МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. Разобьём 9261 на пр.мн-ли: $9261=3^3\cdot7^3$. Значит цифры искомых чисел при разл. на пр.мн-ли содерж. 3 3-ки, 7 7-к и ничего больше. $7^2=49>9$, значит 7 в произведении может быть получена только из цифры 7. Т.е. в искомых числах ровно 3 7-ки. Из 3-к могут быть получены 2 цифры: 3, 9 ($3^3>9$). Значит 3^3 может быть предст. только как $\overset{(1)}{3\cdot9}$ или $\overset{(2)}{3\cdot3\cdot3}$.

1) В числе есть цифры: 3, 9, 7, 7, 7, 1, 1, 1. Найдём кол-во таких чисел. Выберать позицию 3-ки в числе можно 8 сп-ми, 9 — 7-ю, т.к. ост. 7 мест. Поставить 7-ки в ост. 6 мест можно C_6^3 сп-ми. 1-цы ед. обр. занимают ост. 3 места. Т.е. таких чисел $8\cdot7\cdot C_6^3$.

2) в числе цифры: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1. ~~Постав~~ Выбрать позицию 3-к можно C_8^3 сп-ми. Из ост. 5 мест пост. 1-цы можно C_5^2 сп-ми. 7-ки ед. обр. займут ост. 3 места. Т.е. таких чисел $C_8^3\cdot C_5^2$.

Заметим, что ни одно число, удовл. усл., не может входить и в 1, и во 2-й пункты. Значит общ. кол-во таких чисел:

$$8\cdot7\cdot C_6^3+C_8^3\cdot C_5^2=56\cdot\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}+\frac{8\cdot7\cdot6}{3\cdot2\cdot1}\cdot\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=560\cdot2+560=1680$$

Ответ: 1680.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

2. 12 - 49 13:12 13:35.

$\cos(5x+4x) - \cos(5x) - \sqrt{2}\cos 4x + \sin(5x+4x) + \sin 5x = 0$

$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x +$

$+ \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x = 0.$

$(\cos 5x + \sin 4x)(\sin 5x + \cos 4x)$

$\sin(\alpha+\beta) =$

$\cancel{\sin(x+x) = \sin x \cos x + \sin x \cos x}$

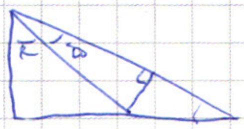
$\cancel{\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cos 30° - \cos 45° \sin 30° =}$

$\cancel{= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.}$

$\cancel{\sin 15° = \sin 45° \cos 45° - \cos 30° \sin 30° = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}}$

$-\sqrt{2}\cos 4x$

$-2\sin\frac{\pi}{4}\cos 4x$



$\sin a + \sin b = \frac{\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2})}{2}$

$\cos 9x + \sin 9x \sin 5x = \cos 5x + \sqrt{2}\cos 4x$

$2(\frac{1}{2}\cos 5x + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x)$

$\cancel{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} +}$

$\cancel{\sin\alpha + \sin\beta =}$

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x =$

$= \underline{\cos 5x \cos 4x} - \sin 5x \sin 4x \underline{- \cos 5x} - \sqrt{2}\cos 4x + \underline{\sin 5x \cos 4x} +$

$+ \cos 5x \sin 4x + \sin 5x$

3. 13:07 13:27 13:52.

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - \underline{4y} = 0.$

$y^2 - 4y + 4 + y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 + x^2 + \underset{2\cdot 4\cdot x}{8x} + 16$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

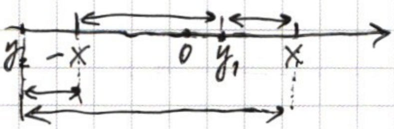
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5. Рассм. 1-ю строку системы:

$|(y+5)+x| + |(y+5)-x| = 10$

Её геом. смысл в том, что сумма расст. от т. $(y+5)$ до т. x и $(-x)$ на числ. пр. $= 10$. Рассм. случаи:

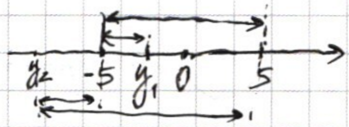
1) $x > 5$.



Если y внутри $[-x; x]$ – сумма расст. > 10

Если снаружи – > 10. Т.е. $\varnothing$.

2) $x = 5$

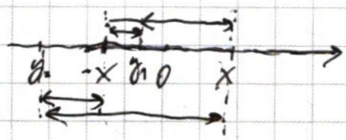


Если $y \in [-5; 5]$ сумма $= 10$.

Если вне отр. > 10.

Т.е. при $x = 5$ $y \in [-5; 5]$.

3) $x < 5$.



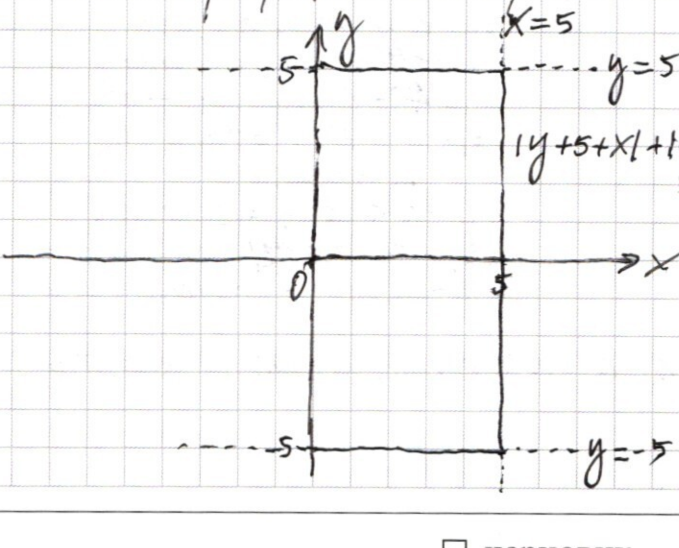
Внутри отр. – сумма < 10.

Пусть $y < -x$. д. вып.: $-x - y + x - y = 10$
$y = -5$

Пусть $x > x$. д. вып.: $y - x + y - (-x) = 10$
$y = 5$

Т.е. при $x < 5$ $y \in \{-5; 5\}$.

Тогда график 1-й строки системы:



(на осях коорд. граф. $\in$-т только т. $(0;5)$, $(0;-5)$ и $(5;0)$).

Рассм. 2-ую строку сист. Зам., что гр-к ур-я:

$(x-12)^2+(y-5)^2=a$ — окр. с ц. $(12;5)$ и рад. $\sqrt{a}$.

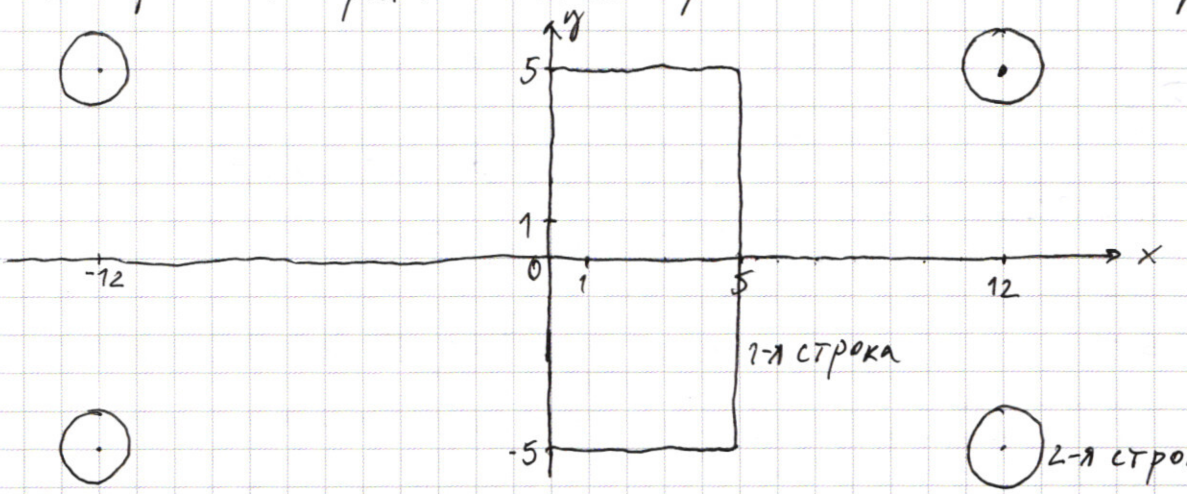
~~Тогда гр. 2-й строки получ. из этой окр. отр. верхней~~

Тогда переход к ур-ю:

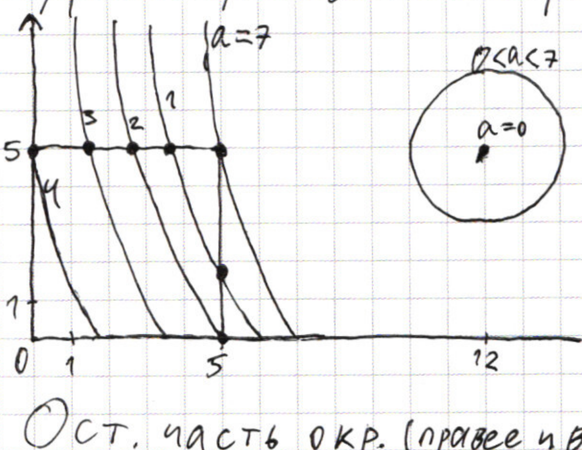
$(|x|-12)^2+(y-5)^2=a$ — постр. гр., симм. верхн. пол-ти в нижн.

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$ — постр. гр., симм. пр. полу-ти в лев.

Тогда рассм. графики обоих строк сист. в 1 сист. коорд.:



Заметим, что $\forall$ реш. в I четверти имеет соотв. реш. ~~во 2-й четвер~~ в 4-й четверти, т.к. они симм. Реш. в III и II четвертях нет, т.к. в них нет гр. 1-й строки (т. $(0;5)$ и $(0;-5)$ учтены в I и IV). Тогда усл. зад. вып. тогда и только тогда, когда у ур-я 1 реш. в I четверти. Рассм. разл. a.



$a<0$ — реш. нет ($\varnothing$ во 2-й стр)

$a=0$ — пересеч. нет

$0<a<49$ — пересеч. нет

$a=49$ — 1 пересеч. — ✓

(2) — $a=7^2+5^2=74$ (по т. П.)
2 пересеч.

(1) — $49<a<74$ — 2 пересеч.

(3) — $74<a<144$ — 1 пересеч. — ✓

(4) — $a=144$ — 1 пересеч. — ✓

Ост. часть окр. (правее и выше) с гр. пересеч. им. не может. Т.е.

$\left[\begin{array}{l} a=49 \\ 74<a\le 144 \end{array}\right.$

Ответ: $\{49\} \cup (74;144]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y/x^7>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

$$x^{-2\ln x}\, y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - \cancel{7\ln x} + 4\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$\cancel{x^{2\ln x}\, y^{3\ln y} = y^{\ln y}}$$

$$\ln(x^{-2\ln x}) = \ln(y^{\ln y - 3\ln x})$$

$$-2\ln^2 x = (\ln y - 3\ln x)\ln y.$$

$$3\ln x \ln y = \ln^2 y + 2\ln^2 x.$$

$$(\ln y - 2\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y = x^2 \ (1) \\ y = x \ (2) \end{array}\right.$$

(1) $x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$

$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \end{array}\right.$$

	1	-1	-6	8
2	1	1	-4	0

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right.$$

$D = 1^2 + 4\cdot1\cdot4 = 17$

$$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-1\pm\sqrt{17}}{2} \\ \cancel{x=0} \text{ — не} \in \text{ОДЗ!} \\ x=2 \end{array}\right.$$

(2) $x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$

$-2x^2 + 4x = 0$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ 2=x \end{array}\right.$$

$2x^2 = 4x$

$x^2 = 2x$

$x = 2$

$(x^2 + x - 4)(x-2) =$

$= x^3 + x^2 - 4x - 2x^2 - 2x + 8 =$

$= x^3 - x^2 - 6x + 8$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

Задача 3. ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ \frac{y}{x^7}>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Решим 1-ю строку:

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$

$x^{-2\ln x} y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$ (с уч. ОДЗ)

$x^{-2\ln x} = \frac{y^{\ln y - \ln x^7}}{y^{-4\ln x}}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x + 4\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$\ln(x^{-2\ln x}) = \ln(y^{\ln y - 3\ln x})$

$-2\ln^2 x = (\ln y - 3\ln x)\ln y$

$\ln^2 y - 3\ln x\ln y + 2\ln^2 x = 0$

$(\ln y - 2\ln x)(\ln y - \ln x) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \ln y = \ln x^2 \\ \ln y = \ln x \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right.$

Т.е. исх. ур-е равносильно:

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = x \end{array}\right. \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = x \\ x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ — не удовл. ОДЗ} \\ x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} y = x \;\; \cancel{\text{— не удовл. ОДЗ}} \\ \left[\begin{array}{l} x^2 = 0 \text{ — не удовл. ОДЗ} \\ 2x^2 = 4x \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

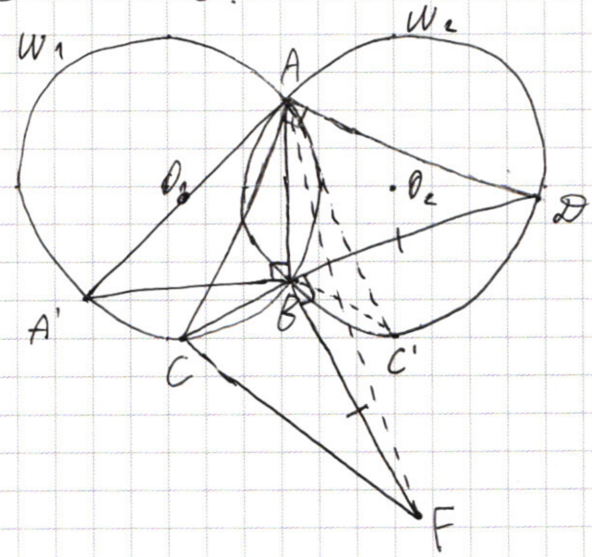
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x^2 + x - 4 = 0 \end{array}\right. \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17 - 2\sqrt{17} + 1}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0, \text{ т.е. } \notin \text{ОДЗ.} \\ y = x^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{\sqrt{17}-1}{2} \; (>0) \\ y=\frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(2;2), (2;4), \left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$.

Задача 6.



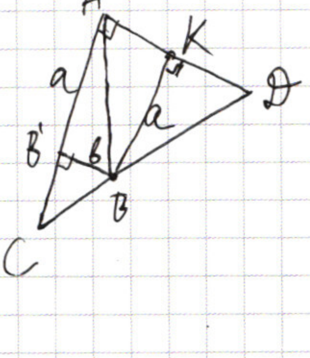
1) Отл. т. C', симм. т. C отн. AB. она попадет на окр. W_2, т.к. окр. равны. $\triangle ACB = \triangle AC'B$, т.к. симм. $\angle AC'B = \angle ADB$ как опир. на 1 дугу. Значит, $\angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$, т.к. $\triangle ACD$ – п/у.

2) Провед. пр. $\perp AB$ ч/з т. B. Пусть она $\cap$ W_1 в т. A'.

$\angle AA'B = \angle ACB = 45^\circ$ как опир. на 1 дугу. Значит $\triangle A'AB$ – р/б п/у.

т. П.: $AB^2 + A'B^2 = AA'^2$, т.е. $2AB^2 = 20^2$, $AB = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$.

3) Опустим $\perp$-р из B на AC – BB'.



$\angle B'CB = 45^\circ$, т.к. $\angle ACD = 45^\circ$.

Пусть $BB' = b$. Тогда $CB = \sqrt{2}b$, т.к. $\triangle CB'B$ – п/у, из т. П.

Опустим $\perp$-р BK на AD. Аналогично $BD = \sqrt{2}a$, где $BK = a$.

Т.к. $AB'KB$ – пр-к, $AB' = BK = a$. Значит из т. П. $\triangle AB'B$ $AB = \sqrt{a^2+b^2}$.

4) Из $\triangle CBF$ $CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2} = \sqrt{(\sqrt{2}b)^2 + (\sqrt{2}a)^2} = \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}AB =$

$= \sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 20$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~4) Тогда из 2) и 3)~~ $\cancel{S_{ACF} = 7\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{110} = 14\sqrt{220} = 28\sqrt{55}}$

~~Ответ:~~ $\cancel{28\sqrt{55}}$.

~~Т.е.~~ $\cancel{\angle CBA = 45 + \arcsin\frac{4}{5}}$ ~~(т.к.~~ $\cancel{\angle CBO_1}$ ~~— острый)~~

По т. кос. $\triangle ABC$

$$AC = \sqrt{CB^2 + AB^2 - 2\cdot AB\cdot CB\cdot\cos\angle CBA} = \sqrt{12^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2\cdot 12\cdot 10\sqrt{2}\cdot\cos(45 + \angle O_1BA)} = \sqrt{144 + 200 - 240\sqrt{2}(\cos 45\cdot\cos\angle O_1BA - \sin 45\cdot\sin\angle O_1BA)} = \sqrt{344 - 240\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\right)} = \sqrt{344 + 240\cdot\frac{1}{5}} = \sqrt{344 + 48} = \sqrt{392} = 14\sqrt{2}$$

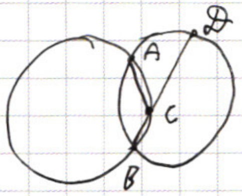
4) Тогда из 2) и 3)

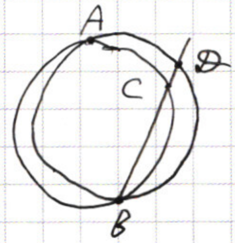
$$S_{ACF} = 7\sqrt{2}\cdot 14\sqrt{2} = 98\cdot 2 = 196$$

Ответ: 196.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Заметим, что других вариантов расп. т. C нет, т.к. $B \in$ ~~$\mathcal{D}$~~ (отр)





(т.е. $C \in$ внешн. дуге окр.)

Ответ: 20

б) 1) ~~Будем исп. обозначения из а). $CB = \sqrt{2}b$, т.е~~

~~$b = \frac{12}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$. $\sqrt{a^2+b^2} = AB$, т.е. $a^2+b^2 = 200$, $a = \sqrt{200-72} = \sqrt{128} =$~~

~~$= 8\sqrt{2}$.~~ $BC = 12$.

Тогда в $\triangle CBF$ $\cos\angle BCF = \frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$.

$\sin\angle BCF = \sqrt{1-\cos^2\angle BCF} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$ по осн. триг. тожд.

2) По следств. из т. син. в $\triangle ACF$:

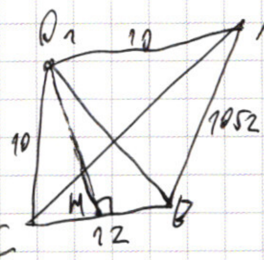
$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot 20 \cdot \sin(45° + \angle BCF)$

(т.к. $\triangle ACD$ – р/б п/у)

$S_{ACF} = 10\,AC(\sin 45° \cos\angle BCF + \cos 45° \sin\angle BCF) = 10AC\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}\right) =$

$= 10AC \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 7\sqrt{2}AC$

3) Рассм. $\triangle ACB$.



$AO_1^2 + O_1B^2 = 10^2 + 10^2 = 200 = AB^2$, т.е

$\triangle O_1AB$ – п/у по обр. т. П., $\angle O_1BA = 45°$.

Опустим $\perp O_1M$ на CB из O_1. $MB = 6$.

$O_1M = \sqrt{O_1B^2 - 6^2} = \sqrt{10^2-6^2} = 8$ по т. П.

$\cos\angle CBO_1 = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, $\sin\angle CBO_1 = \frac{O_1M}{O_1B} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$.

~~по т. кос. $\triangle ABC$:~~

~~$AC = \sqrt{CB^2 + AB^2 - 2 \cdot BC \cdot AB \cdot \cos\angle CBA} = \sqrt{12^2 + (10\sqrt{2})^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10\sqrt{2} \cdot \cos(\angle CBO_1 +}$~~

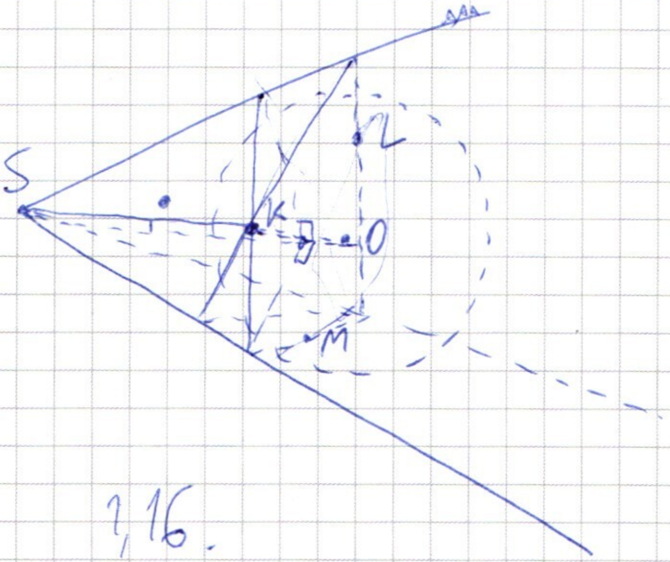
~~$\overline{+ \angle O_1BA)} = \sqrt{144 + 200 - 240\sqrt{2}(\cos 45° \cos\angle O_1BC - \sin 45° \sin\angle O_1BC)} =$~~

~~$= \sqrt{344 - 240\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{344 + 240\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{5}} = \sqrt{344+96} = \sqrt{440} =$~~

~~$= 2\sqrt{110}$.~~

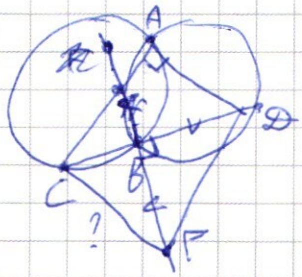
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\angle C = \angle D$, т.к. равн. окр. и равн. дуги

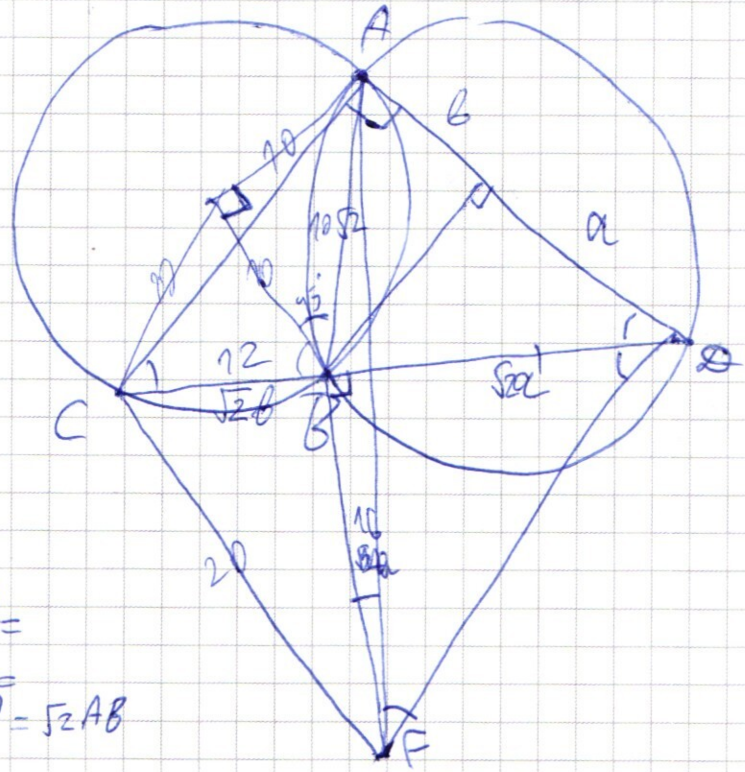
1,16.



$R = 10$

$\sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400-144} = 16$

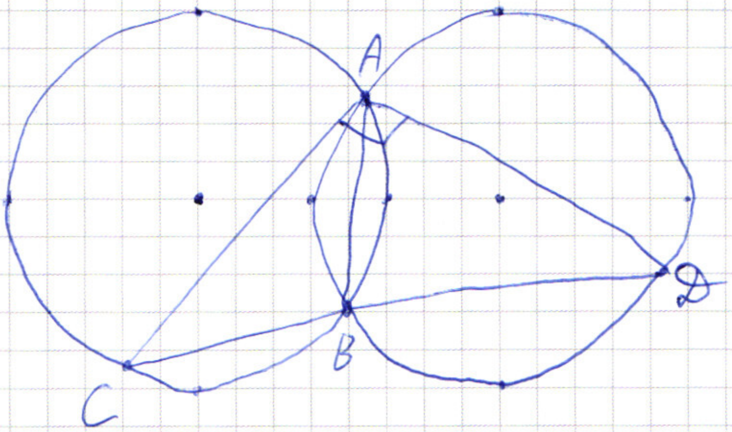
$400 - 144 = 256$



$CF = \sqrt{(\sqrt{2}b)^2 + a^2} =$
$= \sqrt{2b^2 + 2a^2} =$
$= \sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{2}AB$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

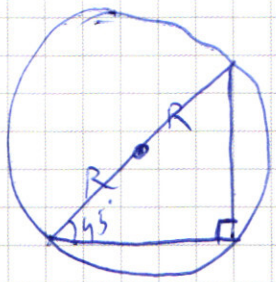
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$\sin(90^\circ-30^\circ)=$
$=\sin 90^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 90^\circ=$
$=\frac{\sqrt3}{2}$

$\sin(60^\circ+30^\circ)=$
$=\sin 60^\circ\cos 30^\circ+\sin 30^\circ\cos 60^\circ=$
$=\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1.$

ГМТ, из кот. т. видна под опр. углом -



$AB^2+AB^2=20^2$

$AB^2=\frac{400}{2}$

$AB=10\sqrt2.$

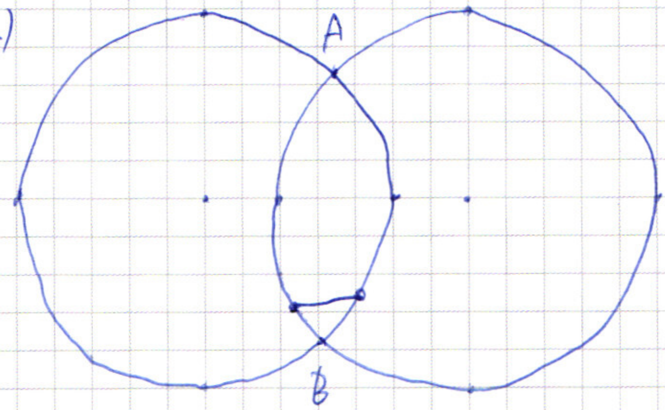
$CF=20.$

12.

$\sqrt2\, b=12$

$b=\frac{12}{\sqrt2}=\frac{12\sqrt2}{2}=6\sqrt2.$

2)



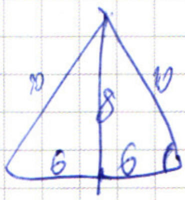
— мевозм

$10\sqrt2=\sqrt{a^2+(6\sqrt2)^2}$

$200=a^2+72$

$a=\sqrt{128}=8\sqrt2.$

$\angle O_1BA=45^\circ.$



$\sqrt{10^2-6^2}=8$

$\cos\angle CBO=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$

$AC=\sqrt{CB^2+AB^2-2CB\cdot AB\cdot\cos\ldots}=$

$=\sqrt{12^2+200+2\cdot12\cdot10\sqrt2\cdot\frac{\sqrt2}{10}}=$

$=\sqrt{144+200+4\cdot12}=\sqrt{344+48}=$

$=\sqrt{392}.$

$\cos\angle CBA=\cos(45^\circ+\angle CBO)=$

$=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{3}{5}-\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{4}{5}=$

$=-\frac{\sqrt2}{10}.$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

План:

	30	40	50	0	10	20	30
11							
12							
13						4	4
14	4	4/п	5	5	5	5	5

Минимум: 5
Максимум: 7.

2

$$\begin{array}{r|l} 220 & 4 \\ 20 & 55 \\ 20 & \end{array}$$

$1 + x^n \le (1+x)^n$?

1. $\underline{\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot}$

$P = 9261.$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$9261 = 3^3 \cdot 7^3.$

точно 3 7-ки.

других мн-лей нет.

3 – 3, 9.

3^3:

1) $3 \cdot 3 \cdot 3$ — 333 777 11 — $C_8^3 \cdot C_5^3$

2) $3 \cdot 9$ — 39 777 111 — $8 \cdot 7 \cdot C_6^3$

ост. ц. – 1.

Т.е. ответ: $C_8^3 \cdot C_5^3 + 8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6}}{\cancel{3 \cdot 2}} \cdot \frac{5 \cdot \cancel{4}^{2}}{\cancel{2}} +$
$+ 56 \cdot \frac{\cancel{6} \cdot 5 \cdot 4}{\cancel{3 \cdot 2}} = 560 + 560 \cdot 2 = 560 \cdot 3 = 1680$

Отв.: 1680.

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 9 & 3087 \\ 26 & \\ 24 & \\ 21 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 3087 & 3 \\ 3 & 10 \\ 0 & \end{array}$$

$343 \times 3 = 1029$

$14 \times 7 = 98$

$$\begin{array}{r|l} 343 & 7 \\ 28 & 49 \\ 63 & \\ 63 & \\ 0 & \end{array}$$

$98 \times 2 = 196$

$48 \times 2 = 96$

$96 + 344 = 440$

$560 \times 3 = 1680$

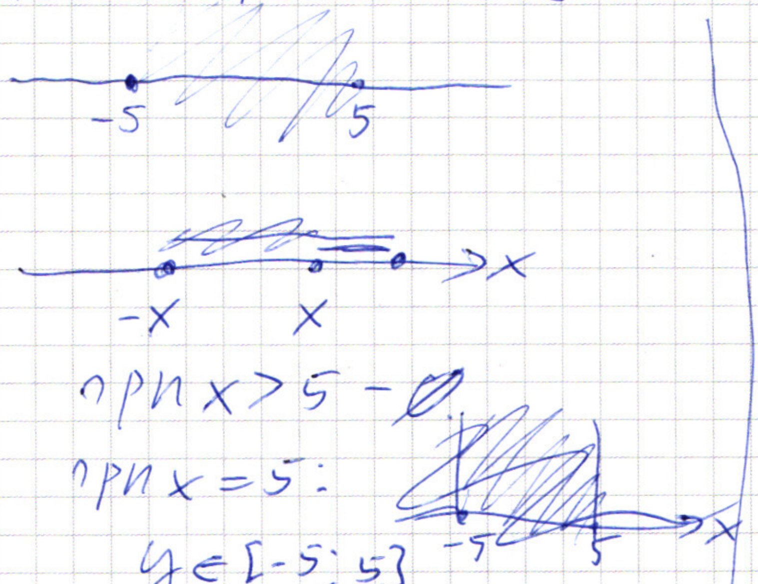
392

$560 \times 3 = 1680$

$$\begin{array}{r|l} 392 & 2 \\ 2 & 196 \\ 19 & \\ 18 & \\ 12 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 196 & 2 \\ 18 & 98 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 98 & 2 \\ & 49 \end{array}$$

1) $|(y+5)+x|+|(y+5)-x|=10.$

сумма расст. от $(y+5)$ до x и $(-x)=10.$



при $x>5$ — $\varnothing$.

при $x=5$:

$y\in[-5;5]$

при $x<5$:

$(x-1)^2+(y-1)^2=4.$

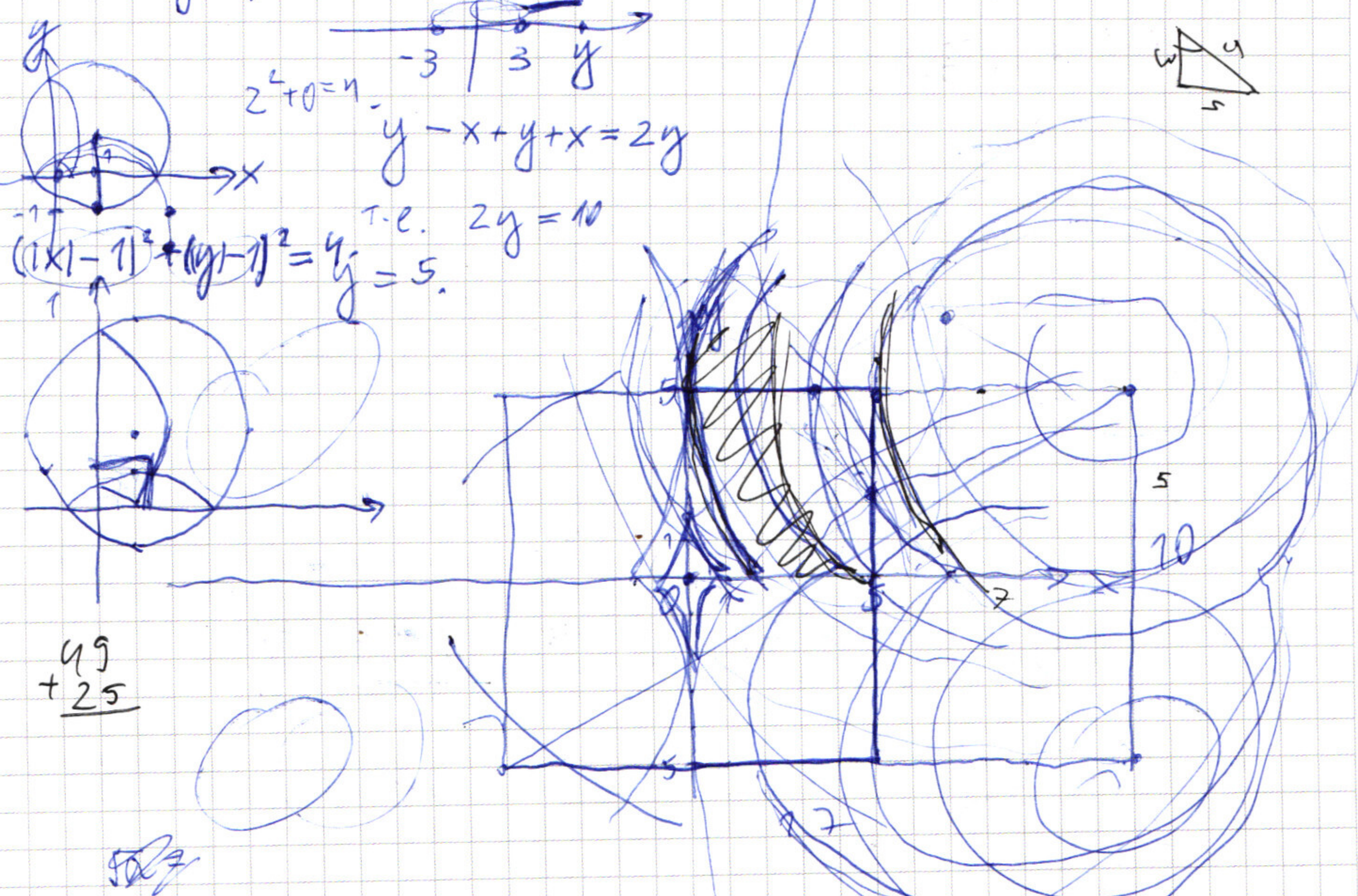
$2^2+0=4.$

$y-x+y+x=2y$

т.е. $2y=10$

$y=5.$

$((|x|-1)^2+(|y|-1)^2=4.$



$\begin{array}{r}49\\+25\\\hline\end{array}$

$\alpha=17^2+10^2=289+100=389.$

$a\in(7;389)$

2) ~~Окр. с ц. в т.~~

$(x-12)^2+(y-5)^2=a.$

Окр. с ц. $(12;5)$, $R=\sqrt{a}$.

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a.$

отр. вниз отм. OX и влево отм. OY.

$a=49$

$49+25=74$

$144+25=169$

$a\in[74;169].$

$\cos(60^\circ+30^\circ)=\cos60^\circ\cos30^\circ-\sin60^\circ\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2}-\frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2}=0.$

№ 168

$\frac{1}{2}CB\cdot AB\cdot\sin(45^\circ+...)=\frac{1}{2}\cdot12\cdot10\sqrt2\cdot(\sin45^\circ\cdot\frac{3}{5}+\cos45^\circ\cdot\frac{4}{5})=60\sqrt2(\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{4}{5})=6\sqrt2(3\sqrt2+4\sqrt2)=42\cdot2=84.$

черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)