МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $9261 = 3\cdot3\cdot3\cdot7\cdot7\cdot7$;

Есть 2 варианта: 1) цифры этого числа: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1.

Тогда кол-во этих чисел:

$$\frac{8!}{3!\cdot3!\cdot2} = \cancel{\frac{8!}{4\cdot3!}} = \frac{8\cdot7\cdot\cancel{6}\cdot5\cdot\cancel{4}^{2}}{\cancel{6}\cdot\cancel{2}} = 8\cdot7\cdot5\cdot2 =$$

$= 40\cdot14 = 400+160 = 560$

2) цифры этого числа: 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1.

Кол-во таких чисел:

$$\frac{8!}{3!\cdot3!} = 8\cdot7\cdot5\cdot4 = 560\cdot2 = 1120$$

Других вариантов нет, т.к. произведение других простых множителей числа 9261 (кроме 3·3)* не являются однозначными.

*: множителей, отличных от 1.

Итого: $560+1120 = 1680$

Ответ: 1680 чисел.

(2) $\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \sqrt{2}\cos 4x$

$-2\sin 7x\cdot\sin 2x + 2\sin 7x\cdot\cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$\sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$$\left[\begin{array}{ll} \cos 2x = \sin 2x & (1) \\ \sqrt{2}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x & (2) \end{array}\right.$$

(1): $\operatorname{tg} 2x = 1$;

~~$x = \frac{\pi}{8} +$~~ $x = \frac{\pi}{8} + \pi\frac{n}{2},\ n\in\mathbb{Z}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\sqrt{2} \cdot \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$

$\sin 7x = \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 2x$

$\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

$$\left[\begin{array}{ll} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} & (a) \\ 7x = \pi - \left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2\pi m, \quad n\in\mathbb{Z} & (б) \end{array}\right.$$

(a): $5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k$

б) $7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m$

$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m$

$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m$

Ответ:
$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, \quad n\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi k, \quad k\in\mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, \quad m\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

(2): $-(2x-y)(x-4+y) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ x - 4 + y = 0 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = 4 - x \end{array}\right.$$

(1): $\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$\frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{4\ln x}\cdot y^{3\ln x}}$$

$y^{4\ln x} \neq 0$, т.к. $y > 0$ (по ОДЗ)

$$\frac{1}{x^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{3\ln x}}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}$$

$$x^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x^3}{y}}$$

I. $2x = y$

$$\cancel{2^{2\ln x}} \quad x^{2\ln x} = 2^{\ln\frac{x^2}{2}} \cdot x^{\ln\frac{x^2}{2}}$$

$$x^{\ln x^2 - \ln\frac{x^2}{2}} = 2^{\ln\frac{x^2}{2}}$$

$$x^{\ln 2} = 2^{\ln\frac{x^2}{2}}$$

$$\cancel{\ln 2}\cdot \ln x = \ln\frac{x^2}{2}\cdot\cancel{\ln 2}$$

$$\ln x = \ln\frac{x^2}{2}$$

$x = \frac{x^2}{2}$ (т.к. $f(a) = \ln a$ — возрастающая функция)

$$2x = x^2$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 0 \end{array}\right.$$ — не подходит в ОДЗ

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

~~II. $y = 4 - x$:~~

$$\cancel{x^{2\ln x} = (4-x)^{\ln\frac{x^3}{4-x}}}$$

$$\cancel{\ln x \cdot 2\ln x = \ln x^3 \cdot \ln(4-x) - \ln(4-x)\cdot\ln(4-x)}$$

$\ln$

$$x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}$$

$$2\ln x \cdot \ln x = (3\ln x - \ln y)\cdot \ln y$$

$$2\ln x \cdot \ln x - 2\ln x \cdot \ln y = \ln y \cdot \ln x - \ln y \cdot \ln y$$

$$2\ln x(\ln x - \ln y) = \ln y(\ln x - \ln y)$$

$$(2\ln x - \ln y)(\ln x - \ln y) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ x = y \end{array}\right.$$ — не выполняется, т.к $\left[\begin{array}{l} y = 2x \ (\mathrm{I}) \\ y = 4 - x \ (\mathrm{II}) \end{array}\right.$ и $y \neq 0$, $x \neq 0$

$y = x^2$:

(I) $\begin{cases} y = 2x \\ y = x^2 \end{cases}$

$2x = x^2$

$\left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ — не подходит в ОДЗ.} \\ x = 2 \end{array}\right.$

$\begin{cases} x = 2; \\ y = 4 \end{cases}$

(II) $\begin{cases} y = 4 - x \\ y = x^2 \end{cases}$

$x^2 + x - 4 = 0$

$D = 1 + 16 = 17$

$x_1 = \dfrac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0$

$x_2 = \dfrac{-1-\sqrt{17}}{2}$ — не подходит в ОДЗ

$y = 4 - \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} = \dfrac{8-\sqrt{17}-1}{2} = \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}$

$7 > \sqrt{17}$ $\quad y > 0$

Ответ: $(2;4)$, $\left(\dfrac{-1+\sqrt{17}}{2}; \dfrac{7-\sqrt{17}}{2}\right)$

5. $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$

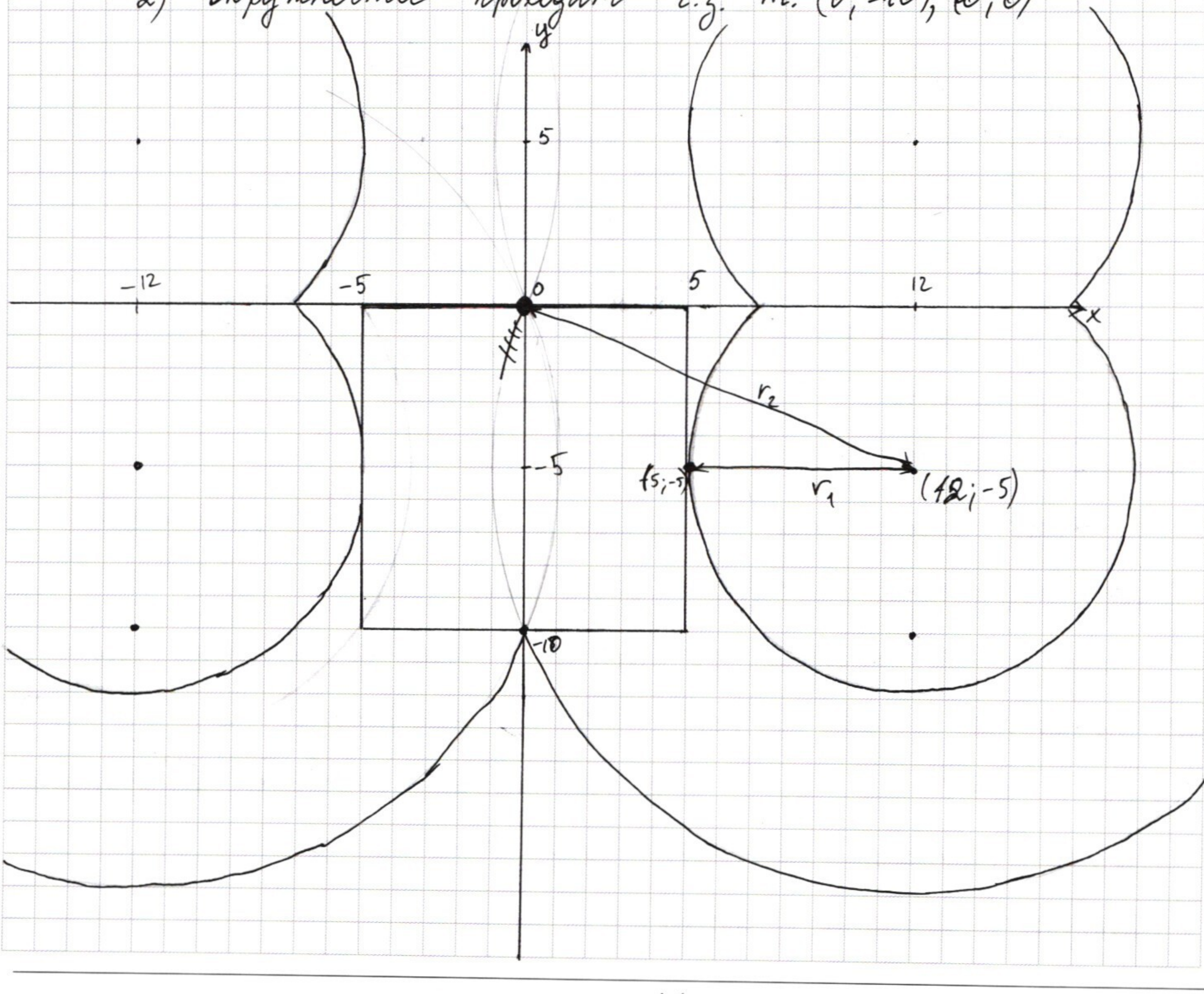
График ур-я (1) – квадрат с вершинами в т. $(-5;0)$, $(5;0)$, $(5;-10)$, $(-5;-10)$

Графиком ур-я (2) являются 4 окружности, не пересекающие оси координат и с центрами в т. $(-12;5)$, $(12;5)$, $(12;-5)$, $(-12;-5)$. и с радиусом $\sqrt{a}$

Тогда, система уравнений будет иметь ровно два решения в двух случаях:

1) окружности, лежащие в III и IV четверти, касаются сторон квадрата

2) окружности проходят ч.з. т. $(0;-10)$, $(0;0)$



$r_1 = 12 - 5 = 7 \qquad a = 49$

$r_2 = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13 \qquad a = 169$

Ответ: 49; 169

7. $\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$

$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x \quad |:2$

$2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33} < 38 + (2^{32} - 1)x$

$2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33} < 32 + 6 + 2^{32}x - x$

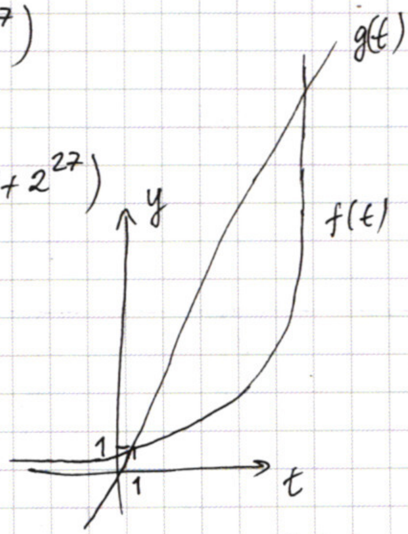
$2^{x-1} + 2^{32}(6 - x) < 32 + 6 - x$

$2^{x-1} < \cancel{2^5(2^{32}} \; (2^5 - 2^{32})(6 - x)$

$2^{x-1} < 2^5(1 - 2^{27})(6 - x) \quad |: 2^5$

$2^{x-6} < (1 - 2^{27})(6 - x)$

$2^{x-6} < (x - 6)(1 - 2^{27})$



Пусть $x - 6 = t$, тогда

$2^t < \cancel{(x-6)} \; t(-1 + 2^{27})$

$f(t) = 2^t$

$g(t) = t(2^{27} - 1)$

Ур-е $f(t) = g(t)$

имеет 2 решения,

а ~~нерав~~ решением нер-ва $f(t) < g(t)$ является

~~интервал~~ отрезок. (или интервал)

Т.к. мы решаем в целых числах, решение можно подобрать: при $t \in (-\infty; 0]$ $f(t) > g(t)$

При $t = 1$: $\quad 2 < (2^{27} - 1) \cdot 2$ нер-во выполняется

Значит, нижняя граница для t — $t = 1$;

Подберем границу сверху:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $t = 32$: $\quad 2^{32} > 2^{32} - 2^5$ – нер-во не выполняется

$t = 31$ $\quad 2^{31} < 2^{27}\cdot 31 - 31$

$$2^{27}(2^4 - 31) < -31$$

$$2^{27}(-15) < -31$$

нер-во ~~не~~ выполняется.

Тогда $t \in [1; 31]$

Других решений нет, т.к. при $\begin{cases} t < 1 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$$f(t) > 0$$

$$g(t) < 0$$

при $\begin{cases} t > 31 \\ t \in \mathbb{Z} \end{cases}$ $\quad f'(t) > g'(t) \rightarrow$ пересечений нет.

$t \in [1; 31] \Leftrightarrow x \in [7; 37]$

~~Тогд~~ При увеличении x на 1 кол-во решений сверху для y уменьшается на:

$$76 + 2(2^{32}-1)(x+1) - (76 + 2(2^{32}-1)(x)) =$$
$$= 2(2^{32}-1)$$

При увелич. x на 1 кол-во реш. снизу для y увелич. на:

$$2^{x+1} + \cancel{3\cdot 2^{34}} - 2^x - \cancel{3\cdot 2^{34}} = 2^x$$

Итого, с увеличением x на 1 кол-во реш. для y уменьш. на $2(2^{32}-1) - 2^x$

Итого, кол-во решений:

$$2(2^{32}-1)\cdot 31-(2^7+2^8+\dots+2^{37})^*;$$

$$^*\ 2^7+2^8+\dots+2^{38}=(2^7+2^9+\dots+2^{37})\cdot 3=$$

$$=3\cdot(2^7+2^{11}+2^{13}\dots+2^{35})\cdot 5=3\cdot 5\cdot(2^7+2^{13}+\dots+2^{33})\cdot 17=$$

$$=3\cdot 5\cdot 17\cdot(2^7+2^{15}+\dots+2^{31})\cdot(2^8+1)=$$

$$=3\cdot 5\cdot 17\cdot(2^8+1)(2^7+2^{23})=3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 2^7(1+2^{16})$$

$$2(2^{32}-1)\cdot 31-(2^7+\dots+2^{37})=$$

$$=2(2^{32}-1)\cdot 31-3\cdot 5\cdot 17\cdot 128\cdot 257(1+2^{16})=$$

$$=2(2^{16}+1)(31(2^{16}-1)-3\cdot 5\cdot 17\cdot 64\cdot 257)$$

Ответ: $2(2^{16}+1)(31(2^{16}-1)-3\cdot 5\cdot 17\cdot 64\cdot 257)$ решений.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^{\ln 2} = 2^{\ln \frac{x^2}{2}}$

$x^{\ln 2} = \frac{2^{2\ln x}}{2^{\ln 2}}$

$4^{\ln x} = (2x)^{\ln 2}$

$2\ln x \cdot \cancel{\ln 2} = \cancel{\ln 2} \cdot \ln 2x$

$\ln x^2 = \ln 2x$

$x^2 = 2x$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

г) $x^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x^3}{y}}$

$\cancel{x = 4 - y}$ $y = 4 - x$

$x^{2\ln x} = \frac{(4-x)^{3\ln x}}{(4-x)^{\ln(4-x)}}$

$\cancel{x^{2\ln x} \cdot (4-x)}$

$x^{2\ln x} \cdot (4-x)^{\ln(4-x)} = (4-x)^{3\ln t}$

$x^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x^3}{y}}$

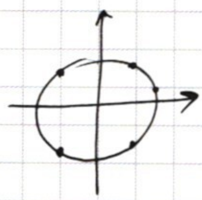
$\ln x \cdot 2\ln x = \ln y \cdot \ln \frac{x^3}{y}$

$2\ln^2 x = 3\ln y \cdot \ln x - \ln y \cdot \ln y$

$2\ln x \cdot \ln x - 2\ln y \cdot \ln x = \ln y \cdot \ln x - \ln y \cdot \ln y$

$2\ln x(\ln x - \ln y) = \ln y(\ln x - \ln y)$

$(\ln x - \ln y)(2\ln x - \ln y) = 0$



1) $\ln x = \ln y \rightarrow y = x$ $\varnothing$

2) $\ln x^2 = \ln y \rightarrow x^2 = y$ $x^2 = 2x \rightarrow x = 2$

$\cancel{x^2}$ $x^2 = (4-x)^2$

$x^2 = x^2 - 8x + 16$

$8x - 16 = 0$ $x = 2$ $y = 2$

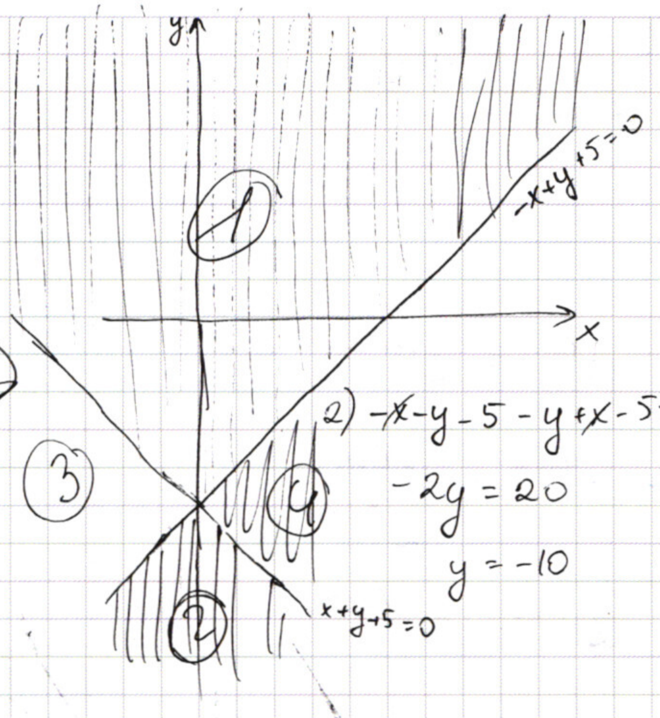
$\frac{1}{2^{6\ln 2}} = \frac{1}{2^{6\ln 2}}$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

1) $\begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y+5-x \geq 0 \end{cases}$ $\quad y \geq -5-x$

$\quad y \geq x-5$



2) $-x-y-5-y+x-5=10$

$-2y=20$

$y=-10$

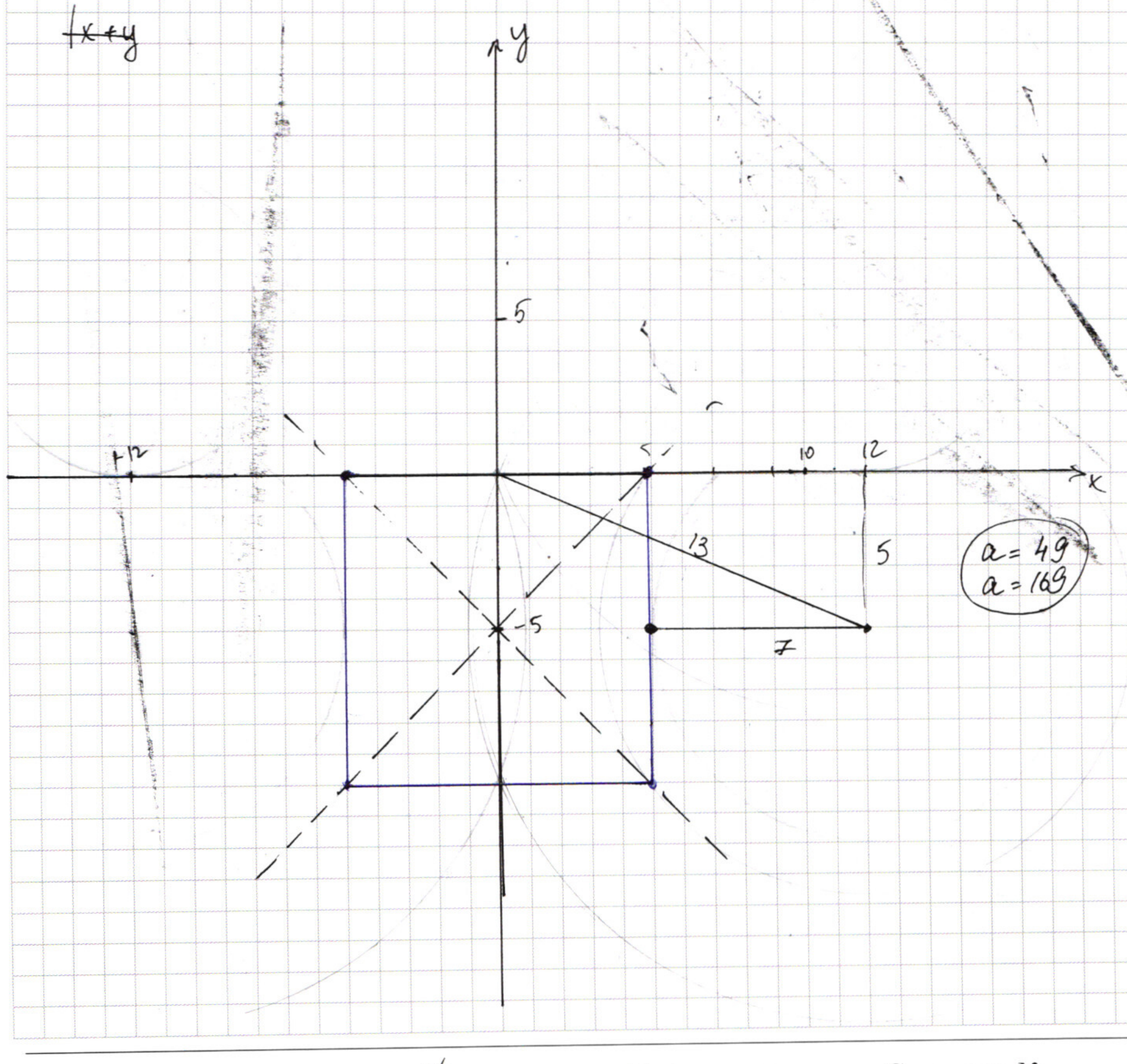
$x+y+5+y-x+5=10$

$2y+10=10$

$y=0$

$(|x|-12)^2$

~~$|x+y$~~



$a=49$

$a=169$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0 \end{cases}$$

$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16$

$\sqrt{2}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x = \cos^2 x - \sin^2 x + 2\sin x\cos x$

$2\cos\frac{\pi}{4}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$ $\quad 1 - 2\sin^2 x + 2\sin x\cos x =$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 7x \\ \alpha - \beta = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$ $2\alpha = 7x + \frac{\pi}{4}$ $\quad = 2\sin x(\cos x - 1) + 1$

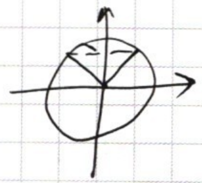
$\alpha = 3{,}5x + \frac{\pi}{8}$

$\beta = 3{,}5x - \frac{\pi}{8}$

$\sin\left(3{,}5x + \frac{\pi}{8}\right) + \sin\left(3{,}5x - \frac{\pi}{8}\right) = \cos 2x + \sin 2x$

$\cancel{\sqrt{2}\sin 7x}$ $\quad \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin 2x$

$\sin 7x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$



$$\left[\begin{array}{l} 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$ $\qquad$ 7

$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$

$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$76 + 2^{33}x - 2^{32}x > 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$76 + 2(2^{32} - 1)x > 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$38 + (2^{32} - 1)x > 2^{x-1} + 3\cdot 2^{33}$

$$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$$

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$$

$2x^2-8x+xy-y^2+4y=0$

$2x^2+x(y-8)+(4y-y^2)=0$ $\quad \frac{y}{2}(4-y)$

~~$D=$~~

~~$(2x^2-y)(x-4+y)=$~~

$D=y^2-16y+64-32y+8y^2=9y^2-48y+64=(3y-8)^2$

$x=\frac{8-y\pm(3y-8)}{4}=\frac{8-y+3y-8}{4}=\frac{y}{2}$

$=\frac{16-4y}{4}=4-y$

$(2x-y)(x-4+y)=0$

$$\left[\begin{array}{l} 2x=y \\ x=4-y \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} y=2x \\ y=4-x \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} 1 \\ 2 \end{array}$$

~~$16x^6$~~

$16x^{-6\ln x} = 2^{\ln\frac{2}{x^6}}\cdot x^{\ln\frac{2}{x^6}}$

$16x^{6\ln\frac{1}{x}} = 2^{\ln 2-6\ln\frac{1}{x}}\cdot x^{\ln 2-6\ln\frac{1}{x}}$

$16x^{6\ln\frac{1}{x}} = \frac{2^{\ln 2}}{2^{6\ln\frac{1}{x}}}\cdot\frac{x^{\ln 2}}{x^{6\ln\frac{1}{x}}}$

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$

$\frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{4\ln x}\cdot y^{3\ln x}}$

a) $y^{4\ln x}\neq 0$

$\frac{1}{x^{2\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{3\ln x}}$

$x^{2\ln x} = y^{3\ln x-\ln y} = y^{\ln\frac{x^3}{y}}$

1) $y=2x$

$x^{2\ln x} = (2x)^{\ln\frac{x^3}{2x}}$

$x^{2\ln x} = (2x)^{\ln\frac{x^2}{2}} = (2x)^{2\ln x-\ln 2}$

$x^{2\ln x} = 2^{2\ln x-\ln 2}\cdot x^{2\ln x-\ln 2}$

$1 = 2^{2\ln x-\ln 2}\cdot\frac{1}{x^{\ln 2}}$

3) $-x-y-\cancel{5}+y-x+\cancel{5}=10$

$-2x=10$

$x=-5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

~~343~~

87854582

1) 33377711

$$\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2} = \frac{8\cdot 7\cdot 5\cdot 4}{2} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 2 = 40\cdot 14 = 400+160 = 560$$

2) 93777111

$$\frac{8!}{3!\,3!} = 8\cdot 7\cdot 5\cdot 4 = 1120$$

$560+1120=1680$ ✓

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad x = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ $\qquad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$

~~$\cos(x+y) = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$~~ $\quad \cos(x-y) = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin 2x \cdot \sin 7x$$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$+$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

~~$\sin(x+y)$~~ $\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

~~$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$~~

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\sin\alpha + si}$ $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 1$ ✓

$-2\sin 2x\sin 7x + 2\sin 7x\cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x$

$\sqrt{2}\sin 7x\cos 2x - \sqrt{2}\sin 7x\sin 2x = \cos 4x$

$\sqrt{2}\sin 7x\cos 2x - \sqrt{2}\sin 7x\sin 2x - \cos^2 2x + \sin^2 2x = 0$

$\cos 2x(\sqrt{2}\sin 7x - \cos 2x) + \sin 2x\cdot(\sin 2x - \sqrt{2}\sin 7x) = 0$

$\to \sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$

$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = \sin 2x \quad ✓\\ \sqrt{2}\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x\end{array}\right.$

$\sqrt{2}\cdot\sin(5x+2x) = \cancel{\sqrt{}}$

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ $2\cdot\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$

$\begin{cases}\alpha+\beta = 7x\\ \alpha-\beta = \frac{\pi}{4}\end{cases}$ $\sin(5x+2x) = \sin 5x\cos 2x + \sin 2x\cos 5x$

$\alpha = \beta + \frac{\pi}{4}$

$2\beta + \frac{\pi}{4} = 7x$

$\beta = 3{,}5x - \frac{\pi}{8}$

$\sqrt{2}\sin 5x\cos 2x - \cos 2x = \sin 2x - \sqrt{2}\sin 2x\cos 5x$

$\cos 2x(\sqrt{2}\sin 5x - 1) = \sin 2x(1 - \sqrt{2}\cdot\cos 5x)$

$2^{32} \quad > \quad 2^{32}\cdot 32$

$2^{31} \quad < \quad 2^{27}\cdot 31 - 31$

$2^{27}(16-31) \quad < \quad -31$

$2^{27}(-15) \quad < \quad -31$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$76 + 2(2^{32}-1)\cdot(x+1) - \cancel{76} + 2(2^{32}-1)x = 2(2^{32}-1)$

на столько ум-ся кол-во y ~~сверху~~ ~~снизу~~ сверху

$2^{x+1} + \cancel{3 \cdot 2^{34}} - 2^x = 2^x$ ← на столько ув. ~~снизу~~ ~~сверху~~ снизу

$-2(2^{32}-1) + 2^x > 0$

$2^x > 2(2^{32}-1)$

$\underbrace{2(2^{32}-1) - 2^x}$ на столько ум. кол-во y

$2(2^{32}-1)\cdot 31 - 2^6 - 2^7 - \ldots - 2^{37}$

$2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} + 2^{11} + 2^{12} + 2^{13} + 2^{14} + 2^{15} + 2^{16} + 2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20} + 2^{21} + 2^{22} + 2^{23} + 2^{24} + 2^{25} + 2^{26} + 2^{27} + 2^{28} + 2^{29} + 2^{30} + 2^{31} + 2^{32} + 2^{33} + 2^{34} + 2^{35} + 2^{36} + 2^{37} = 3(2^6 + 2^8 + 2^{10} + 2^{12} + 2^{14} + 2^{16} + 2^{18} + 2^{20} + 2^{22} + 2^{24} + 2^{26} + 2^{28} + 2^{30} + 2^{32} + 2^{34} + 2^{36}) = 3\cdot 5(2^6 + 2^{10} + 2^{14} + 2^{18} + 2^{22} + 2^{26} + 2^{30} + 2^{34}) =$

$2^6(1+2^4)$

$= 3\cdot 5 \cdot 17(2^6 + 2^{14} + 2^{22} + 2^{30}) = 3\cdot 5\cdot 257\cdot 17(2^6 + 2^{22}) =$

$2^8 = (2^4)^2 = 256$ $\quad = 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 2^6(1 + 2^{14}) = 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 64\cdot$

$2^6 = 64 \qquad 2^{14} = 2^8\cdot 2^6 = (256\cdot 64 + 1)$

$\cancel{\frac{1+9^n}{n}\cdot 9} \qquad \cancel{\frac{9^n - 1}{n}}$

$= 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot(256\cdot 64 + 1)\cdot 64$

$2(2^{32}-1)\cdot 31 - 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 64(256\cdot 64 + 1) + 2^{37} =$

$= 62\cdot 2^{32} - 62 - 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 64(256\cdot 64+1) + 2^{37} =$

$= 2^{32}(62 + 32) - 62 - 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 64(256\cdot 64+1) =$

$= 2^{32}\cdot 94 - 62 - 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 64(256\cdot 64+1) =$

$= 2(2^{32}\cdot 47 - 31 - 3\cdot 5\cdot 17\cdot 257\cdot 64(256\cdot 64+1))$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2^t < (2^{27}-1)t \qquad t \in [1; 31]$

$t = x-6$

$x \in [6; 37]$

31 значение x

1) $x = 6$:

$y \geqslant 2^6(1+3\cdot 2^{28})$

$y < 76 + 2^7(2^{32}-1)$

$2^7(2^{32}-1)+76-2^6(1+3\cdot 2^{28}) = 2^6(2^{33}-2-1-3\cdot 2^{28})+76 =$

$= 2^6(2^{28}\cdot(29-3))+76 = 2^{34}\cdot 29-116$

$\cancel{2^6(2^{28}\cdot 29-3)+76}$

$\times 64 \cdot 3 = 192$ $\quad 192 - 76 = 116$

$\lfloor 2^{34}\cdot 29-116 \rfloor = \cancel{4(2^{32}\cdot 29} \quad 4(2^{32}\cdot 29-29) = 4\cdot 29(2^{32}-1)$

2) $x = 7$:

$71 - 38 = 33$ $\quad 2^6 = 64$

$\cancel{2^7+3\cdot 2^{34}}$

$76+2^{33}\cdot 7-2\cdot 7-2^7-3\cdot 2^{34} = 2(38+2^{32}(7-6)-7-2^6) =$

$= 2(38+2^{32}-33) = 2(2^{32}-33) = 2\cdot(2^{32}-1)-2^6$

$17 \times 8 = 136$ $\quad 38 \quad 98$

3) $x = 8$

$76+2^{36}-2^4-2^8-3\cdot 2^{34} = 76+2^{34}-2^4-2^8 = 76+2^{34}-2^4\cdot 17 =$

$= 2(2^{33}+38-136) = 2(2^{33}-98) = 4(2^{32}-49)$

4) $x = 9$

$2^6+2^7+2^8+2^9+2^{10}+2^{11}+2^{12}$

~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ ~~11~~ ~~12~~ ~~13~~ ~~14~~ ~~15~~

~~16~~ ~~17~~ ~~18~~ ~~19~~ ~~20~~ ~~21~~ ~~22~~ 23 ~~24~~ ~~25~~

~~26~~ ~~27~~ ~~28~~ ~~29~~ ~~30~~ ~~31~~ ~~32~~ ~~33~~ ~~34~~ ~~35~~

~~36~~ ~~37~~

$2^8 = (2^4)^2 = 16^2 = 257$

$2^7 = 128$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$((|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$

1) $x, y \geq 0$

$(x-12)^2+(y-5)^2=a$

2) $x \geq 0,\ y<0$

$(x-12)^2+(-y-5)^2=a$

$\Updownarrow$

$(x-12)^2+(y+5)^2=a$

3) $x<0,\ y \geq 0$

$(x+12)^2+(y-5)^2=a$

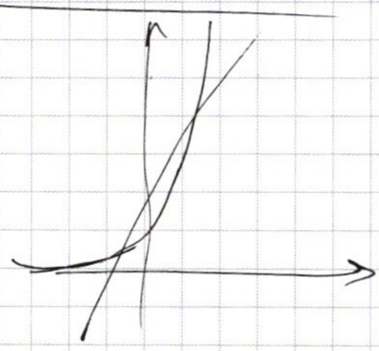
4) $(x+12)^2+(y-5)^2=a$

$y \geq 2^x+3\cdot 2^{34}$

$y < 76+2(2^{32}-1)x$

$2^x+3\cdot 2^{34} < 76+2(2^{32\cancel{+1}}-1)x$

$2^{x-1}+3\cdot 2^{33} < 38+(2^{32}-1)x$



$2^{x-1}+3\cdot 2^{33} \leq 38+(2^{32}-1)x$

Два реш: 1: $1+3\cdot 2^{33} = 38+2^{32}-1$

$3\cdot 2^{33} = 2\cdot 19+2^{32}-2$

$3\cdot 2^{32} = 19+2^{31}-1$

$3\cdot 2^{32} >$

2: $2+3\cdot 2^{33} = 38+(2^{32}-1)\cdot 2$

$2+2^{34} > 38-2$

$\cancel{2^{x-1} < 38+(2^{32}-1)x}$

$2^{x-1}+3\cdot 2^{33} < 38+2^{32}x-x$

$2^{x-1}+2^{32}(6-x) < \overset{32+6-x}{38-x}$

$2^{x-1}+2^{32}(6-x) < 32+6-x$

$2^{x-1} < (6-x)(32-2^{32})$

$2^{x-1} < (6-x)(2^5-2^{32})$

$2^{x-6} < (6-x)(1-2^{27})$

$2^t < (2^{27}-1)t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$2^t < (2^{27}-1)t$ $\quad\quad$ $2^t < (2^{27}-1)t$

$t \leq 0$ Wrong

$\left(\begin{array}{l} t < \log_2 t + \log_2(2^{27}-1) \\ 2^t < (2^{27}-1)t \end{array} \right.$

$\cancel{2^{50} < (2^{27}-1)\cdot 50}$

$2^{27}\cdot t > 2^t$

$t = 2^{\alpha}$

$2^{27+\alpha} > 2^{2^{\alpha}}$

$27+\alpha > 2^{\alpha}$

$\cancel{=> 32}$ $\quad t \geq 64$

wrong

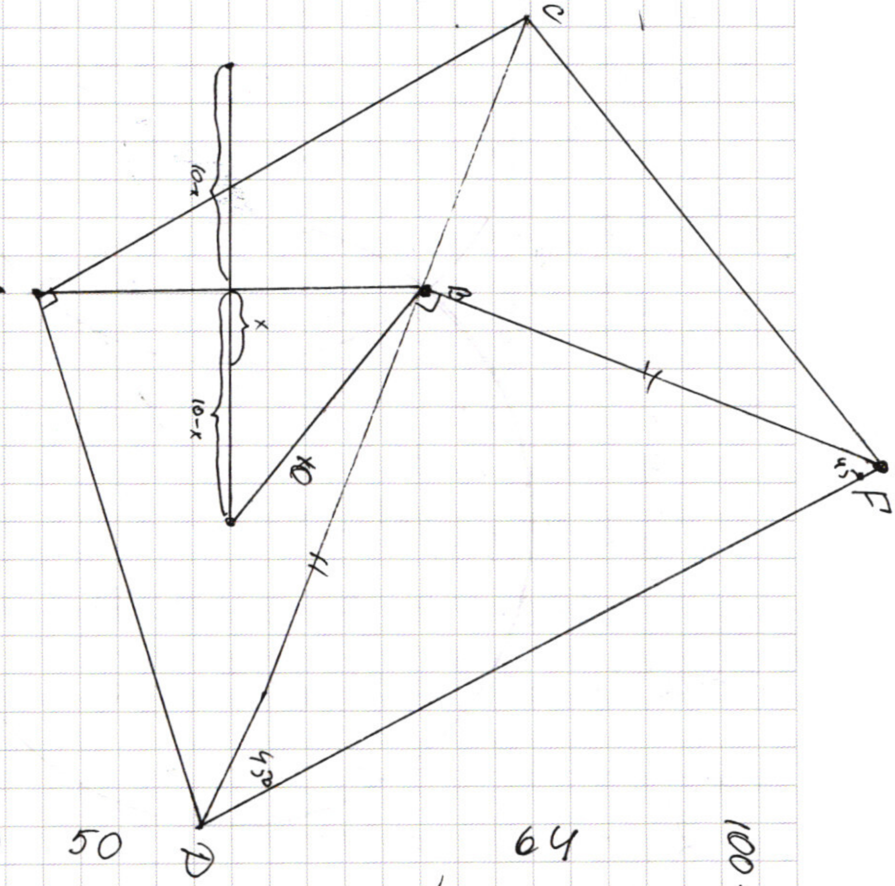
$2^6 = 64$

2^{64} $\quad 2$

$\log_2 2^{27} t < 64$

$27-16=11$

$\cancel{2^{27}32=}$



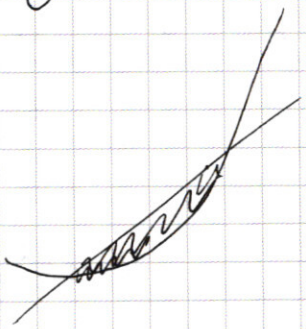
32 $\quad$ 35 $\quad$ 40 $\quad$ 50 $\quad$ 64

$27+\log_2 50 > 50$

$t \in (0;32)$

$t \in \mathbb{Z}$

$27+\log_2 40 > 40$



64

50

40

$AB = 2x(20-x)$

$100-x^2-100+20x = x(20-x)$

$2^t < (2^{27}-1)t$

$t \in (0; 31]$

$64 > 6 > 32$

$\cancel{2^{50} > 2^{27}\cdot 50}$

$\cancel{2^{40} \quad 2^{27}\cdot 40}$

$2^{35} \quad 2^{27}\cdot 35$

$2^{33} > 2^{27}\cdot 33-33$

$=2^{27}\cdot 64$

$2^{32} > 2^{32}-32$ $\quad$ 35

$2^{20} < 2^{27}\cdot 20$ $\quad$ 34

$2^{30} < 2^{27}\cdot 30-30$ $\quad$ 33

$\cancel{2^{29} \quad 2^{27}\cdot 15-15}$ $\quad$ 32

32

~~20~~

30

31

20

0

$2^{27}(4$

$2^{27}(8-30) < -30$

☑ черновик ☐ чистовик $\quad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\quad$ (Нумеровать только чистовики)