y) = 0}$

$y^2 - 4y + xy = 2x^2 - 8x + 2xy$

$y(y-4+x) = 2x(x-4+y)$

$(y-2x)(y-4+x) = 0$

$y = 2x$ или $y = 4 - x$

$(x^2 \cdot 16 \cdot x^2)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$

$(16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$

$-\ln x \cdot \log_2(16x^4) = \ln\left(\frac{2}{x^6}\right) \cdot \log_2(2x)$

$-\ln x \cdot (4 + 4\log_2 x) = \frac{1}{6\log_2 x} \cdot (1 + \log_2 x)$

$-\frac{\log_2 x}{\log_2 e}$

$\log_2 x = t$

$\log_2 e = a \neq 0$ <0

$-\frac{t}{a}(4 + 6t) = \frac{1}{6t}(1+t) \Big| \cdot 6ta$

$-6t^2(4+6t) = a(1+t)$

$-24t^2 - 36t^3 = a + at$

$24t^3 + 36t^2 + at + a = 0$

$24t^2(t+1) + a(t+1) = 0$

$(t+1)(24t^2 + a) = 0$

$e \approx 2{,}71$

$x = 2$ — реш.

$\Downarrow$

$y = 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 4-x$. $\quad x>0 \Rightarrow y>0 \Rightarrow 4-x>0 \Rightarrow x<4$.

$$\left(x^2 (4-x)^4\right)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right)}$$

$$-\ln x \cdot \cancel{\log} \ln\left(x^2(4-x)^4\right) = \ln\left(\frac{4-x}{x^7}\right) \ln(4-x)$$

$$-\ln x \cdot \left(2\ln x + 4\ln(4-x)\right) = \left(\ln \cancel{(4-} (4-x) - 7\ln x\right) \ln(4-x).$$

$\ln x = a$

$\ln(4-x) = b$.

$\cancel{b} \quad -a(2a+4b) = (b-7a)\cdot b$.

$-2a^2 - 4ab = b^2 - 7ab$

$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0$.

$a = b = 0$ – не решение.

$\frac{b}{a} = t$

$t^2 - 3t + 2 = 0$.

$\left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -2 \end{array}\right.$ $\quad \cancel{\ln}$ $\quad \begin{array}{l} \ln(4-x) = \ln x \\ \ln(4-x) = -2\ln x \end{array}$

$\ln \frac{4-x}{x} = \ln\left(\frac{4}{x} - 1\right) = 0$. $\quad \frac{4}{x} - 1 = 1 \quad \frac{4}{x} = 2$

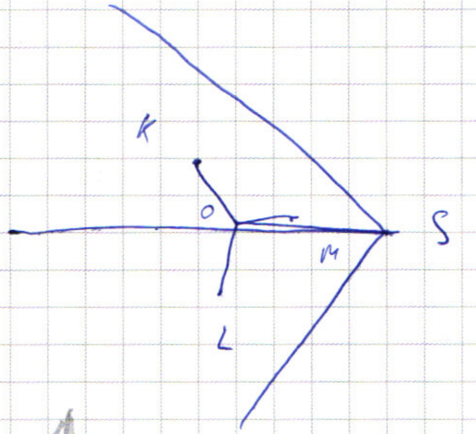
$x = 2$.

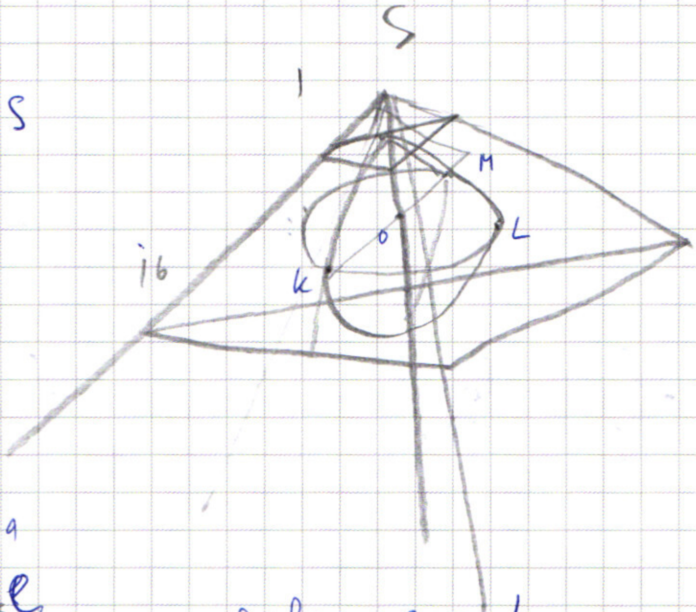
$\ln \frac{4-x}{x^{-2}} = 0 \quad 4x^2 - x^3 = \cancel{0}1 \quad \cancel{x=0} \quad x^3 - 4x^2 + 1 = 0$

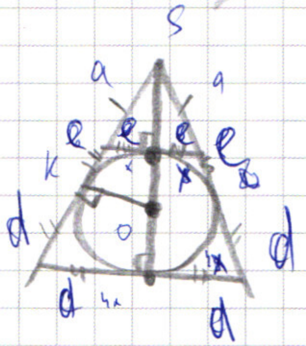
$\cancel{x=4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



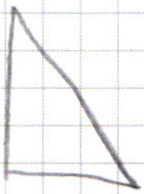


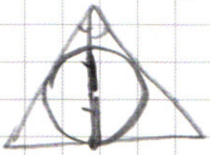


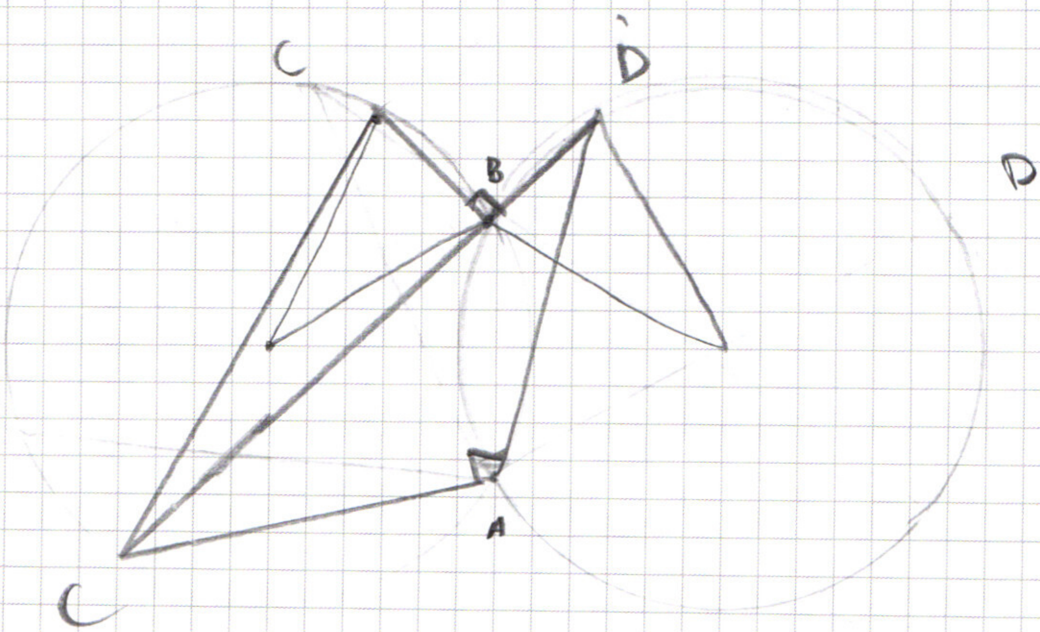
$a+b+c = a+e+d.$

$\cancel{\frac{c+d}{b+e}}$ $\frac{b}{c} = \frac{1}{4}$

$\frac{e}{d} = \frac{1}{4}.$ $x = y$







ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$76 + 2(2^{32}-1)x - 2^x + 3\cdot 2^{34} \geq 0$~~ ~~$76 + (2^{33} - 2)x - 2^x + 3\cdot 2^{24} \geq 0$~~

~~$(2^{33}-2)x - 2^x \geq -3\cdot 2^{24} - 76$~~

~~$2^{33}x - 2x - 2^x \geq -3\cdot 2^{24} - 76$~~

9261.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

$4 \cdot 4 \cdot 3 =$

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

9261 | 3

1029 | 3, 12 | 343

343 | 7, 28, 63 | 49

$1120 + 560 = 1680$

3 3 3 7 7 7 1 1

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2} \cdot \frac{5\cdot 4}{2} =$

$= 16\cdot 5\cdot 7 = 80\cdot 7 = 560.$

3 9 7 7 7 1 1 1

$C_8^1 \cdot C_7^1 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2} = 56\cdot 20 =$
$= 1120.$

№5. $|x+y+5| + |y-x+5| = 10.$

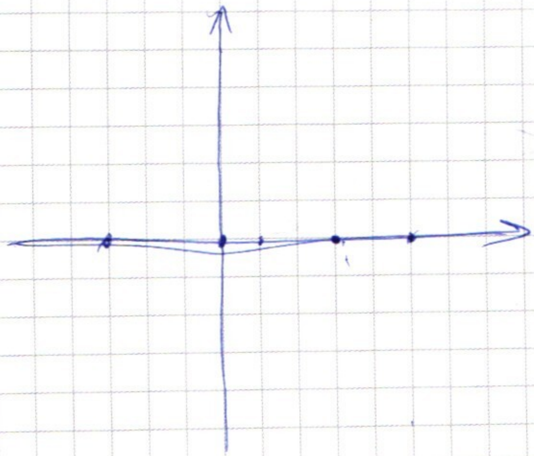
$|y+10| + |y| = 10.$

$x = 3.$

$|y+8| + |y+2| = 10$

$x = -3.$

$|y+2| + |y+8| = 10.$



черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

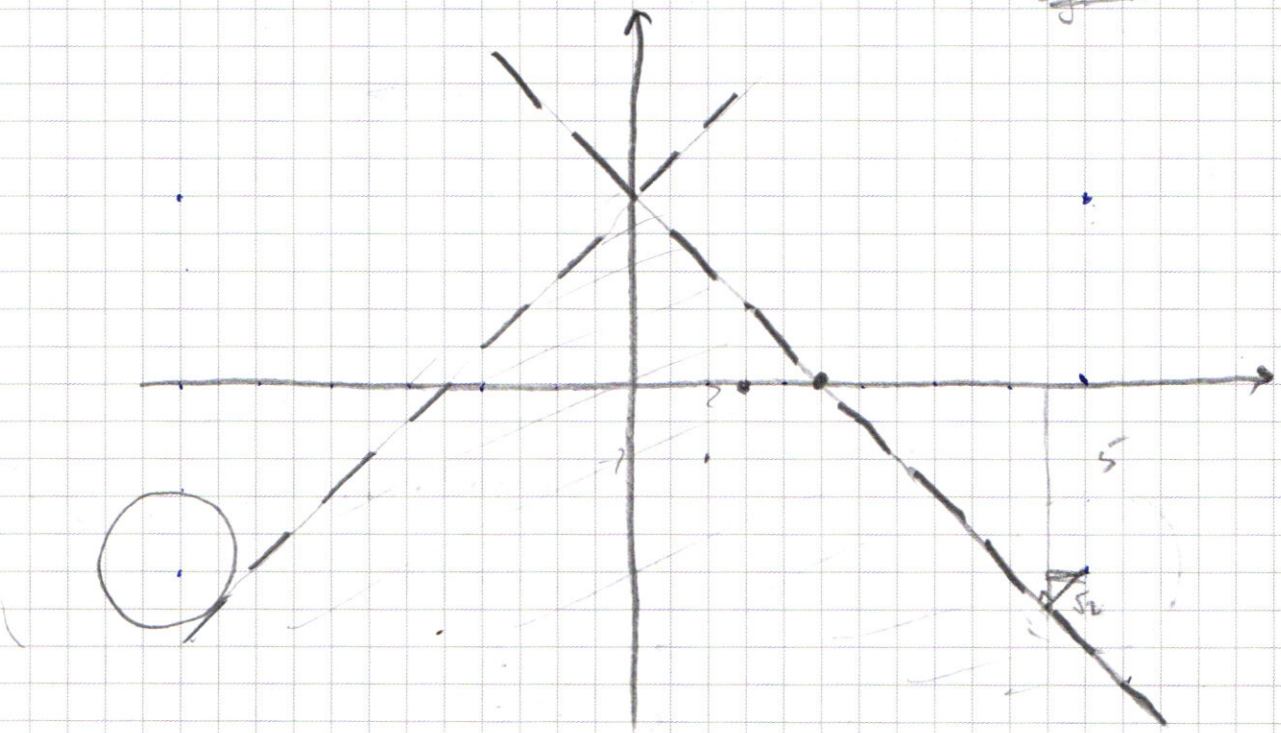
$x = 20$

$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a$

$a > 0$

$|y+25| + |y-15|$ $\varnothing$

$x = 10$ $\varnothing$



$x + y \leq 5$

$|2 - 2 + 5| + |-2 - 2 + 5|$

$|x + y + 5| + |y - x + 5| = 10$

1)

$x + y > 5$ — нет реш.

$y - x > 5$ — нет реш.

$\Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 5 \\ y - x \leq 5 \end{cases}$ $\quad y \leq 5 - x$ $\quad y \leq x + 5$

$5 - x$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-12)^2+(y-5)^2 = 74$

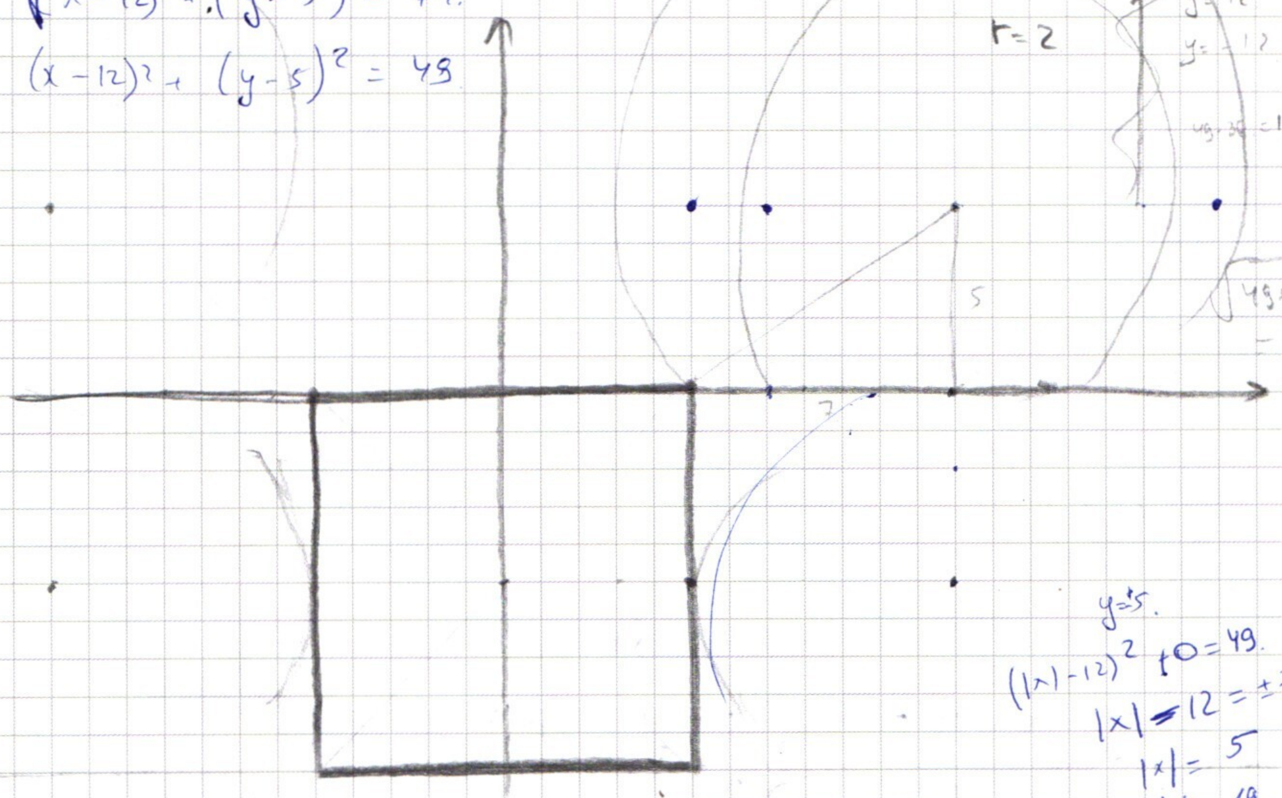
$(x-12)^2+(y-5)^2 = 49$

$x^2+y^2=4$ $|y|=12$

$r=2$

$y=12$

$y=-12$



$\sqrt{49+25} = \sqrt{74}$

$y=5$

$(|x|-12)^2+0=49$

$|x|-12=\pm 7$

$|x|=5$

$|x|=19$

$x=12$

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

1) $x+y+5\geq 0$ $y\geq -x-5$

$y-x+5\geq 0$ $y\geq x-5$

$x+y+\cancel{5}+y-x+\cancel{5}=10$

$2y=0$

$y=0$

$x\geq -5$

$x\leq 5$

2) $x+y+5\leq 0$

$y-x+5\leq 0$

$-x-y-\cancel{5}-y+x-\cancel{5}=10$

$-2y=20$

$y=-10$

$x\leq 5$

$x\geq -5$

$x+y+5\geq 0$ $y\geq -x-5$ $y\geq -10$

3) $y-x+5\leq 0$ $y\leq x-5$ $y\leq 0$

$x+\cancel{y}+5-\cancel{y}+x-5=10$

$x=5$

$a=49$

$a=\sqrt{74}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

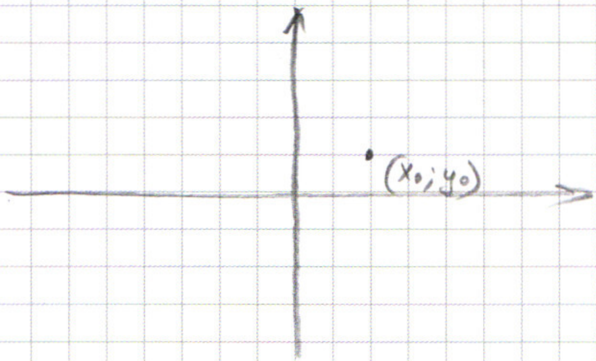
~~$|y| = 1$~~

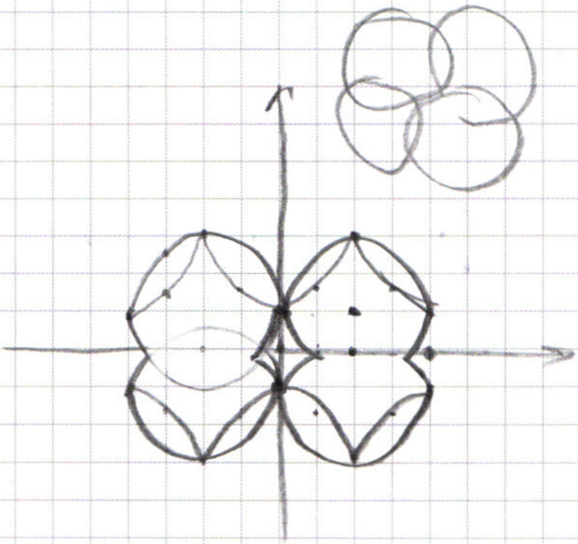
$|y| = 3$

$|y| - 1 = \pm 2$

$(|x| - x_0)^2 + (|y| - y_0)^2 = R^2$

$(|x| - 2)^2 + (|y| - 1)^2 = 4$





$(|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 9$

$x = -4$ $\quad$ $x = -3$

$|y| - 1 = 0$ $\quad$ $(|y| - 1)^2 = 3$

$|y| = 1$ $\quad$ $|y| =$

$y = \pm 1$

$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$9^{\log_8 9} =$

$=$

$y^2 + xy - 4y - 2x^2 - 2xy + 8x = 0.$

$y(y + x - 4) - 2x(x + y - 4) = 0.$

$(y - 2x)(y + x - 4) = 0.$

$y = 2x$ или $y = 4 - x.$

~~$8^{\log_2 8} = 8^3$~~

$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)} = y^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} = (2x)^{\ln 2 - 6\ln x}$

$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}$ $\quad$ $x > 0$ ОДЗ.

$-\ln x\,(4 + 6\log_2 x) = (\ln 2 - 6\ln x)\cdot(1 + \log_2 x).$

$\log_2 x = a$

$\ln x = b$

$-b(4 + 6a) = (\ln 2 - 6b)(1 + a).$

$-4b - \cancel{6ab} = \ln 2 - 6b + a\ln 2 - \cancel{6ab}$

$2b = \ln 2(1 - a).$

$2\ln x = \ln 2(1 - \log_2 x)$

$2\log_2 x = 1 - \log_2 x$

$\log_2 x = 1.$ $\quad$ $x = 2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)