

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

11)

$$3261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Т.к. и 3, и 7 - простые числа, то в записи этих восьмизначных чисел должно быть 3 тройки, 3 семерки и 2 единицы. Всего перестановок этих чисел в восьмизначном числе $8!$, но, из-за повторения цифр, среди этого количества будут повторяться числа. Разделив это число на $3!$ (из-за повторения троек), снова на $3!$ (из-за повторения семерок) и на $2!$ (из-за повторения единиц), получим $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$ - искомое количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3261.

Ответ: 560.

12)

$$\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 3x - \cos 5x = -2 \sin \frac{3x+5x}{2} \sin \frac{3x-5x}{2} = -2 \sin 4x \sin 2x$$

$$\sin 3x + \sin 5x = 2 \sin \frac{3x+5x}{2} \cos \frac{3x-5x}{2} = 2 \sin 4x \cos 2x$$

$$-\sqrt{2} \cos 4x = -\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = -\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$-2 \sin 4x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$1) \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

$$-2\sin \frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \sin \frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = 0 \quad /: -2$$

$$\sin \frac{\pi}{4} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad /: \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2x - \frac{\pi}{4} = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$2) 2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 2x + \sin 2x &= \cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 2\cos \frac{2x + \frac{\pi}{2} - 2x}{2} \cos \frac{2x - \frac{\pi}{2} + 2x}{2} = \\ &= 2\cos \frac{\pi}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

$$2\sin 7x - 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad /: 2$$

$$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \quad /: 2$$

$$1. \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$2. \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{2 \cdot 3\pi}{3 \cdot 8} + \frac{2\pi m}{9} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, \quad n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$$

23)

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln x}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

Введем ограничения:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-ие:

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = y^2 + xy - 4y - 2xy - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y(y+x-4) - 2x(y+x-4) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

$$1) y - 2x = 0$$

$$y = 2x$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^2}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x}}$$

$$2^{-4\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln \frac{2}{x^0}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^0}} \quad /: 2^{\ln \frac{2}{x^0}} \neq 0 \quad /: x^{-6\ln x} \neq 0$$

$$2^{\ln \frac{1}{x^4}} - \ln \frac{2}{x^0} = \ln \frac{2}{x^0} - \ln \frac{1}{x^0}$$

$$2^{\ln \frac{x^2}{2}} = x^{\ln 2}$$

$$e^{\ln 2 \ln \frac{x^2}{2}} = e^{\ln x \ln 2}$$

$$\ln 2 \ln \frac{x^2}{2} = \ln x \ln 2 \quad /: \ln 2$$

$$\ln \frac{x^2}{2} = \ln x$$

$$\frac{x^2}{2} = x \quad /: 2$$

$$x(x-2) = 0$$

$x_1 = 0$ - не подходит под ур-ие

$$x_2 = 2 \quad y = 4$$

$$2) y + x - 4 = 0$$

$$y = 4 - x > 0$$

$$x < 4$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}} \quad / : (4-x)^{-4\ln x} \neq 0$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2} - \ln \frac{1}{x^2}} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$e^{\ln x \ln \frac{1}{x^2}} = e^{\ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$\ln x \ln \frac{1}{x^2} = \ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^3}$$

$$-2\ln^2 x = \ln(4-x)(\ln(4-x) - 3\ln x)$$

Пусть $\ln x = a$, $\ln(4-x) = b$, тогда:

$$-2a^2 = b(b - 3a)$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 \quad / : a^2$$

Рассмотрим отдельно $a = 0$:

$$\ln x = 0 \quad x = 1$$

$$\ln(4-x) = \ln 3$$

$0 \neq \ln^2 3$ - противоречие (из ур-ия $-2a^2 = b(b - 3a)$)

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{b}{a}\right) + 2 = 0$$

$$D = 9 - 4 \cdot 2 = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$1) \frac{b}{a} = 2$$

$$\ln(4-x) = 2\ln x$$

$$4-x = x^2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$2) \frac{b}{a} = 1$$

$$\ln(4-x) = \ln x$$

$$4-x = x$$

$$x = 2 \quad y = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad y_1 = 4 - \frac{\sqrt{17}-1}{2} = \frac{8 - \sqrt{17} + 1}{2} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \text{ — не подходит под ограничение}$$

Все полученные решения системы $(2; 4)$, $(2; 2)$ и $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$ подходят под огр-ия.

Ответ: $(2; 4)$, $(2; 2)$, $(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2})$.

~ 6)

а) Пусть $\angle ACD = \alpha$, тогда по теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 2 \cdot 10 = 20$$

$$AB = 20 \sin \alpha$$

$$\angle ADC = 90^\circ - \alpha$$

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 20$$

$$AB = 20 \sin(90^\circ - \alpha) = 20 \cos \alpha$$

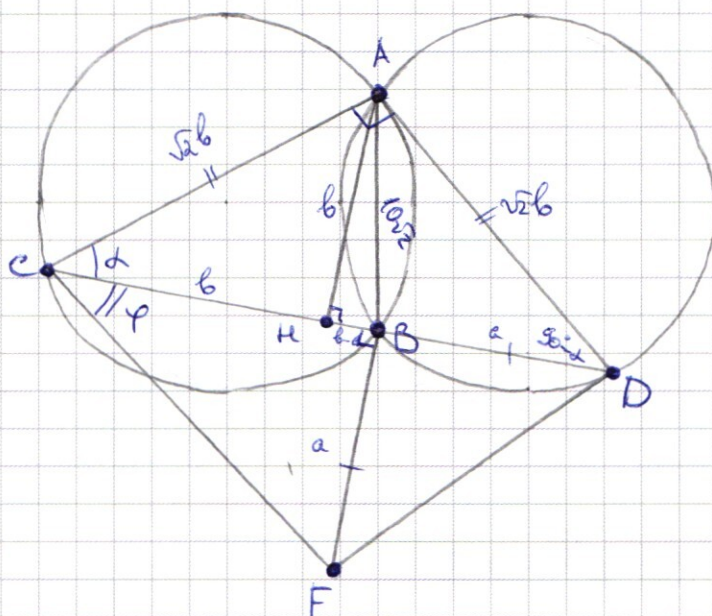
$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

Т.к. $0 < \alpha < 90^\circ$, то $\alpha = 45^\circ$, значит $\triangle ACD$ — равнобедренный. Проведём $AK \perp CD$, тогда AK — медиана в $\triangle ACD$, K — середина CD . Пусть $CD = 2b$, а $BF = BD = a$, тогда:

$$AC = AD = \frac{CD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}b \text{ (по т. Пифагора)}$$

$AK = b$, т.к. это медиана в прямоугол. $\triangle ACD$

$$KB = KD - BD = b - a$$



$$AB = 20 \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot 20}{2} = 10\sqrt{2}$$

По теореме Пифагора для $\triangle AHB$:

$$AH^2 + HB^2 = AB^2$$

$$b^2 + (b-a)^2 = b^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 2b^2 - 2ab + a^2 = 200$$

$$CB = CH + HB = b + b - a = 2b - a$$

По теореме Пифагора для $\triangle CBF$:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = (2b-a)^2 + a^2 = 4b^2 - 4ab + a^2 + a^2 = 2(2b^2 - 2ab + a^2) = 2 \cdot 200 = 400$$

$$CF = \sqrt{400} = 20$$

$$\text{д) } BC = 12 = 2b - a$$

По теореме Пифагора для $\triangle BCF$:

$$BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16 = a$$

$$2b = 12 + a = 28$$

$$b = 14$$

$$\text{Пусть } \angle BCF = \varphi, \text{ тогда } \sin \varphi = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}, \cos \varphi =$$

$$= \frac{3}{5}. \quad \sin \angle ACF = \sin(45^\circ + \varphi) = \sin 45^\circ \cos \varphi + \cos 45^\circ \sin \varphi =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$AC = \sqrt{2}b = 14\sqrt{2}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14 \cdot 7 \cdot 2 =$$

$$= 196$$

Ответ: а) 20; б) 196

~5)

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$((x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Рассмотрим первое ур-ие:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

Найдем по модульные нули:

$$x+y+5=0$$

$$y-x+5=0$$

$$y = -x-5$$

$$y = x-5$$

Рассмотрим все случаи раскрытия модуля:

$$1) \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$y \geq x-5$$

$$x+y+5+y-x+5=10$$

$$2y+10=10$$

$$y=0$$

$$2) \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$$

$$y < x-5$$

$$x+y+5-y+x-5=10$$

$$2x=10$$

$$x=5$$

$$3) \begin{cases} y < -x-5 \\ y \geq x-5 \end{cases}$$

$$y \geq x-5$$

$$-x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x=10$$

$$x=-5$$

$$4) \begin{cases} y < -x-5 \\ y < x-5 \end{cases}$$

$$y < x-5$$

$$-x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y-10=10$$

$$y=-10$$

Рассмотрим второе ур-ие:

$$1) \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$y \geq 0$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Ур-ие окр-ти с центром
в точке $(12; 5)$ и ра-
диусом $\sqrt{a}$

$$2) \begin{cases} x < 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$y \geq 0$$

$$(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$$

Ур-ие окр-ти с центром
в точке $(-12; 5)$ и ра-
диусом $\sqrt{a}$

$$3) \begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

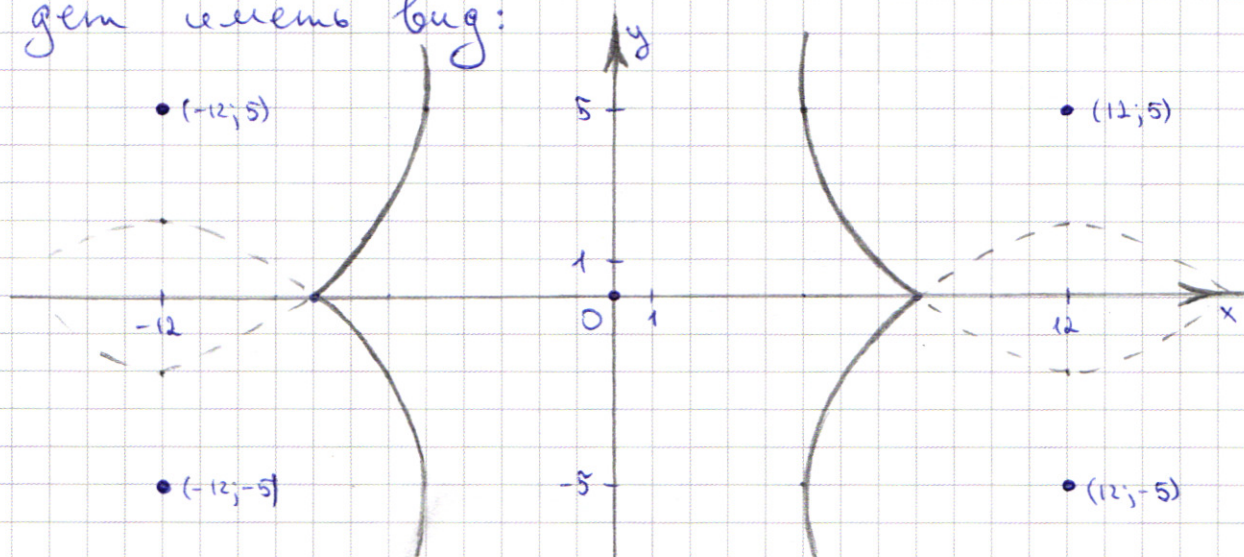
Ур-ие окр-ти с центром в точке $(12; -5)$ и радиусом $\sqrt{a}$

$$4) \begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

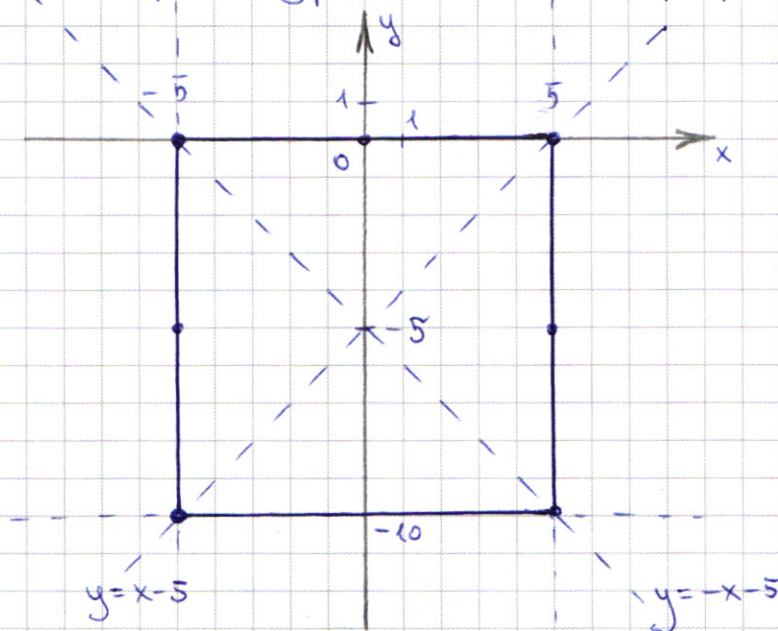
$$(x+12)^2 + (y+5)^2 = a$$

Ур-ие окр-ти с центром в точке $(-12; -5)$ и радиусом $\sqrt{a}$

На координатной плоскости второе ур-ие будет иметь вид:



А первое ур-ие имеет график:

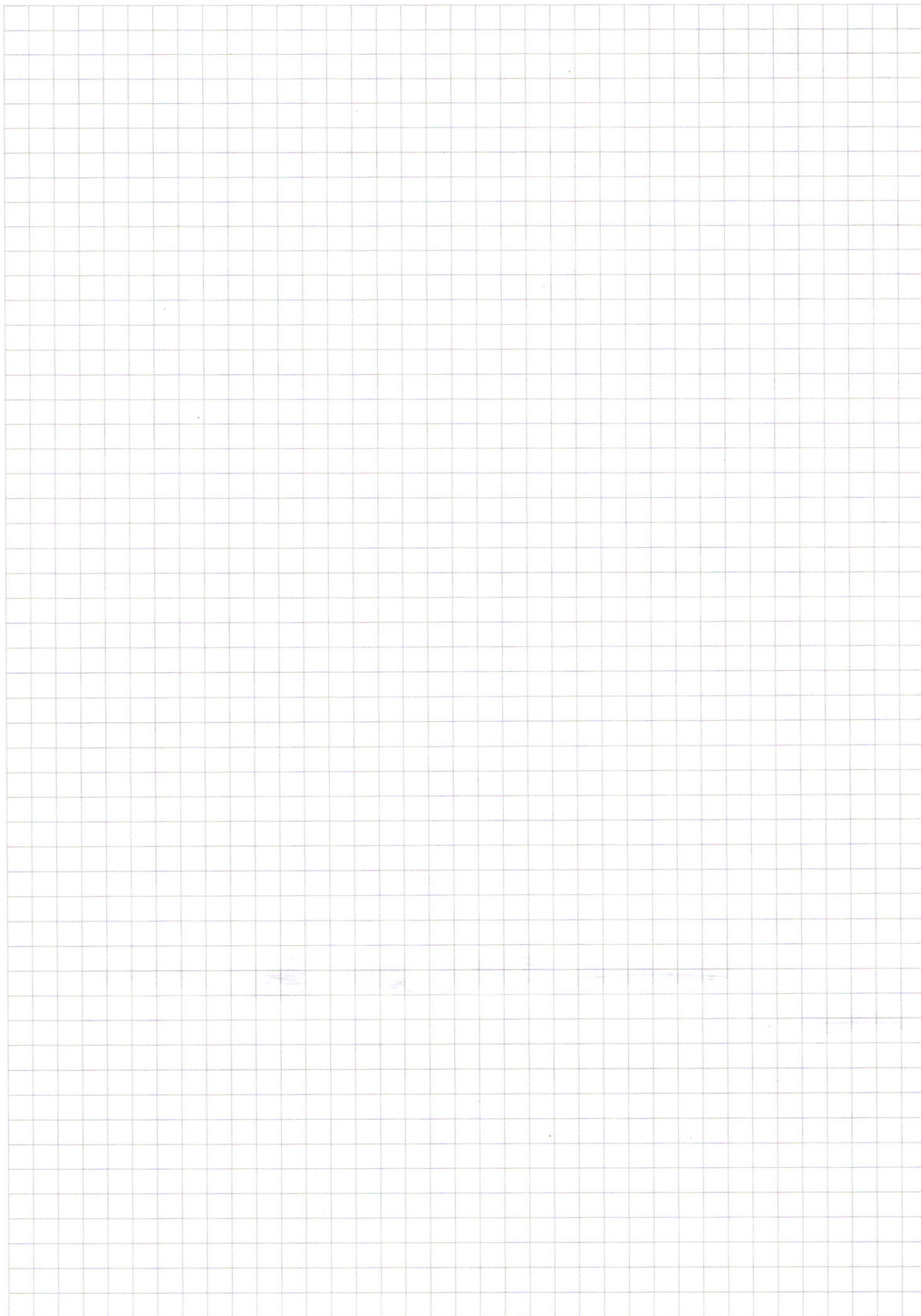


- квадрат

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Поймём, что, увеличивая a от нуля, первый раз будут решения, когда окр-ти с центрами $(12; -5)$ и $(-12; -5)$ коснутся вертикальных сторон квадрата в точках $(5; -5)$ и $(-5; -5)$ соответственно. В такой конфигурации будет ровно 2 решения. $\sqrt{a} = \rho((5; -5); (12; -5)) = 7$, $a = 49$. Потом, увеличивая a от 49, у нас будет 4 решения до момента, когда точка $(0; -10)$ будет решением второго ур-ня, потому что сначала окр-ти будут пересекать вертикальные стороны квадрата в 4 точках, а потом горизонтальные в 4 точках. В момент, когда точка $(0; -10)$ станет решением, будет ровно 2 решения, второе из которых $(0; 0)$. В этом случае $a = 5^2 + 12^2 = 169$ (по теореме Пифагора расстояние от $(12; 5)$ до $(0; 0)$). При $a > 169$ решений не будет, т.к. ~~график второго ур-ня будет пересекать ОУ~~ в точках $(0; y_0)$, где $|y_0| > 10$.

Ответ: 49 и 169



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot (1000 + 30 - 1) = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 3 \cdot (333 + 10) = 9 \cdot 3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$(21)^3 = \begin{array}{r} 441 \\ 21 \\ \hline 882 \\ 9261 \end{array}$$

$$11333777$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(5x + 4x) = \cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x$$

$$\sin(5x + 4x) = \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x$$

$$\cos 5x = b_1 \quad \cos 4x = b_2$$

$$\sin 5x = a_1 \quad \sin 4x = a_2$$

$$b_1 b_2 - a_1 a_2 - b_1 - \sqrt{2} b_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_1 = 0$$

$$b_1(b_2 - 1 + a_2) + a_1(-a_2 + b_2 + 1) - \sqrt{2} b_2 = 0$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 4x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0 \quad / : \sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\cos 2x + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$\sin 7x - \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{4}{x^2}}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y-4) - x(y+2x-8)$$

$$-2xy + xy$$

$$y^2 + xy - 4y - 2x^2 + 8x - 2xy = 0$$

$$y(y+x-4) - 2x(x-4+y) = 0$$

$$(y+x-4)(y-2x) = 0$$

$$1) y+x-4=0$$

$$y = -x + 4$$

~~$$(y+x-4)(y-2x) = 0$$~~

$$(x^2(-x+4)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot (4-x)^{-4\ln x} = 4-x$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln \frac{4}{x^2}}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln \frac{4}{x^2} + 4\ln x}$$

$$\ln \frac{4}{x^2} + \ln x^4 =$$

$$= \ln \frac{4x^4}{x^2} = \ln \frac{4}{x^2}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln \frac{4}{x^2}}$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} \cdot (4-x)^{\ln \frac{1}{x^2}} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2}}$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^2} - \ln \frac{1}{x^2}} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$e^{\ln x \ln \frac{1}{x^2}} = e^{\ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$\ln x \ln \frac{1}{x^2} = \ln(4-x) \ln \frac{4-x}{x^3}$$

$$-2\ln^2 x = \ln(4-x)(\ln(4-x) - 3\ln x)$$

$$-2a^2 = b^2 - 3ab$$

$$b^2 - 3ab + 2a^2 = 0 / : a^2$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\left(\frac{b}{a}\right) + 2 = 0$$

$$2) y-2x=0$$

$$y=2x$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^6}}$$

~~$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^6}}$$~~

$$16^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^6}} = 2^{\ln \frac{2}{x^5}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^5}}$$

$$2^{\ln \frac{1}{x^4}} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^6}} = 2^{\ln \frac{2}{x^5}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^5}}$$

$$2^{\ln \frac{1}{x^4} - \ln \frac{2}{x^5}} = x^{\ln \frac{2}{x^5} - \ln \frac{1}{x^6}}$$

$$2 = x$$

$$2^{\ln \frac{x^2}{2}} = x^{\ln 2}$$

$$10^{\ln 2 \cdot \ln \frac{x^2}{2}} = 10^{\ln x \ln 2}$$

$$\ln \frac{x^2}{2} = \ln x$$

$$\frac{x^2}{2} = x \quad x=2 \quad y=4$$

$$\ln x \ln \frac{1}{x^2} = \ln(2x) \ln \frac{2}{x^2}$$

$$2 = 9 - 8 = 1$$

$$\frac{b}{a} = \frac{3 \pm 1}{2}$$

$$\frac{b}{a} = 2$$

$$\frac{b}{a} = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x > 0$$

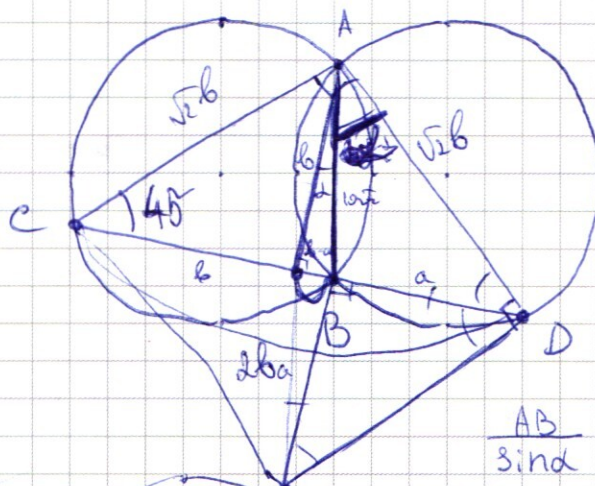
$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0$$

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

$$4 < \sqrt{17} < 5$$

$$3 < -1 + \sqrt{17} < 4$$

$$1,5 < \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} < 2$$



$$\sin(\alpha - \sin \frac{\pi}{4} - \alpha) = 0$$

$$2 \sin \frac{\alpha - \frac{\pi}{4}}{2} \cos \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sin(\alpha - \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\sin \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

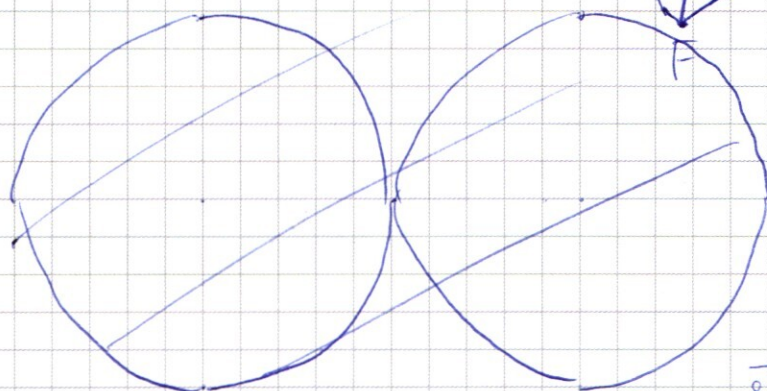
$$\cos \alpha = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 20$$

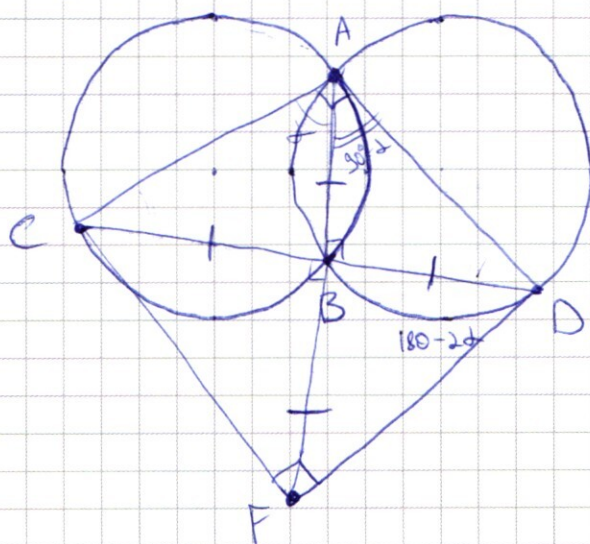
$$AB = 20 \sin \alpha = \sqrt{2} \cdot 10$$

$$(2b-a)^2 + a^2 = 4b^2 - 4ab + a^2$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq 16 + 2(2^{32} - 1) \cdot x$$



$$b^2 + (b-a)^2 = 200 = b^2 + b^2 - 2ab + a^2$$



$$\frac{a}{\sin \alpha} = 20$$

$$\frac{2b-a}{\sin(90-\alpha)} = 20$$

$$\frac{2b-a}{\cos \alpha} = 20$$

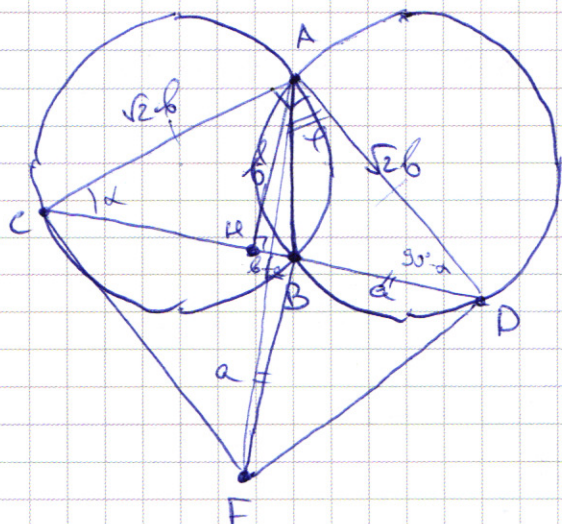
$$\cos \alpha = \frac{2b-a}{20}$$

$$a^2 = 2b^2 + 200 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 10 \sqrt{2} \cdot \frac{2b-a}{20}$$

$$a^2 = 2b^2 + 200 - 2b(2b-a)$$

$$2b^2 + 200 - 4b^2 + 2ab - a^2 = 0$$

$$2b^2 - 2ab + a^2 - 200 = 0$$



$$\frac{AB}{\sin \alpha} = 20$$

$$AB = 20 \cdot \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2} \cdot 20}{2}$$

$$\frac{AB}{\sin(90-\alpha)} = \frac{AB}{\cos \alpha} = 20$$

$$\sin \alpha = \cos \alpha$$

$$\alpha = 45^\circ$$

$$CD = 2b$$

$$AH = \frac{CD}{2} = b$$

$$b^2 + (2b-a)^2 = 200$$

$$HB = \sqrt{2}b - a$$

$$b^2 + 4b^2 - 4ab + a^2 = 200$$

$$\frac{b^2}{2} + (\sqrt{2}b - a)^2 = 200 \quad 5b^2 - 4ab + a^2 = 200$$

$$\frac{b^2}{2} + 2b^2 - 2\sqrt{2}ab + a^2 = 200 \quad / \cdot 2$$

$$b^2 + 4b^2 - 4\sqrt{2}ab + 2a^2 = 400$$

$$5b^2 - 4\sqrt{2}ab + 2a^2 = 400$$

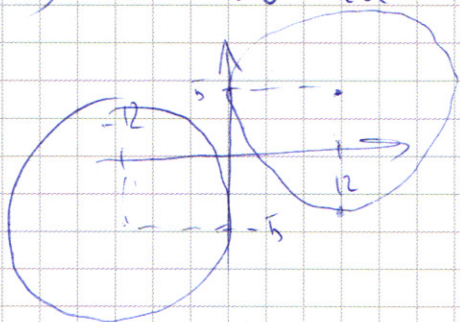
$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = (\sqrt{2}b - a)^2 + a^2 = 2b^2 - 2\sqrt{2}ab + a^2 + a^2$$

$$b^2 + (b-a)^2 = 200$$

$$b^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 200$$

$$2b^2 - 2ab + a^2 = 200$$

$$(2b-a)^2 + a^2 = 4b^2 - 4ab + 2a^2 = 2(2b^2 - 2ab + a^2) = 400 \quad CF = 20$$



$$x + y + 5 = 0$$

$$y = -x - 5$$

$$y - x + 5 = 0$$

$$y = x - 5$$

$$\frac{14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot 7\sqrt{2}}{20} = 14 \cdot 7 \cdot 2$$

$$(14)^2 = 196$$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times 14 \\ \hline 56 \\ 14 \\ \hline 196 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

4)

Рассмотрим первое ур-ие:

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \quad / : y^{-4\ln x} \neq 0$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2} + \ln x^4} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$x^{\ln \frac{1}{x^2}} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$10^{\ln x \ln \frac{1}{x^2}} = 10^{\ln y \ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\ln x \ln \frac{1}{x^2} = \ln y \ln \frac{y}{x^2}$$

$$y = -x - 5 \quad y = x - 5$$

1) $y \geq -x - 5$

$$y \geq x - 5$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$2y + 10 = 10$$

$$y = 0$$

2) $y \geq -x - 5$

$$y < x - 5$$

$$x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

3) $y < -x - 5$

$$y \geq x - 5$$

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10 \quad x = -5$$

$$49 + 25 = 74$$

$$(7; \sqrt{74})$$

