

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. Разложить 9261 на простые множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$.

Каждая цифра десятизначного числа должна быть делителем числа 9261, поэтому она 1, 3, 7 или 9.

Так как цифры 9 нет, то цифры числа 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7.

По формуле для объединения буквенных выражений можно

$$\text{способов расставить эти цифры} = \frac{8!}{2!3!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3} = 560.$$

2. Если цифра 9 есть, то она должна быть произведена делением на 9. Тогда цифры числа 1, 1, 1, 3, 7, 7, 7, 9.

$$\text{Число способов} = \frac{8!}{3!1!3!1!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 20 = 1120$$

$$\text{Общее число способов} 1120 + 560 = 1680.$$

Ответ: 1680.

$$2. \cos 9x + \sin 9x = \sin 9x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 9x \right) = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 5x + \cos 5x = \sin 5x + \sin \left(5x - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \cdot \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{2} \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$3. \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(x/x^2)} & 0 < x < 1, y > 0 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(x/x^2)} \Leftrightarrow \ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x) = (\ln y) \cdot \ln \left(\frac{x}{x^2} \right) \Leftrightarrow$$

$$(2 \ln x + 4 \ln y) \cdot (-\ln x) = (\ln y) (\ln x - 2 \ln x) \Leftrightarrow \ln^2 y - 3 \ln x \ln y + \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow$$

$$(\ln x - \ln y)(2 \ln x - \ln y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = \ln y \\ 2 \ln x = \ln y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = y^2 \end{cases} \begin{matrix} x, y > 0 \\ x, y > 0 \end{matrix}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $|x+y+5| + |y-x+5| = 20 \Leftrightarrow$

Первое уравнение - прямая удовлетворяет только на границе квадрата ABCD

Вершины $C(5;0), B(-5;0), O(5;-5), A(-5;-5)$

Система уравнений:

$$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x \geq -5 \\ 2y \geq 0 \\ x+y \leq -5 \\ y-x \leq -5 \\ 2x \leq 10 \end{cases} \quad (y=0)$$

$$\begin{cases} x+y \leq -5 \\ y-x \geq -5 \\ -2x \leq 10 \end{cases} \quad (x=5)$$

$$\begin{cases} x+y \leq -5 \\ y-x \leq -5 \\ -2y \geq 20 \end{cases} \quad (y=-5)$$

$$\begin{cases} x+y \geq -5 \\ y-x \leq -5 \\ -2y \geq 20 \end{cases} \quad (y=-10)$$

График на координатной плоскости:

при $a < 0$
каждого ур.я есть корень
при $a = 0$
 $x = \pm 12, y = \pm 5$
у системы нет решений,
иногда его решение на
границе - окружности
с центром в
 $(\pm 12, \pm 5)$ и
радиусом $\sqrt{a}$
пересечения с осью x будут
на вершинах.
 $F(-12; 5) \quad E(-12; -5)$

при $a > 0$ ур.я имеет минимальные отн. $y=0$
Решение минимальных отн. при $x=0$
Век (x, y) - решение, то $(-x, y)$ - тоже решение.
При $a = 84$ точки A, B, C, D - решение, их ≥ 2 .

$DF^2 = (10+5)^2 + (12+5)^2 = 15^2 + 17^2 = 225 + 289 = 514$
 $FC^2 = (12+5)^2 + 5^2 = 17^2 + 5^2$

При $84 < a < 514$ окр. с центром в F радиуса $\sqrt{a}$ пересекает границу квадрата в двух точках, но окружность не имеет точек на оси OX . Поэтому у системы хотя бы 3 решения. При $a > 514$ решение нет, при $a = 514$ решение - A и D

При $a < 7^2$ решений нет
 При $a = 7^2$ решения $(\pm 5, -5)$

При $7^2 < a \leq 5^2 + 7^2$ 4 решения: $(\pm 5, -5 \pm \sqrt{a^2 - 7^2})$

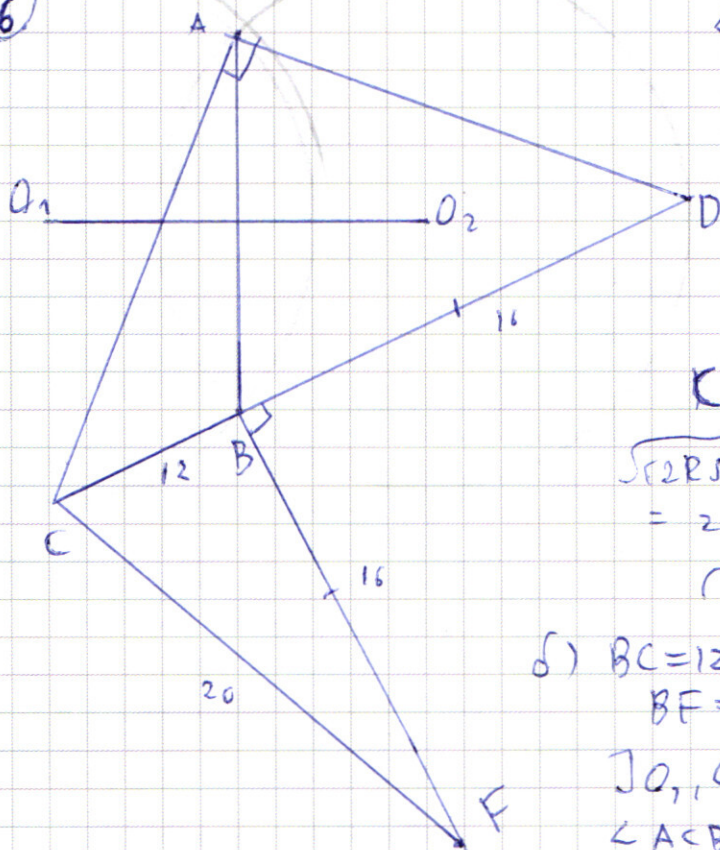
При $5^2 + 7^2 < a \leq 5^2 + 12^2$ 4 решения: $(\pm 5 \pm \sqrt{a^2 - 5^2}, \pm (12 - \sqrt{a^2 - 5^2}))$, $(-5 \pm 5, -5 \pm 5)$

При $a^2 = 5^2 + 7^2 = 225 + 49 = 274$ 2 решения: $(0, 0)$, $(\sqrt{274}, 0)$, $(0, -10)$

При $a > 5^2 + 7^2$ решений нет.

Ответ: $\{49, 514\}$.

6)



а) По теореме синусов

$$CB = 2R \sin \angle BAC$$

$$BD = 2R \sin \angle BAD$$

($R = 10$ - радиус)

$$\angle BAC = \frac{\angle BOC}{2}, \angle BAD = \frac{\angle BOD}{2}$$

как ~~интервал~~ (O_1, O_2 - центры окр.)

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2} =$$

$$\sqrt{(2R \sin \angle BAC)^2 + (2R \sin \angle BAD)^2} =$$

$$= 2R \sqrt{\sin^2 \angle BAC + \cos^2 \angle BAC} = 2R = 20$$

(т.к. $\angle BAC + \angle BAD = \angle CAD = 90^\circ$).

б) $BC = 12$

$$BF = \sqrt{R^2 - BC^2} = \sqrt{100 - 144} = 76$$

O_1, O_2 - центры окр.-тей.

$$\angle ACB = \frac{\angle AO_1 B}{2}$$

$$\angle ADB = \frac{\angle AO_2 B}{2}$$

как ~~интервал~~

$$90^\circ = 180^\circ - \angle CAD = \angle ACB + \angle ADB = \frac{\angle AO_1 B + \angle AO_2 B}{2}$$

из симметрии (радиусы равны) $\angle AO_1 B = \angle AO_2 B$. Тогда $\angle AO_1 B = 90^\circ$,

$$\angle ACB = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

По теореме косинусов

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos 45^\circ$$

$$AB^2 = AC^2 + 144 - 2 \cdot 12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AC = 200$$

$$AC^2 - 12\sqrt{2} AC - 56 = 0$$

$$AC = 6\sqrt{2} \pm \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + 56} = 6\sqrt{2} \pm \sqrt{72 + 56} = 6\sqrt{2} \pm \sqrt{128} = 6\sqrt{2} \pm 8\sqrt{2}$$

$$AC = 14\sqrt{2}$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot (\sin 45^\circ \cos \angle BCF + \cos 45^\circ \sin \angle BCF) =$$

$$= 140\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{12}{20} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{16}{20} \right) = 140 \cdot \frac{28}{20} = 7 \cdot 28 = 98$$

ответ: $CF = 20$; $S = 98$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\textcircled{7.} \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{3x} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Если при заданном x существует хотя бы 1 y , то

$$2^x + 3 \cdot 2^{3x} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$\downarrow f(x) = 2^x - 2(2^{32} - 1)x + 3 \cdot 2^{3x} - 76$$

$$f'(x) = 2^x \ln 2 - 2(2^{32} - 1) \quad f'(x) \text{ возрастает на } \mathbb{R}, \text{ поэтому}$$

$f(x)$ сначала убывает, а потом возрастает.

$$\text{При } x = 6 \quad f(x) = 2^6 - 2(2^{32} - 1) \cdot 6 + 3 \cdot 2^{3 \cdot 6} - 76 = 64 - 3 \cdot 2^{34} + 12 + 3 \cdot 2^{34} - 76 = 0.$$

$$\text{При } x = 38 \quad f(x) = 2^{38} - 2(2^{32} - 1) \cdot 38 + 3 \cdot 2^{3 \cdot 38} - 76 = 2^{38} - 76 + 2^{38} = 2^{38} - 76 = 0.$$

$$= 16 \cdot 2^{34} - 19 \cdot 2^{34} + 76 + 3 \cdot 2^{34} - 76 = 0$$

Поэтому $f(x) \leq 0$ на $[6, 38]$ и только на ней.

Найдем все решения

$$\sum_{k=6}^{38} (2^k + 3 \cdot 2^{3k} + 76 + 2(2^{32} - 1)k) = (76 - 3 \cdot 2^{34}) \cdot 33 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot \frac{33 \cdot 44}{2} -$$

$$- (2^{39} - 1) - (2^6 - 1) = 76 \cdot 33 - 99 \cdot 2^{34} + 2^{33} \cdot 33 \cdot 22 - 33 \cdot 44 -$$

$$- 2^{39} + 2^6 = 32 \cdot 33 + 2^{34} (-99 + 343) - 2^{39} + 64 =$$

$$= 1120 + 2^{34} \cdot 244 - 2^{39} = 1120 + 2^{34} (244 - 32) =$$

$$= 1120 + 2^{34} \cdot 212$$

$$\text{Ответ: } 2^{34} \cdot 212 + 1120$$

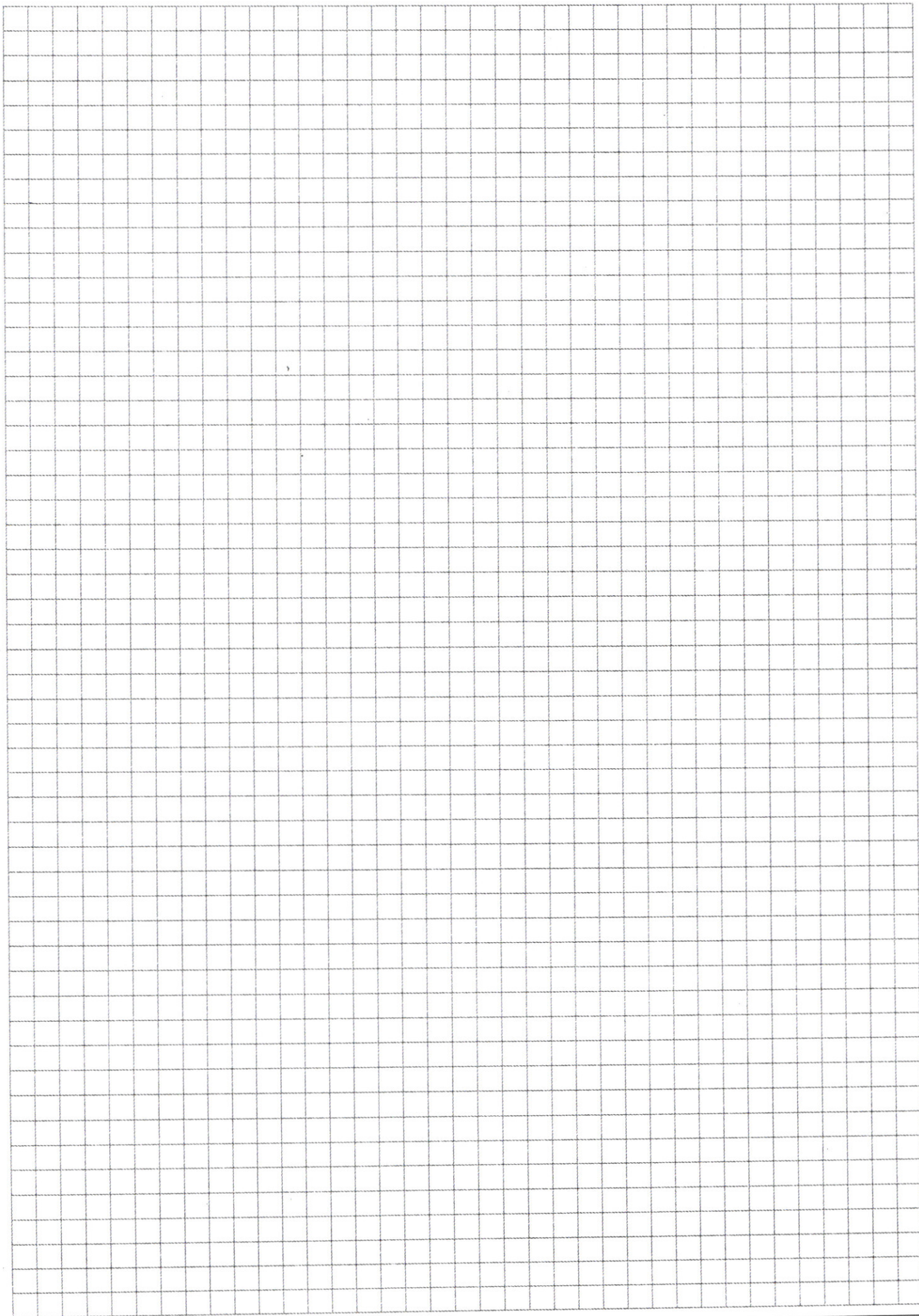
$$\textcircled{2.} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \Leftrightarrow$$

$$- 2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(\cos 3x - \sin 2x) \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$2(\cos 2x - \cos(\frac{\pi}{2} - 2x)) \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sin 2x \cdot 4 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \sin \frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin(\frac{\pi}{4} - 2x) \sin 7x - \cos 4x = 0$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{array}{r} 9261 \ 3 \\ 3087 \ 3 \\ 1029 \ 3 \\ 343 \ 7 \\ 49 \ 7 \\ 7 \ 7 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \ 777 \ 333 \\ 1111 \ 77 \ 39 \end{array}$$

$$\frac{8!}{2 \cdot 6 \cdot 6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 6 \cdot 6} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 560$$

$$\frac{8!}{4! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{24 \cdot 2} = 35 \cdot 7 \cdot 8 = 120 \cdot 7 = 840$$

$$840 + 560 = 1400$$

$$2) \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) + \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta \right) = 2 \sin \frac{\pi - \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} =$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \alpha + \cos (\pi - \beta) = 2 \sin \frac{\pi + \alpha - \beta}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} =$$

$$\beta = 0: 1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - 1 = -2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$= 2 \sin \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right) \sin \left(\frac{\beta + \alpha}{2} \right)$$

$$\cos 9x - \cos 5x - 52 \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 4x \cdot \sin 7x - 52 \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$-2 \sin 2x \cdot \sin 7x - 52 \cos 4x + 2 \cos 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$\cos 9x = \frac{52}{2} \cos 4x$$

$$\cos 5x + \sin 9x = \sin 9x + \sin \left(\frac{\pi}{2} - 9x \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sin 5x + \sin \left(5x - \frac{\pi}{2} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2 \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \cos 4x - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin 7x \cdot \sin \left(\frac{\pi}{2} - 4x \right) = \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos 4x = \cos 4x$$

$$\cos 4x (2 \sin 7x - 1) = 0$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)} \\ y^2 - xy^4 - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$\sin(\pi)$

$$\sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$(y-2)^2 - 2 \cdot (x-2)^2 - xy + 4 = 0 \quad = 2 \cdot \sin\left(7x - \frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos(2x + \pi) =$$

$$= -2 \sin$$

$$\ln(x^2 y^4) \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$(2 \ln x + 4 \ln y) \cdot (-\ln x) = \ln y \cdot (\ln y - 2 \ln x)$$

$$-2 \ln^2 x + 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \ln y$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 y - 3 \ln x \ln y = 0$$

$$(\ln x - \ln y)(2 \ln x - \ln y) = 0$$

$$\begin{cases} \ln x = \ln y \\ 2 \ln x = \ln y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y \\ y = x^2 \end{cases}$$

$$x=y: \quad x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$\begin{cases} x=0 \\ x=2 \end{cases}$$

$$y=x^2: \quad y^4 - y^3$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$\begin{matrix} 8 & 4 & 12 & 8 \\ x(x-2)(x^2+x-4) = 0 \end{matrix}$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x=2$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(2, 2)$$

$$(2, 4)$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{18+2\sqrt{17}}{4} = \frac{9+\sqrt{17}}{2}\right)$$

$$x+y \geq -5$$

$$x-x \geq -5$$

$$2y+10 \leq 0$$

$$y=0$$

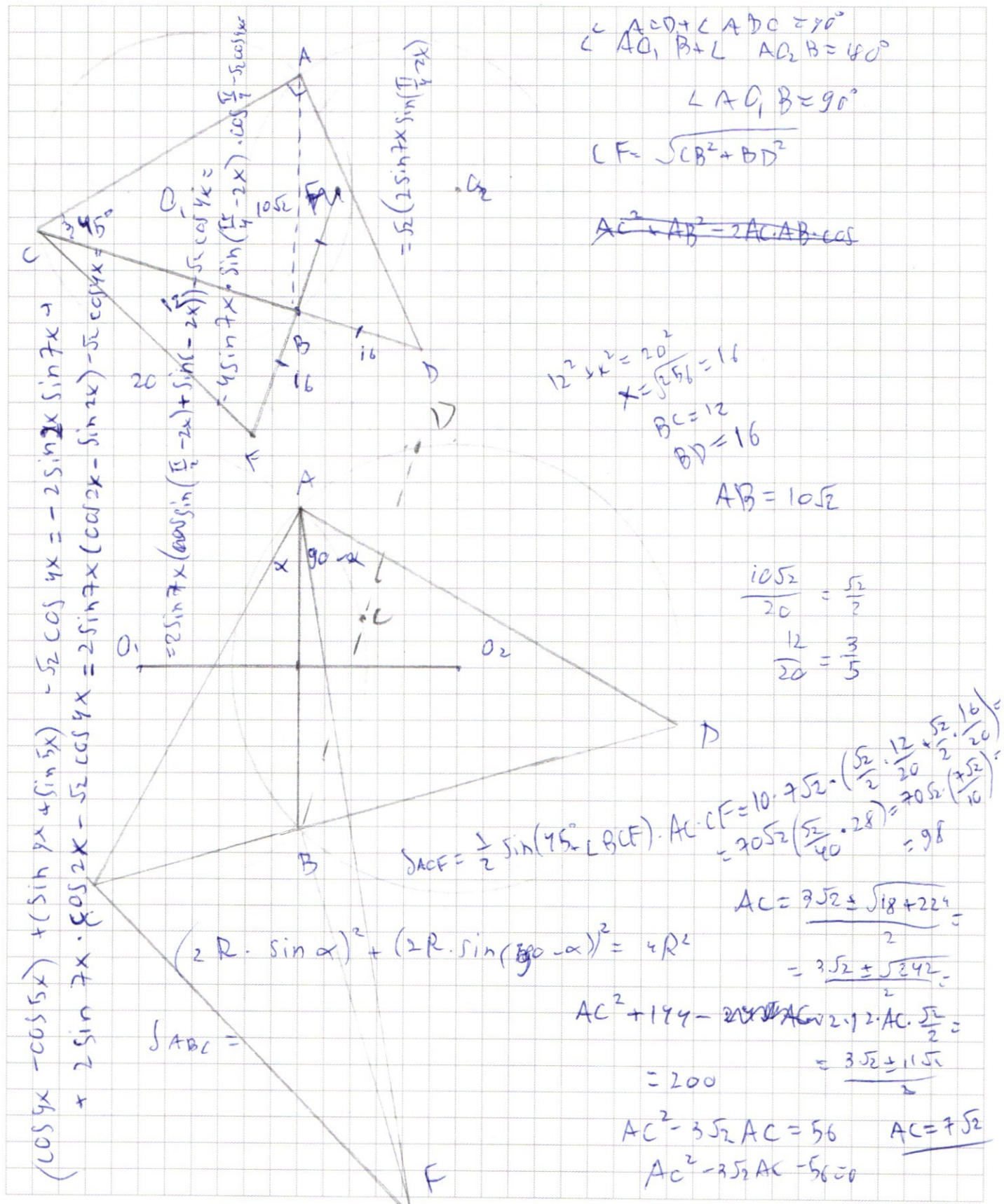
$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x$$

36

$$17^2 + 15^2 =$$

$$= 289 + 225 = 514$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

сдв

$$\cos 4x \cos 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x \sin 5x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x = 0$$
$$+ \sin 4x \sin 5x$$

$$- 2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x$$

