

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

4 + 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

4 + 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

4 + 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

4 + 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

15 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$$

Возможны комбинации из следующих цифр:

1) 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1

2) 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1

В первом случае сначала нужно выбрать в числе 3 места для троек:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56$$

Потом из оставшихся мест выбрать еще 3 для единиц:

$$C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$$

Оставшиеся 2 единицы встанут на оставшиеся места. Всего вариантов: $56 \cdot 10 = 560$

Во втором случае выберем места для "9" и "3":

$$8 \cdot 7 = 56$$

Из оставшихся выберем места для трёх "7":

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$$

$$\text{Итого: } 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\text{Всего вариантов: } 1120 + 560 = 1680$$

Ответ: 1680

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x) \cdot$$

$$\cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \sin 7x - \sqrt{2} \sin (2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \quad | : \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cdot \cos (2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sin (2,5x - \frac{\pi}{8}) \cdot \cos (4,5x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos (2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin (\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos (\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = 2\pi n \end{cases} \quad (\{n; m; k\} \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + 2\pi m \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \pi k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{4}{5}\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{4}{9}\pi m \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{8} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{20} + \frac{4}{5}\pi n \quad (n \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{12} + \frac{4}{9}\pi m \quad (m \in \mathbb{Z})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases} \quad 2 \text{ решения}$$

$$1) |y+5+x| + |y+5-x| = 10$$

$$\text{I. } \begin{cases} y+5+x \geq 0 \\ y+5-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow y+5 \geq |x|$$

$$\bullet y=0 \rightarrow |x| \leq 5 \rightarrow -5 \leq x \leq 5$$

$$\text{II. } \begin{cases} y+5+x \geq 0 \\ y+5-x < 0 \end{cases} \rightarrow -x \leq y+5 < x$$

$$y+5+x - y-5+x = 10$$

$$\bullet x=5 \quad -5 \leq y+5 < 5 \\ -10 \leq y < 0$$

$$\text{III. } \begin{cases} y+5+x < 0 \\ y+5-x \geq 0 \end{cases} \rightarrow x \leq y+5 < -x$$

$$-x - x - y - 5 - x = 10$$

$$\bullet x=-5 \quad -5 \leq y+5 < 5 \\ -10 \leq y < 0$$

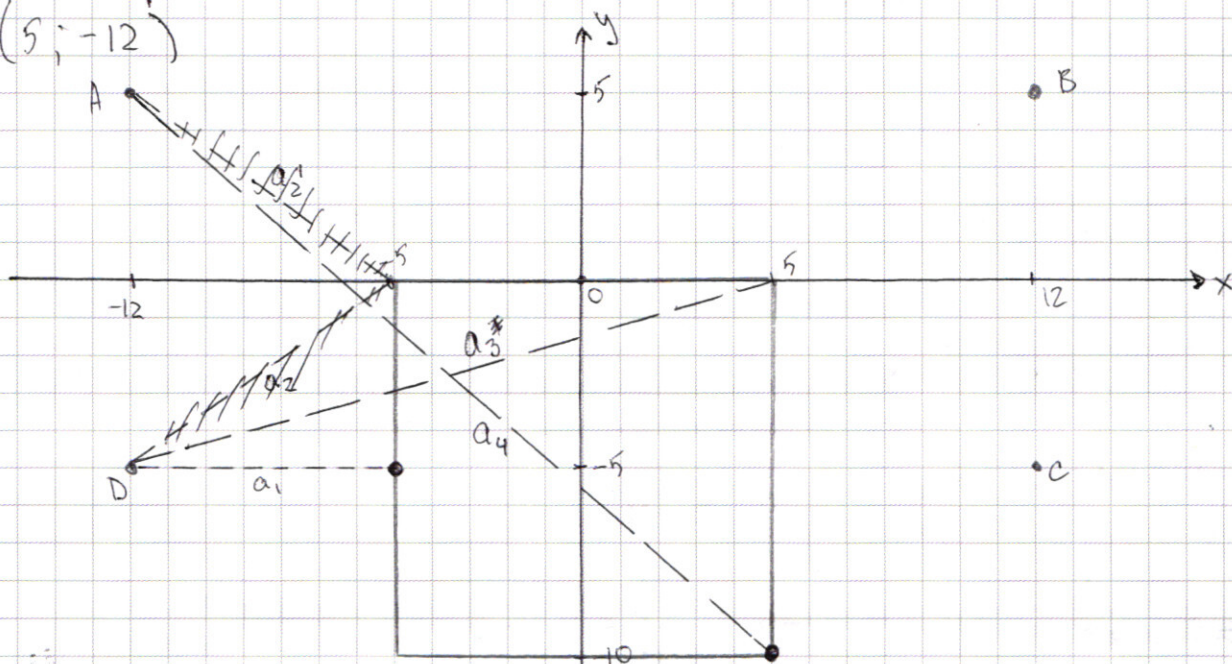
$$\text{IV. } \begin{cases} y+5+x < 0 \\ y+5-x < 0 \end{cases} \rightarrow y+5 < -|x|$$

$$-y-5-x - y-5+x = 10$$

$$\bullet y=-10 \quad -5 < -|x| \quad -5 < x \leq 5$$

$$2) (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$$

Графически это 4 окружности с радиусами $\sqrt{a}$ и центрами в точках $(5; 12); (-5; -12); (-5; 12); (5; -12)$



Т.к. полученная картина симметрична, рассмотрим на одной стороне. Проведём анализ и выясним, при каких " a " есть две точки пересечения.

Введём $r = \sqrt{a}$:

- 1) $0 \leq r \leq a_1$ ($a_1 = 7$): корней нет
- 2) $r = a_1 = 7$ - два корня (✓) ($a = \cancel{49}$)
- 3) $a_1 < r \leq a_3$ ($a_3 = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314}$)
корней > 2 (не интересуется)
- 4) $a_3 < r < a_4$ ($a_4 = 17\sqrt{2} = \sqrt{578}$)
корней > 2
- 5) $r = a_4 = 17\sqrt{2}$ - 2 корня ($a = \cancel{578}$)

Также $a \geq 0$ т.к. $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 \geq 0$

Ответ: $\cancel{49}$; 49; 578

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$\begin{cases} (x^2 \cdot y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (x > 0; y > 0)$$

$$1) \frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}} \quad | \cdot \frac{y^{2\ln x}}{y^{\ln y}}$$

$$\frac{y^{3\ln x}}{x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y}} = 1 \quad | \cdot x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$y^{3\ln x} = x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$y^{\ln x} \cdot y^{2\ln x} = x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$y^{\ln x} \cdot x^{2\ln y} = x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y} \quad | : (y^{\ln y} \cdot x^{2\ln y})$$

$$y^{\ln(\frac{x}{y})} = x^{2\ln(\frac{x}{y})}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(\frac{x}{y})} = 1 \quad \text{Здесь возможно два варианта:}$$

$$\text{I. } \frac{x^2}{y} = 1 \rightarrow x^2 = y$$

$$\text{II. } \ln\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \rightarrow x = y$$

$$\text{I (p). } x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17 \quad \begin{cases} x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x-2 \\ \hline x^3 - 2x^2 & x^2 + x - 4 \\ \hline -x^2 - 6x & -4 \\ -x^2 - 2x & -4 \\ \hline -4x + 8 & -4x + 8 \\ -4x + 8 & 0 \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{1 + 2\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$II(p). \quad \cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0 \quad / : (-2)$$

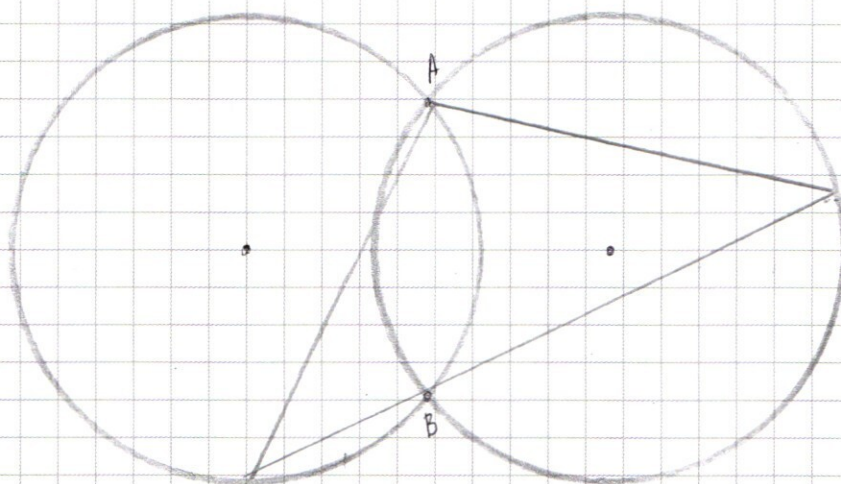
$$x(x - 2) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad (\text{одно})$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$O_{\text{вет}}: (0; 0), (2; 4), (2; 2), \left(\frac{-1 - \sqrt{17}}{2}; \frac{9 + \sqrt{17}}{2} \right), \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\angle CFD = 90^\circ$$

№ 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$y > 2^x + 3 \cdot 2^{34} - 1 \quad (\text{равносильно, т.к. целые числа})$$

$$76 + 2^{33} - 2x - (2^x + 3 \cdot 2^{34} - 1) > 1 \quad (\text{чтобы был}$$

хоть один "y"):

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2x$$

$$2^x < 2^{33} \cdot (-5) + 76 - 2x$$

$2^x > 0$, по этому $x < 0$, в правой части слишком маленькое значение

Найдем x при

$$2^x = 2^{33} \cdot (-5) + 76 - 2x$$

2^x можно пренебречь, т.к. оно мало и стремится к 0.

$$2x = -5 \cdot 2^{33} + 76$$

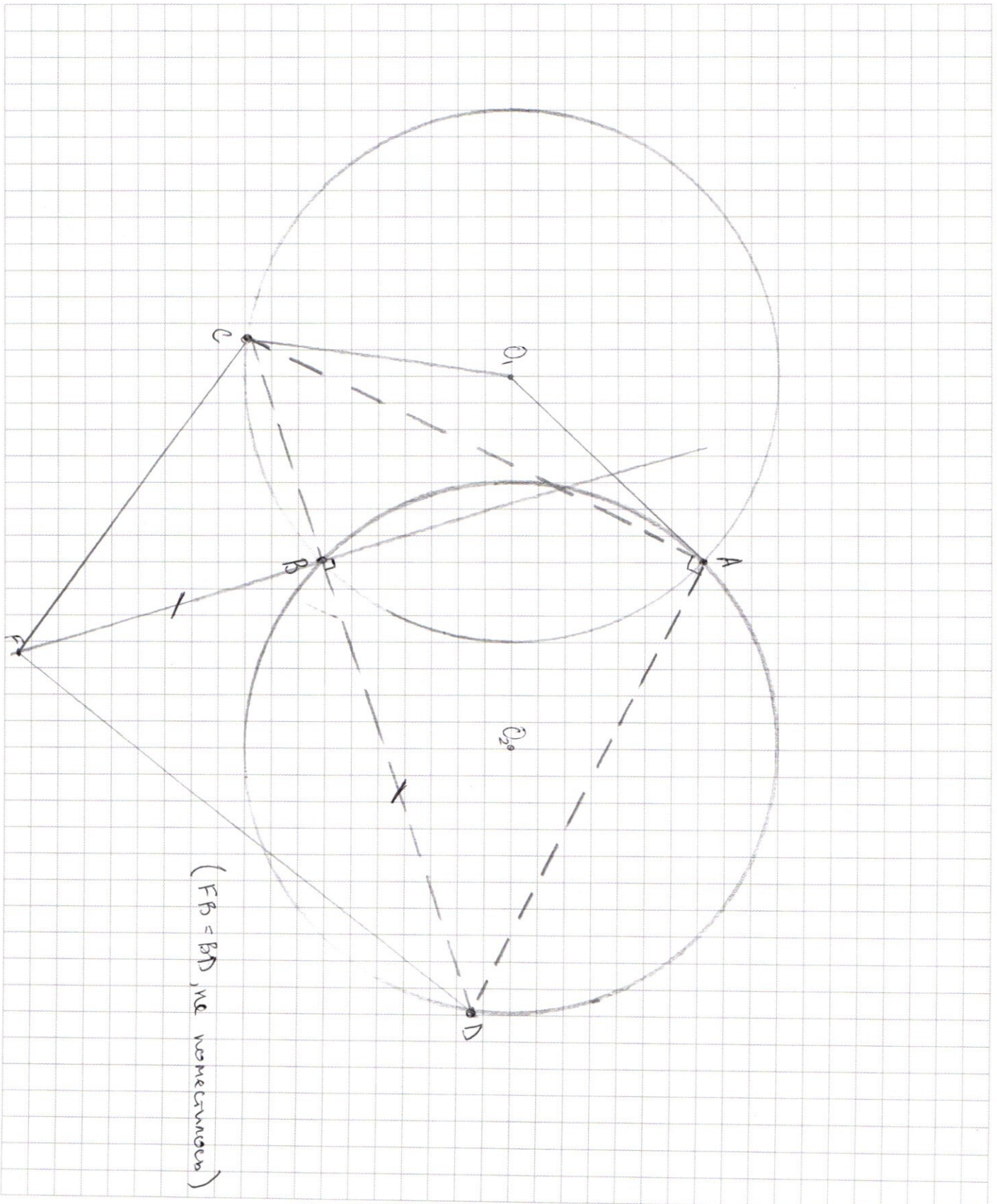
$$x = -5 \cdot 2^{32} + 38$$

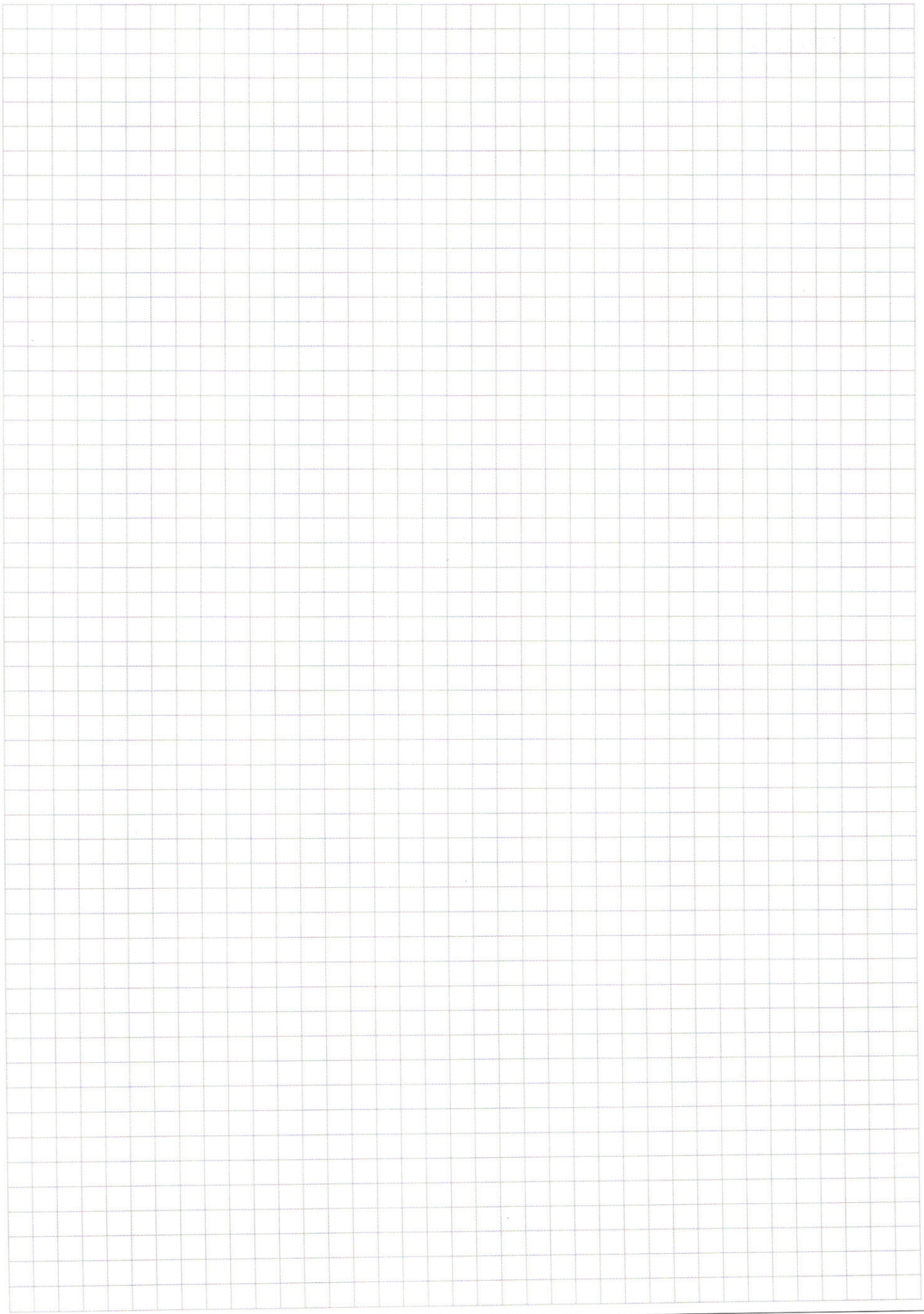
$$\text{Значит } x < -5 \cdot 2^{32} + 38$$

Кол-во "y" у каждого "x" находится по формуле:

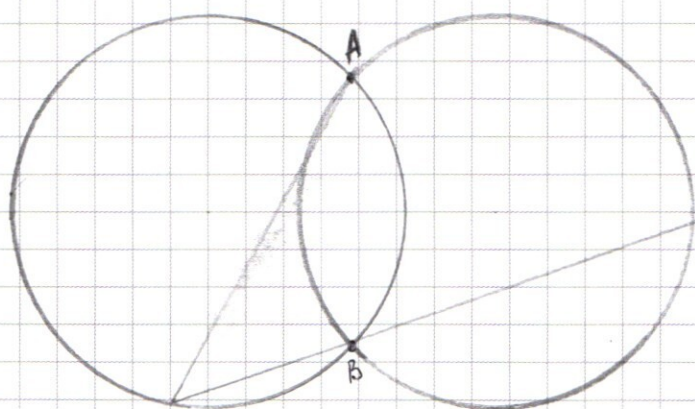
$$N(y) = 76 + 2^{33} - 2x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} = 76 - 2x - 2^x - 5 \cdot 2^{33}$$

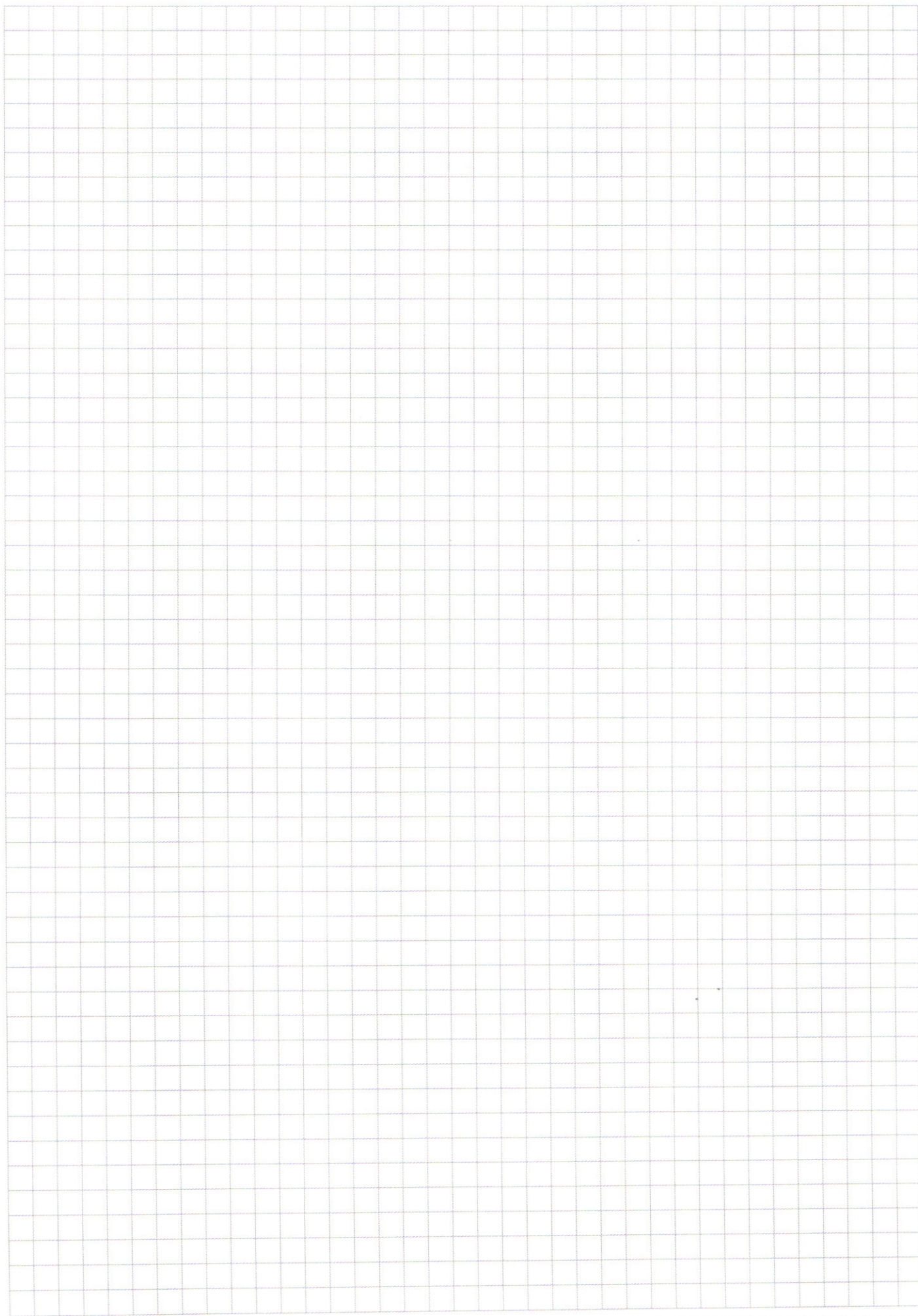
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

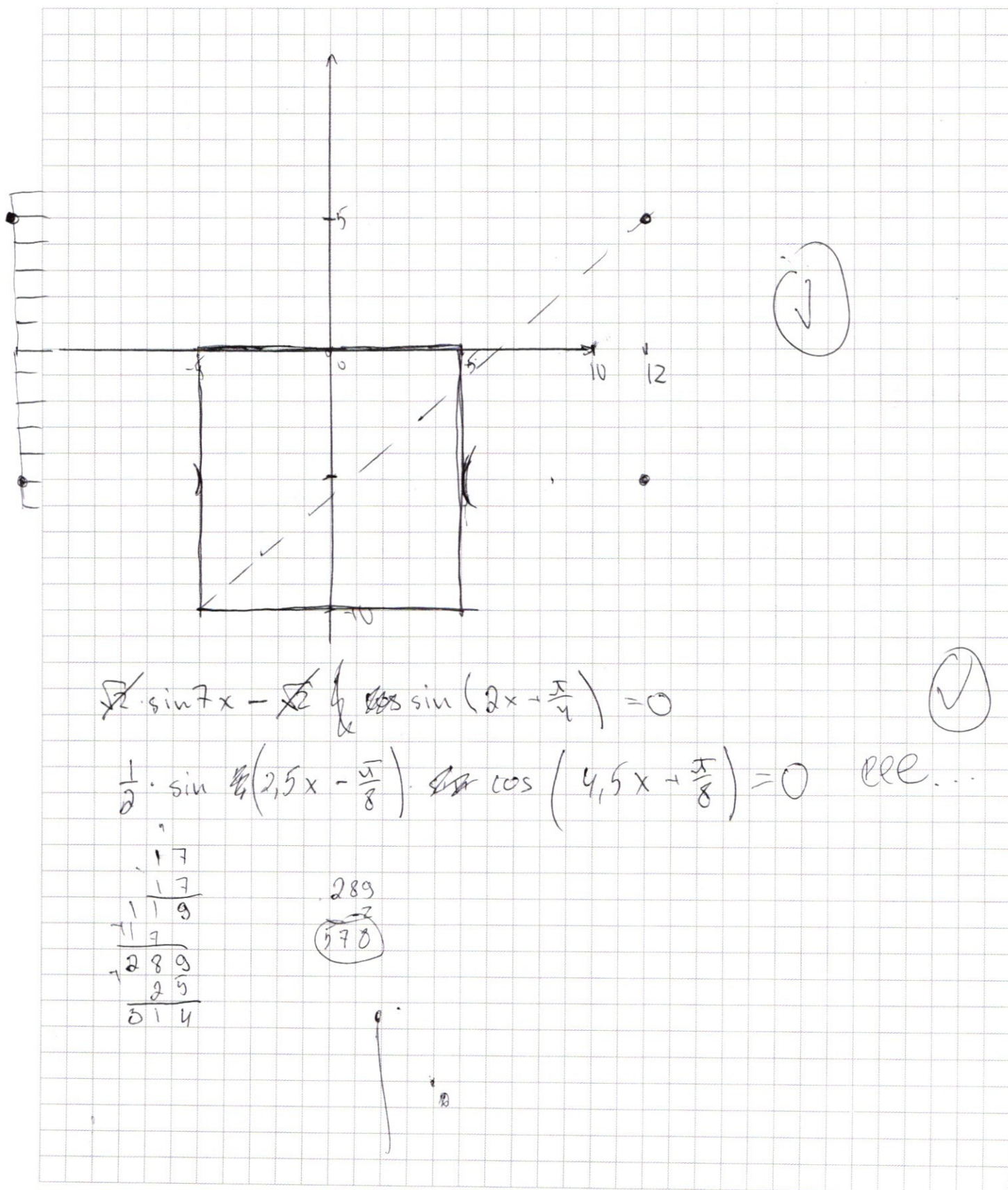




☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

т.к. чётные

верно неч

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} - 1$$

$$y < 76 + 2^{33} - 2x$$

$$76 + 2^{33} - 2x - 2^x + 3 \cdot 2^{24} + 1 \geq 1$$

$$76 + 2^{33} - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{24} - 2$$

тут -2 чтобы вывести y

$$2^x < 2^{33} - 3 \cdot 2^{24} + 78 - 2x$$

$$2^3 = 512$$

$$509$$

$$2^x < 2^{24} \cdot 509 + 78 - 2x$$

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{34} - 1 \quad (\text{т.к. чётные числа}) \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} - 1 < 76 + 2^{33} - 2x$$

И: $76 + 2^{33} - 2x - (2^x + 3 \cdot 2^{34} - 1) > 1$, чтобы гарантированно было хотя одно y .

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2x$$

$$2^x < 2^{33} - 3 \cdot 2^{34} + 76 - 2x$$

$$2^x < 2^{33} \cdot (-5) + 76 - 2x$$

$$N(y) =$$

$$(x < 1)$$

$$2^x = 2^{33} \cdot (-5) + 76 - 2x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\operatorname{tg} x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 4\pi n$$

$$\frac{x}{4}$$

$$\frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 2 \sin 7x$$

$$3x + \frac{3\pi}{4} = \pi + 4\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{4 \cdot 85} + \frac{4}{9} \pi n$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-\sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\sin^2 2x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \sin 2x = \cos^2 2x - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\left(\frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right)^2 - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \left(\frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \right)^2 - \sqrt{2} \sin 7x \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = y$$

$$(1 \neq y^4)$$

$$\frac{4y^2}{1 + y^2} - \sqrt{2} \sin 7x \cdot 2 \cdot y = \frac{(1 - y^2)^2}{1 + y^2} - \sqrt{2} \sin 7x \cdot (1 - y^2)$$

$$4y^2 - \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot 2y - \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot 2y^3 = 1 - 2y^2 + y^4 - \sqrt{2} \cdot \sin 7x +$$

$$+ \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot y^4$$

$$y^4 (1 + \sqrt{2} \cdot \sin 7x) + \sqrt{2} \cdot \sin 7x \cdot 2 \cdot y^3 - 4 \cdot y^2 + \sqrt{2} \sin 7x \cdot 2 \cdot y - \sqrt{2} \cdot \sin 7x = 0$$

КАМЕНЬ



$$\sqrt{2} \sin 7x (\sin^2 2x - \cos 2x) = (\sin 2x - \cos 2x) (\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - \sin 2x - \cos 2x = 0$$

$$(x^2 \cdot y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$x > 0, y > 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad | :2$$

~~$$(y - 2x)^2 + y$$~~

~~$$(y - x)^2 + (y - 2x)^2 - y + 2y^2 = 2xy - 4x^2 + x^2 - x^2 +$$~~

$$(x^2 \cdot y^4)^{-\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}}$$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}}$$

$$\frac{y^{3\ln x}}{x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y}} = 1$$

$$y^{3\ln x} - x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y} = 0 \quad | : y^{3\ln x}$$

~~$$1 - x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y - 3\ln x} = 0$$~~

$$x^{2\ln x} \cdot y^{\ln \frac{y}{x^3}} = 1$$

~~$$x^{2\ln x^2} = y^{\ln \frac{x^3}{y}}$$~~

$$x^{\ln x^2} \cdot \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^3}} = 1$$

$$\left(\frac{y}{x^3}\right)^{\ln y}$$

$$8 - 4 - 6 - 2 + 8$$

-1

$$a^{\log_2 b} = b^{\log_2 a}$$

$$3^{\log_3 2} = 2^{\log_3 3}$$

$$3 \cdot 2^{\log_3 2} = 2^{\log_3 3} = 2$$

$$2 \cdot 2^{\log_3 2} = 2$$

$$-5 < -1x1 \quad x < -5$$

$$|x| < 5$$

$$-5 < -x$$

$$x^{2\ln y} \cdot y^{\ln x} = x^{2\ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$y^{\ln(\frac{x}{y})} = x^{2\ln(\frac{x}{y})}$$

$$\left(\frac{x^2}{y}\right)^{\ln(\frac{x}{y})} = 1$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = 0$$

$$x = y \quad \text{wtf???$$

~~$$y^2 - y^2 - 2y^2 + 8y - 4y = 0$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 026 \\ \underline{24} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ \underline{30} \\ 8 \\ \underline{6} \\ 27 \\ \underline{27} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 09 \\ \underline{9} \\ 0 \end{array}$$

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$$C_3^8 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = 56 \quad \text{остаётся ещё 3 цифры}$$

$$\text{и 5 мест} \quad C_3^5 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10 \quad \text{и ост. единицы один вариант}$$

$$I. 560 \quad \text{②}$$

$$II. \quad \begin{array}{c} 8 \cdot 7 \cdot 20 = 1120 \quad \text{②} \\ C_3^6 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = 20 \end{array}$$

$$\cos x - \cos y = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$180^\circ \quad 90^\circ = \frac{1}{2} \cdot \sin 135^\circ \cdot \sin 90^\circ$$

~~1/2 - 1/2~~

①

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1$$

$$\frac{(f-g) \cdot h}{(h-x)(f-g)}$$

$$(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x +$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin 7x \cdot \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2} \sin 7x \cdot \sqrt{2} \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos x - \cos y = -2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$-1 - 0 = -2 \cdot \sin 135^\circ \cdot \sin 45^\circ$$

②

$$\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$$

③

$$\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$(\cos^2 2x - \sin^2 2x) \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$-2 \cos 7x - 2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$? 2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sin^2 2x = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x - \cos^2 2x$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sin^2 2x = 2 \sin 7x (1 - \sin^2 x) - 1 + \sin^2 2x$$

$$2 \sin 7x - 4 \sin 7x \cdot \sin^2 x$$

$$\sin 7x (2 \sin 2x - 2 + 4 \sin^2 x) = 2 \sin^2 2x - 1$$

$$\sin 2x (2 \sin 7x - \sin 2x) = \cos 2x (2 \sin 7x - \cos 2x)$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + \frac{4 \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2}{(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2})^2}$$