

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~задача~~ №1.

записаны, что $9261 = 8^3 \cdot 7^3$ тогда.

9261 могут дать 2 набора из 8

(цифр) 1) 888 777 11.

2) 93 777 111.

разсмотрим 1й набор.

всего кол-во перестановок 8!

но т.к. есть повтор-я:

$[888]$ $[777]$ $[11]$ нужно поделить
на кол-во перест-к.
этих цифр

и то что из 1го набора можно
сост.

$$N_1 = \frac{8!}{8! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$\text{чисел. } N_1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 56 = 560$$

чисел.

аналогич. рассужд. со 2м набор.

$$N_2 = \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2} = 10 \cdot 56 =$$

$$\text{кол-во перест-к "4" 7"} = 10 \cdot 112 = 1120.$$

таким. обр. всего чисел. $N = N_1 + N_2 =$

$$= 560 + 1120 = 1680.$$

Ответ: $N = 1680$ чисел.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

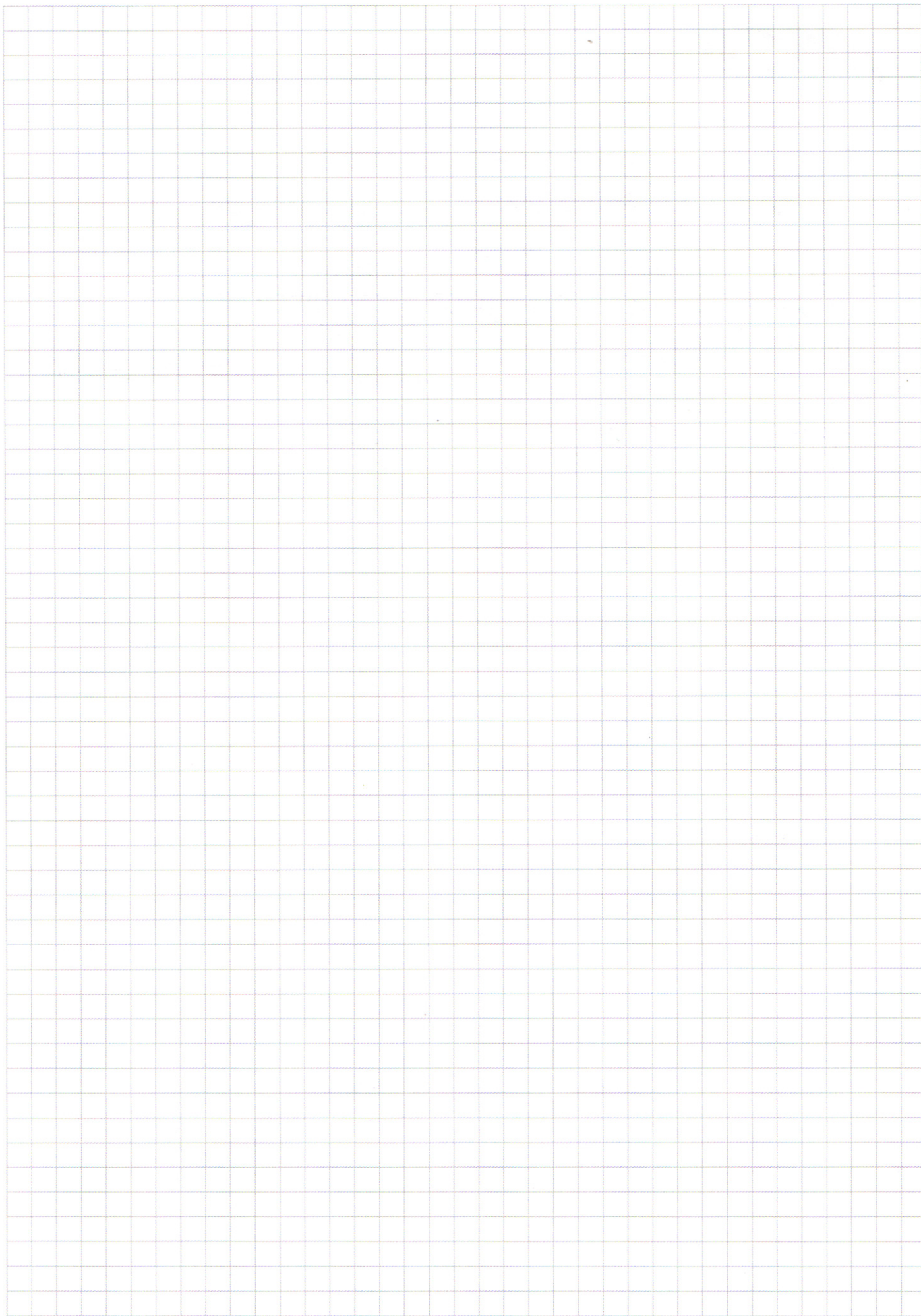
$$2R = 3SP \Rightarrow R = \frac{3SP}{2} \quad \text{и} \quad \angle KNO = \frac{KO}{JO} =$$

$$= \frac{KO}{JP+PO} = \frac{R}{JP+R} = \frac{\frac{3SP}{2}}{JP+\frac{3SP}{2}} = \frac{\frac{3SP}{2}}{\frac{2JP+3SP}{2}} = \frac{3}{5} \Rightarrow$$

$$\angle KNO = \arccos \frac{3}{5}$$

назовем $\angle KNO = \varphi$

$$\text{и} \quad \cos \frac{3}{5} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{3}{5} \Rightarrow \varphi = \frac{3}{4}$$

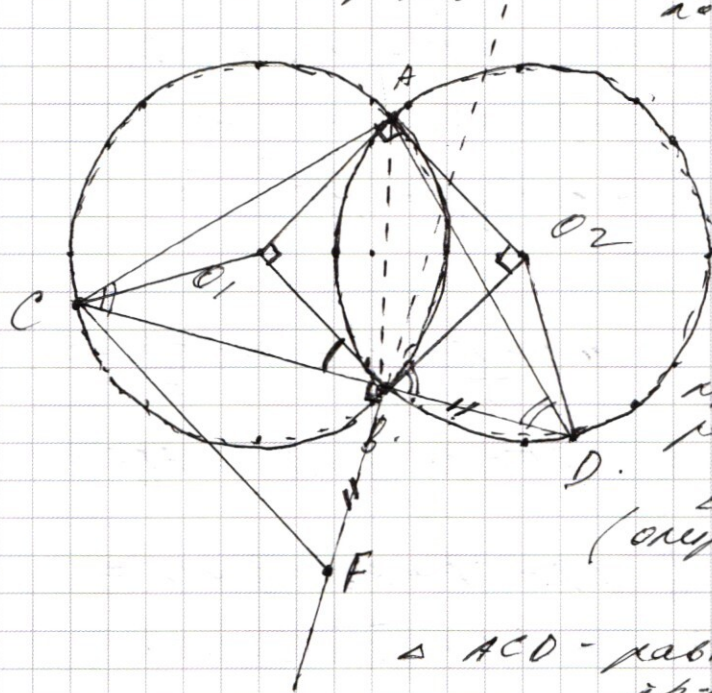


☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $R = 10$ - радиус.



по теореме Пифагора.

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 \quad BF = DB$$

по усл. $\Rightarrow$

$$\underline{CF^2 = CB^2 + DB^2}$$

в силу симметрии
отрезки AC и AD
пересекаются, отсекая
равные дуги $\Rightarrow$

$\angle ADB = \angle ACB = 45^\circ$
(опираются на равные
дуги). $\Rightarrow$

$\triangle ACD$ - равнобедр. треугол.
тр-к.

далее теорема косинусов для $\triangle CAB$ и
 $\triangle BAD$ с общей стороной AB .

при этом введем обознач. $\underline{AC = AD = a}$

$$AB^2 = a^2 + CB^2 - 2a \cdot CB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a^2 + BD^2 - 2a \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{CB^2 - 2a \cdot CB \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{BD^2 - 2a \cdot BD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\frac{CB^2 - BD^2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = (CB - BD)(CB + BD) = \frac{2a\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} (CB - BD)$$

теперь рассмотрим $\angle AOB$ - центр угол,
опор на $AB \Rightarrow$

$$\angle AOB = 2 \angle ACB = 90^\circ.$$

$O_1A = O_1B = R \Rightarrow \triangle AOB$ - равнобедр. треугол.
тр-к.

$$AB = 10\sqrt{2} \quad \text{аналогично с } \angle AOB.$$

расположены в плоскости. AO_1BO_2

$$AO_1 = O_1B = BO_2 = O_2A = R \quad \angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ \Rightarrow$$

AO_1BO_2 - квадрат (радиусы перпендикулярны). $\Rightarrow$

$$\angle O_1BO_2 = 90^\circ \Rightarrow \text{если } \angle O_1BC = \alpha \text{ то}$$

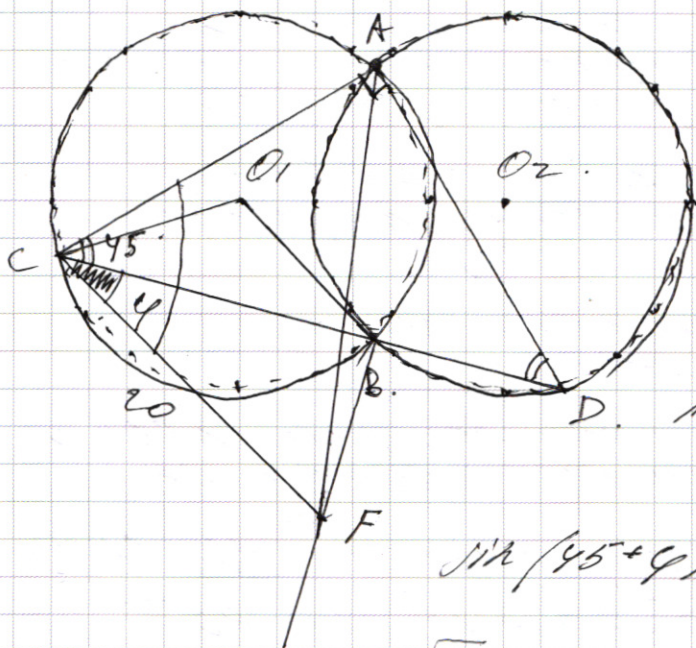
$$\angle O_2BD = 90^\circ - \alpha.$$

тогда из равнобедр. $\triangle CO_1B$ и $\triangle BO_2D$.

$$CB = 2R \cos \alpha \quad BD = 2R \cos(90^\circ - \alpha) = 2R \sin \alpha. \Rightarrow$$

$$CF^2 = CB^2 + BD^2 = 4R^2(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = 4R^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{CF = 2R = 20}$$



$$\cos \varphi = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \varphi = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$BF = 20 \cdot \frac{4}{5} = 16. = BF. \Rightarrow$$

$$CD = CB + BD = 16 + 12 = 28 = \sqrt{2} AC \Rightarrow$$

$$AC = \frac{28}{\sqrt{2}}$$

$$\sin(45^\circ + \varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}.$$

$$S = \frac{1}{2} \cdot CF \cdot CA \sin(45^\circ + \varphi) = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot \frac{28}{\sqrt{2}} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = \frac{20 \cdot 28}{2 \cdot 10} =$$

$$= 28.$$

$$\text{Ответ: } CF = 20 \\ S = 28.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

воспользуемся формулой разности
косинусов и суммы синусов.

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0.$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0.$$

распишем.
раскроем $\cos 4x$.
и воспользуемся формулой разности.
кв-в.

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0.$$

поделим на 2:

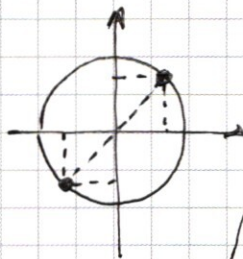
$$(\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) \right) = 0.$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \right) = 0. \Rightarrow$$

$$\cos 2x = \sin 2x. \quad (1)$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \quad (2)$$

(1). $\cos 2x = \sin 2x.$



$$2x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

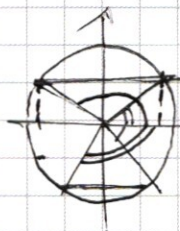
$$x = \frac{\pi}{8} + \pi k \quad k \in \mathbb{Z}.$$

(2) $\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$

$\Downarrow$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k. \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \pi - \frac{\pi}{4} - 2x + 2\pi k$$



$$\sin \alpha = \sin \beta.$$

$$\alpha = \beta + 2\pi k$$

$$\alpha = \pi - \beta + 2\pi k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \\ 9x = \frac{8\pi}{4} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{где } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{9} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{9} \end{array} \right] \quad \text{где } k \in \mathbb{Z}.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

н.д. $\frac{-2\ln x - 4\ln x}{x \cdot y} = \frac{\ln y}{y^2 \ln x} \Rightarrow$ работаем с лог. ур-ми

$\frac{-2\ln x - 4\ln x}{x \cdot y} = \frac{\ln y}{y^2 \ln x}$

$\ln \frac{y}{x^2} = \ln y - \ln x^2 =$

(цель работы не
смысл была бы)

$= \ln y - 2\ln x.$

$\frac{-2\ln x - 4\ln x}{x \cdot y} = \frac{\ln y}{y^2 \ln x} \quad (1)$

$\ln x \Rightarrow x > 0 \quad \ln y \Rightarrow y > 0.$

работаем со лог.
ур-ми.

отнимем - прибавим.

$\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \quad (*)$

прибавим - отнимем.

$y^2 - 2xy - 3xy - 2x^2 + 6x^2 + 8x - 4y + 21y - 6x^2 = 0.$
 $(y^2 - 4xy + 4x^2) - (4y - 8x) + (3yx - 6x^2) = 0.$

воспользуемся формулой сокращенного умножения.

вынесем общий множитель.

$(y - 2x)^2 - 4(y - 2x) + 8x(y - 2x) = 0.$

$(y - 2x)(y - 2x - 4 + 8x) = 0.$

$(y - 2x)(y + x - 4) = 0. \Rightarrow$

$\begin{cases} y = 2x. & (a) \\ y = 4 - x & (b). \end{cases}$

вернемся к (1).

(a) $y = 2x.$

$\frac{-2\ln x - 4\ln x}{x \cdot 2x} = \frac{\ln 2x}{(2x)^2 \ln x} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 & 2 \ln x \cdot 2 \ln x \cdot 2 \ln x \cdot \ln 2 \cdot \ln x \cdot \ln 2 \cdot \ln x \\
 & x \cdot 2 \cdot x = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \\
 & 2 \ln x = 2 \cdot 2 \cdot x \cdot \ln 2 \\
 & 2 \ln x = 2 \cdot x \cdot \ln 2 \Rightarrow 2 = x \Rightarrow \\
 & \ln \frac{x^2}{x} = \ln x \\
 & 2 = x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \ln x \cdot 2 \ln x \cdot \ln x \cdot \ln x \cdot \ln 2 \cdot \ln x \\
 & x \cdot 2 = 2 \cdot x \cdot x \\
 & 2 \ln x = 2 \cdot x \cdot \ln 2 \\
 & 2 \ln x - \ln 2 = x \cdot \ln 2 \Rightarrow 2 = x \cdot \ln 2 \\
 & 2 = x
 \end{aligned}$$

возведем обе части в степень.

$$\begin{aligned}
 & \frac{2 \ln x - 1}{\ln 2} = 1 \\
 & x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 2 \Rightarrow y = 4} \quad \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix} \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

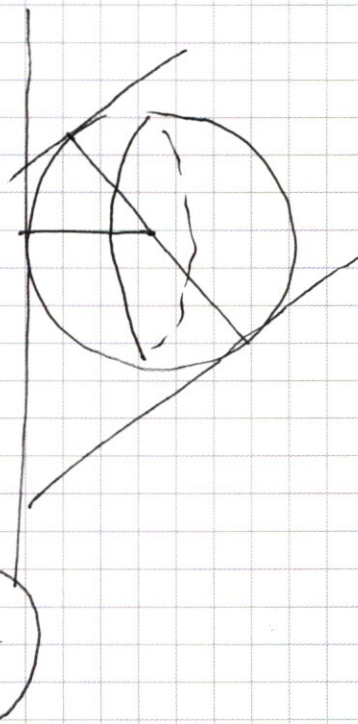
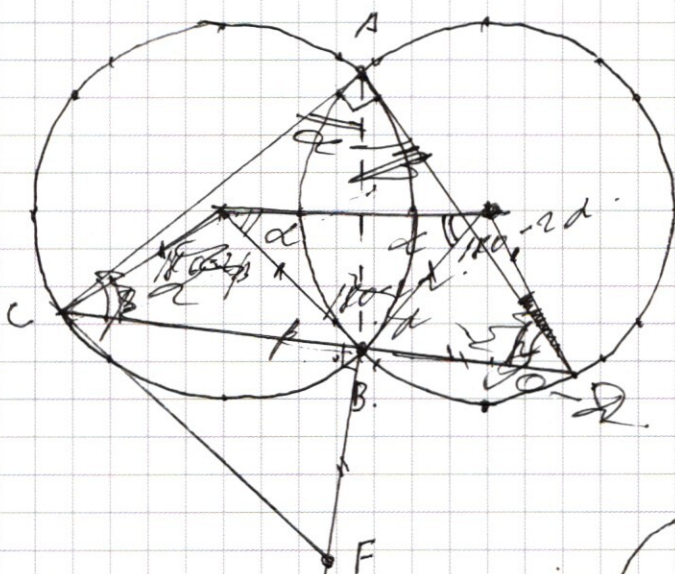
6) $y = 4 - x$.

$$\begin{aligned}
 & x \ln x \cdot (4 - x) = (4 - x) \ln(4 - x) \\
 & x \ln x = (4 - x) \ln(4 - x) \\
 & x = (4 - x) \cdot \frac{\ln(4 - x)}{\ln x} \\
 & \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = 4 - 2 = 2. \\
 & x > 0.
 \end{aligned}$$

Ответ: ~~(1, 3)~~; ~~(3, 1)~~ $\boxed{x_1 = 2, y_1 = 4; x_2 = 2, y_2 = 2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$CF = \sqrt{CB^2 + BD^2}$$



$$\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{d}\right)^2} = \frac{\sqrt{d^2 - a^2}}{d}$$

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot CB \cdot \cos \alpha = AD^2 + DB^2 - 2AD \cdot DB \cdot \sin \alpha.$$

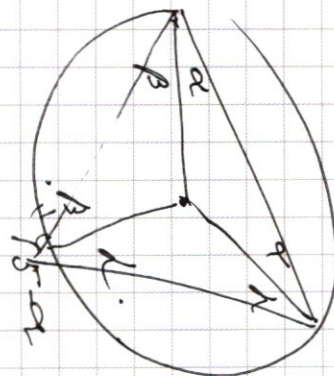
$$\cos^2 \alpha$$

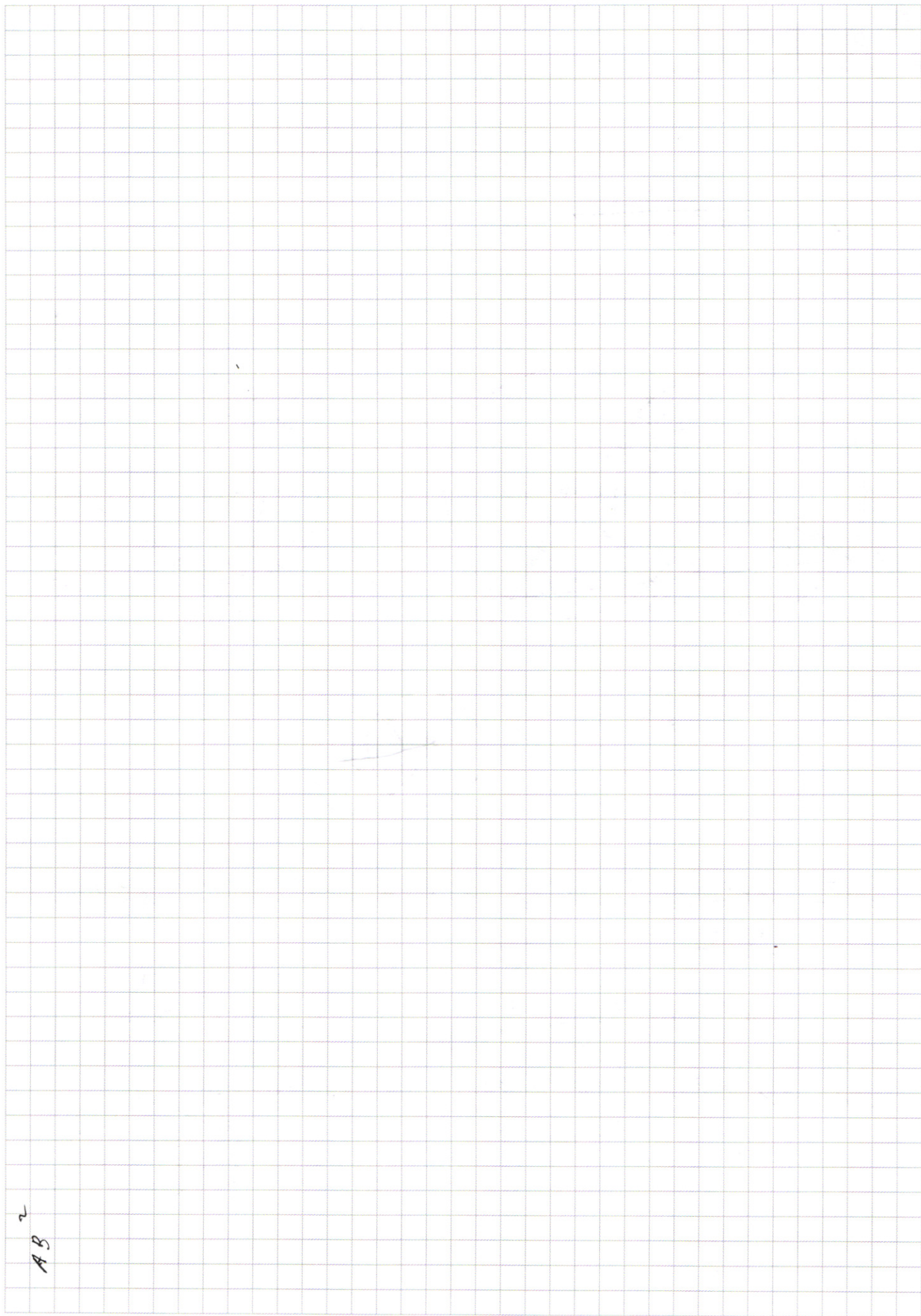
$$\beta \in 90^\circ - \alpha.$$

$$CB^2 = AC^2 + AB^2$$

$$AC^2 + AD^2 = (CB^2 + BD^2) + 2CB \cdot BD \cdot \cos \alpha.$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ.$$





☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

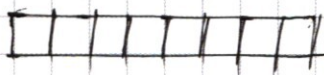
$$\begin{array}{r} 926113. \\ - 9. \\ \hline 9261129 \\ 18 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 129 \\ 9 \\ \hline 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 13} \\ \underline{9} \\ 43 \overline{) 17} \\ \underline{12} \\ 28 \\ \underline{24} \\ 49 = 7^2 \end{array}$$

$$\frac{11260}{916}$$

$$|926| = 2^3 \cdot 7^3$$



Б. С. С. С.

нельзя довести
на какую-
либо цифр
уровне.

работ цифр.

1) 3 3 3 7 7 7 11.
2) 9 3 7 7 7 11.7

только ИЧ и катод.

1/ 101-60 reposit $\frac{8!}{3!3!2!}$

2! · 1!
3! · 3!

$223 \quad \boxed{1 \mid 1 \mid 1}$

$$\begin{array}{r} 49 \\ 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\frac{2233}{2233 \mid \frac{4!}{2!2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 3}$$

$$\sin \alpha + \cos \beta, \quad \cos \alpha - \cos \beta.$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y. \end{aligned}$$

$$-2 \sin x \sin y.$$

$$\begin{aligned} x+y &= \alpha \\ x-y &= \beta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\alpha+\beta}{2} \\ y &= \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y. \end{aligned}$$

$$2 \sin x \cos y = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned} x+y &= \alpha \\ x-y &= \beta. \end{aligned}$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x \cos.$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x \cos.$$

$$\cos \alpha - \cos \beta.$$

$$\begin{aligned} \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y \\ \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad y = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta =$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y \\ \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y. \end{aligned}$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x \cos.$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x \cos.$$

$$\begin{aligned} (x \cdot b)^{\ln x} &= x^{\ln x} \cdot b^{\ln x} \\ &= x^{\ln x} \cdot b^{\ln x} \\ &= x^{\ln x} \cdot b^{\ln x} \\ &= x^{\ln x} \cdot b^{\ln x} \end{aligned}$$

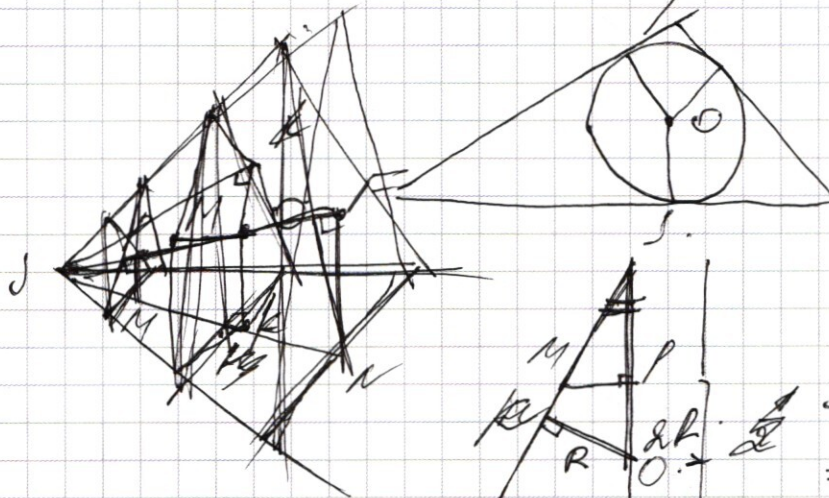
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{\cos 2x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)}{\cos 4x} =$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x =$$

$$= \frac{(\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x)}{\sqrt{2}}$$

$$\cos \alpha \neq \sin \beta$$



похожие тр-е.

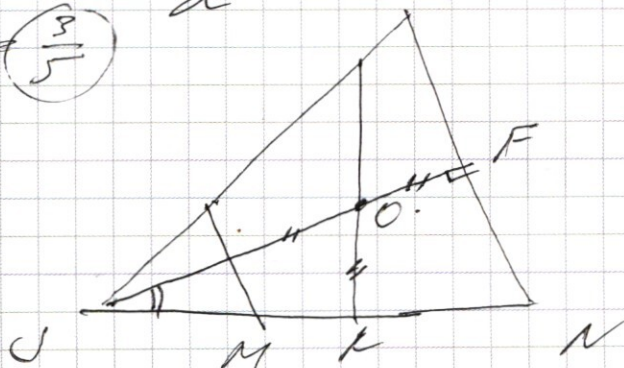
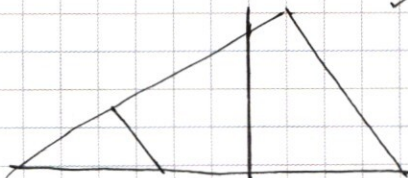
$$\frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{JM}{JN} = \frac{JP}{JF} = \frac{1}{4}$$

$$JF = 4JP$$

$$PF = JF - JP = 3JP = 2R \quad \text{с)} \quad R = 3SP$$

$$\frac{R}{2} = \frac{3SP}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{R}{\frac{5SP}{2}} = \frac{\frac{3SP}{2}}{\frac{5SP}{2}} = \frac{3}{5}$$



$$\frac{-2 \ln x}{x} \cdot y - 4 \ln x = \frac{\ln y}{y \ln x + 4}$$

$$x > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$\ln \frac{y}{x^4} = \ln y - \ln x^4$$

$$\frac{-2 \ln x}{x} \cdot y = 4 \ln x + 7 \ln x \quad \ln y$$

$$\frac{-2 \ln x}{x} \cdot y = 4 \ln x + 7 \ln x \quad \ln y$$

$$y = x^4$$

$$2^{3-1} = 2^2$$

$$y(y-x-4) + 2x(4x-x)$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 3xy - 6x^2$$

$$y^2$$

$$y^2 - 4xy + 4x^2 + 3xy - 6x^2$$

$$(y-2x)^2 - 4(y-2x) + 3x(y-2x) = 0$$

$$(y-2x)(y-2x-4+3x) = 0$$

$$(y-2x)(y+x-4) = 0$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$$\log_2 2 + \log_2 4 = \log_2 (8) = 3$$

$$x = 2$$

$$x = 2$$

$$ka = b / c = a \cdot c = a$$

$$x \cdot \log_2 x = (x+1) \cdot \log_2 (x+1)$$



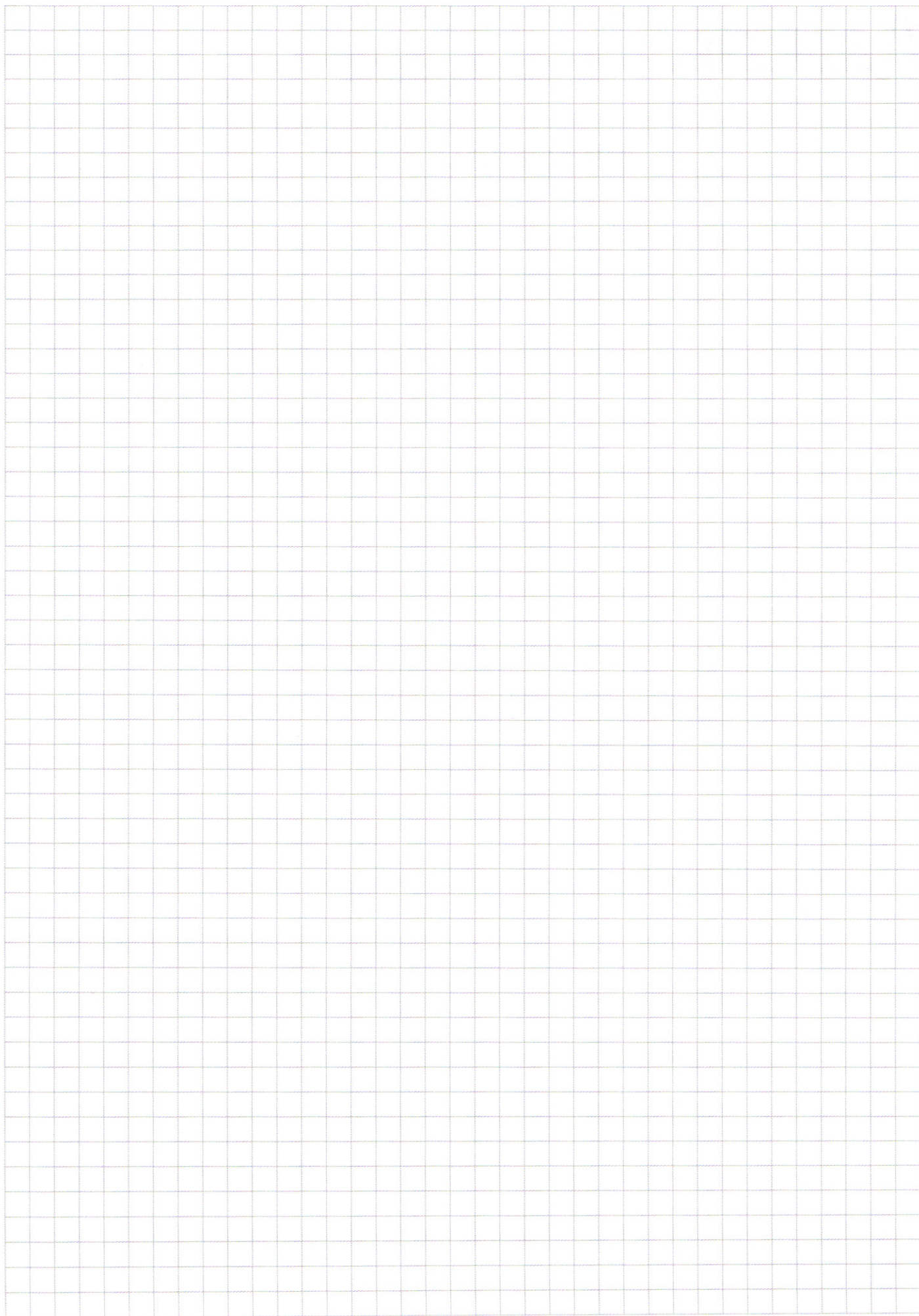
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)