

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ:

Бланк задания должен быть вложен в р:
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Степени 7, большие 10 - не цифры, а вот $3^2 = 9 \Rightarrow$
(еще 7 и 3 простые)

$\Rightarrow$ возможные наборы цифр для получения 9261:

7 7 7 3 3 3 1 1 $\leftarrow$ оставшиеся произв $= \frac{9261}{9261} = 1 \Rightarrow$ все единицы
или

7 7 7 3 9 1 1 1. Чтобы посчитать общее кол-во, посчитаем

все варианты и поделим на перестановки одинаковых (случаи не пересекаются
из-за 9)

$$1: \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 2} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$2: \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 560 \cdot 2 = 1120 \quad \text{Итого вариантов (исел)} \quad 560 + 1120 = 1680$$

Ответ: 1680

N3 Из $y - x \parallel y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 7y = 0 \Leftrightarrow (x + y - 4)(y - 2x) = 0$

Следует $x + y = 4$ либо $y = 2x$

Существует $\ln x \Rightarrow x > 0$ и $\ln \frac{y}{x^2} \Rightarrow \frac{y}{x^2} > 0 \Rightarrow y > 0 (x > 0)$

$$I: \frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^2}} \quad (\text{из сл. логарифма}) \quad y^{\ln x^2} = y^{2 \ln x} \quad / \cdot y^{\ln x} \quad (> 0)$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{3 \ln x}} \Leftrightarrow y^{3 \ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2 \ln x} \quad / \text{заменим } x = e^{\ln x}, y = e^{\ln y}$$

$$e^{\ln y \cdot 3 \ln x} = e^{\ln y \cdot \ln y} \cdot e^{\ln x \cdot 2 \ln x} \quad \text{основание равно \(\Rightarrow\) равенство степеней}$$

$$\ln y \cdot 3 \ln x = (\ln y)^2 + 2 (\ln x)^2$$

$$(2 \ln x - \ln y)(\ln x - \ln y) = 0$$

$$\left(\ln \frac{x^2}{y} \right) \left(\ln \frac{x}{y} \right) = 0$$

$$\text{если } \ln a = 0 \Rightarrow e^0 = a \Rightarrow a = 1$$

$$\frac{x^2}{y} = 1 \Leftrightarrow x^2 = y$$

$$\frac{x}{y} = 1 \Rightarrow x = y$$

см. обрат.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Обозначим пересечение AC и EB за X. $\angle CXB$ из $\triangle CXB = 45^\circ \Rightarrow \angle AXB = 135^\circ \Rightarrow$ он описывается на AB в окружности Π с внутр. хордой. ($\angle AXB + \angle ADB = 180^\circ$). Т.к. $BC = 12$, $XB = 12$. $EC = 20 \Rightarrow$
 $\Rightarrow EB = 16$ из т. Пиф. $\Rightarrow AX = \frac{EX}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ (EAX равнобедренный)
 $\Rightarrow CA = CX + AX = 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$; $CF = 20$ по доп. Чисел

найти площадь остальной части $\angle ACF$. $\angle ACF = \angle ACD + \angle DCF = 45 + \angle BCF$.

Для $\triangle BCF$ $BC = 12$, $CF = 20$, $BF = EB = 16 \Rightarrow \sin BCF = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$; $\cos = \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \angle ACF = \sin(BCF + 45) = \sin BCF \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos BCF \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{5\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow S_{ACF} = \frac{1}{2} a \cdot b \sin \gamma = \frac{7}{10\sqrt{2}} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 = 14 \cdot 14 = 196$$

Ответ: 20; 196.

2

Преобразуем ($9x = 7x + 2x$; $5x = 7x - 2x$):

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (1 - 2 \sin^2 2x) \quad \left| \begin{array}{l} \cos 2x - \sin 2x \\ \hline \pm \sqrt{\cos 4x} \end{array} \right.$$

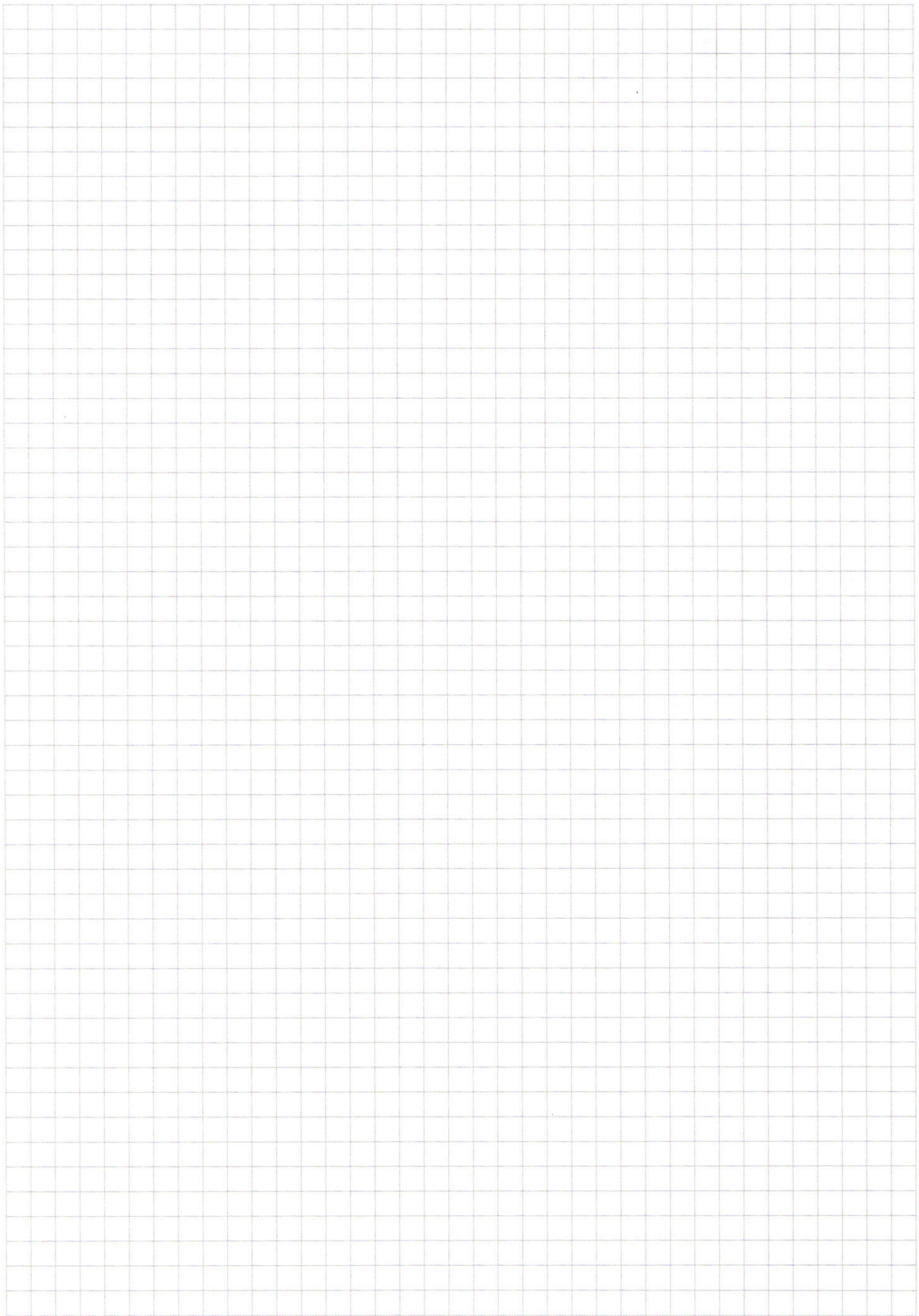
$$\pm 2 \sin 7x (\sqrt{\cos 4x}) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$4 \sin^2 7x = 2 \cos 4x$$

$$\uparrow$$

$$\cos 4x + \cos 14x = 1$$

а дальше не получилось



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 1029 \cdot 3^2 = 343 \cdot 3^3 = 7^3 \cdot 3^3$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!}$$

$$(+3)$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$-2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + 90$$



$$\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{1 + \sin 2\alpha}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$\cos 4x = 1 - 2 \sin^2 2x$$

$$\alpha = 90$$

$$\beta = 0$$

$$\cos \beta = 1$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$-\sin \alpha$$

$$-2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = 0$$

$$1 - 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos \beta = 2 \sin^2 \frac{\beta}{2}$$

$$\sqrt{1 + \sin 18x} + \sqrt{1 - \sin 10x}$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} + \sqrt{2} \sin^2 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (1 - 2 \sin^2 2x)$$

$$\sin 2x = \frac{+2 \sin 7x \pm \sqrt{4 \sin^2 7x - 4 \sin^2 7x}}{2}$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$2x=10 \\ y=5$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$2^{-3} = \frac{2^3}{2^3}$$

$$(10+y) + |y| = 10$$

$$-2y = 20$$

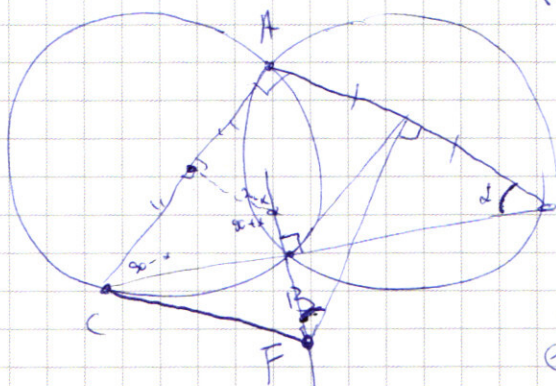
$$\ln y = \ln 2 + \ln y = -10 \quad \checkmark$$

$$2^{\ln y} = 4$$

$$10+2y=10$$

$$y=0$$

I



$$x = \pm 2 \\ x^2 = 2x$$

$$y^{\ln y} = y^b = (e^{\ln y})^b$$

$$e^b = y$$

$$(x = \pm 5; y \in [-10; 0])$$

$$x^2 y^4 - \ln x = y \ln y - \ln x = \frac{y \ln y}{y^{\ln x}}$$

$$y \in [-10; 0]$$

$$\ln 2 = \ln 2 \cdot 2^{\ln 2}$$

II

$$\ln 2x = \ln x + \ln 2$$

$$|x+y+5| = -|x|$$

$$y+5=0 \quad y=-5$$

$$y+5 = 2x$$

$$a^{\ln b} = b^{\ln a}$$

$$|x-1| + |x-3| = 10$$

$$x = \pm 2.5$$

$$y = 0; 5$$

$$a^b \cdot c^b = a^c b^c$$

$$e^{\ln b} = b$$

$$x^2 y^4 - \ln x$$

$$2^3 \cdot 2^5 \cdot 4^3$$

$$2^{33} x - 2x + 46 > 2^x + 3 \cdot 2^{3x}$$

$$\frac{1}{(x^2 y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x}}$$

$$2^{33} (x-6) - 2^x - 2x + 46 > 0$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{3 \ln x}}$$

$$(x+y \neq 4) \cdot (2x+y)$$

$$a^b \cdot a^b = a^{2b}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x}} = \frac{2x^{\ln x + \ln 2}}{(2x)^{3 \ln x}}$$

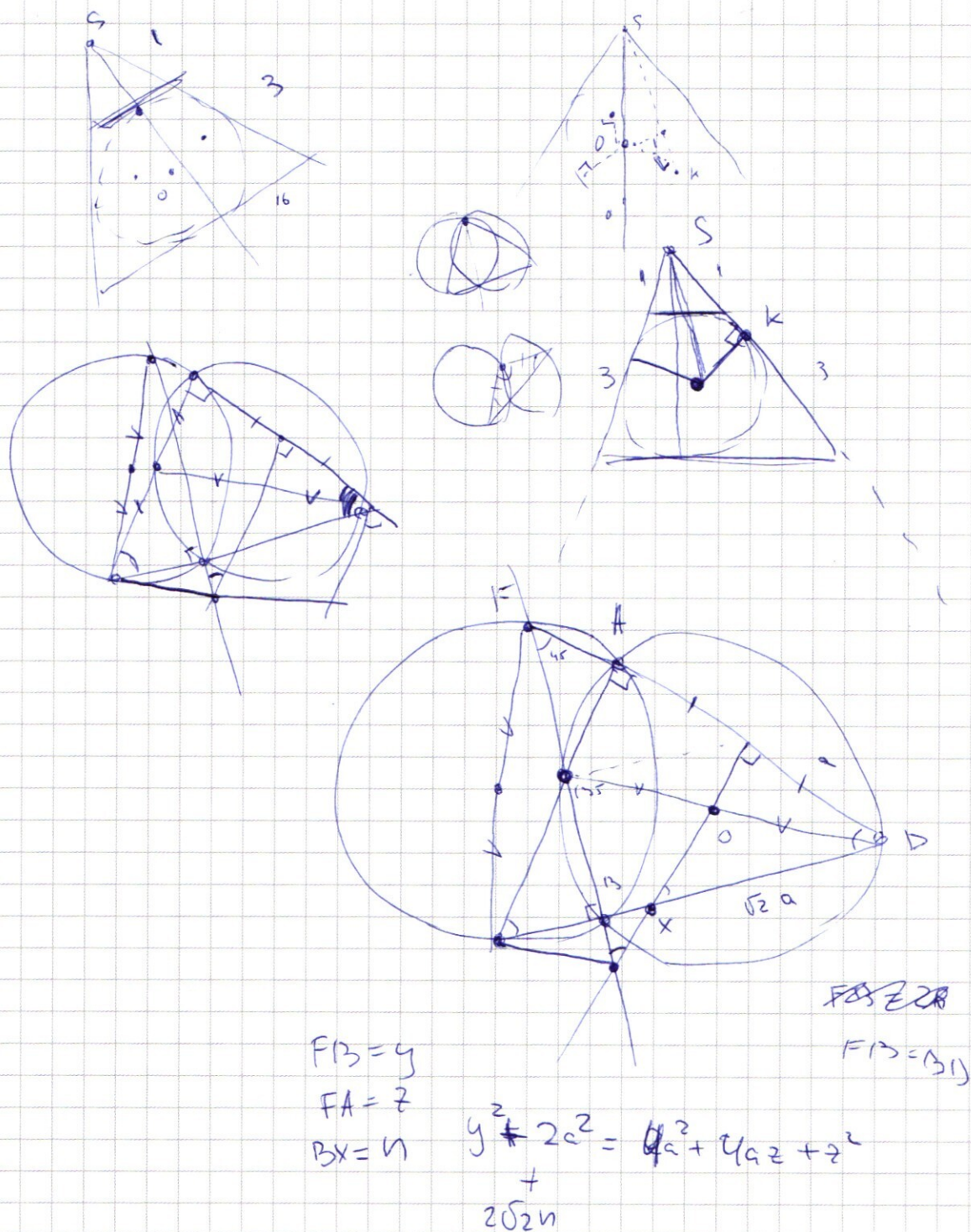
$$2^{\ln x} = x^{\ln 2}$$

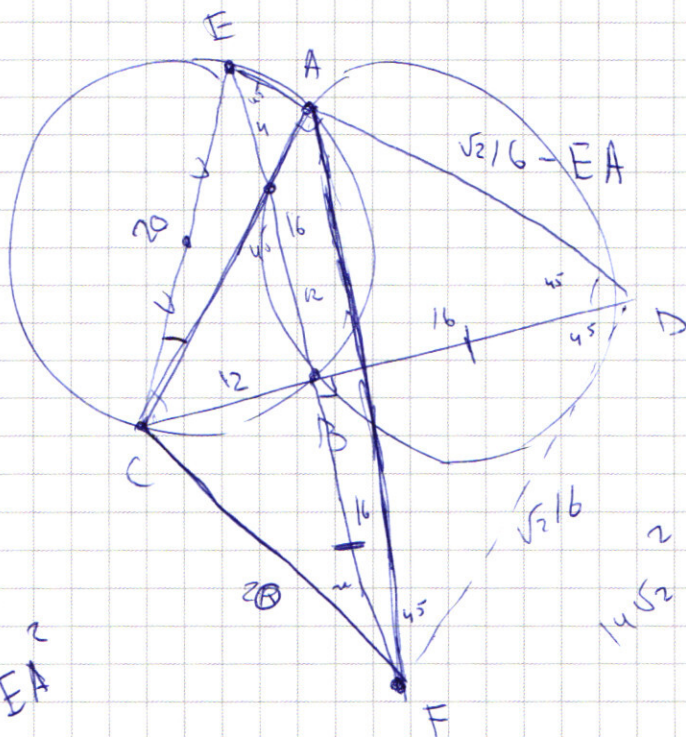
$$2x^{\frac{2}{3} \ln x} = x^{2 \ln x} \cdot 2x^{\frac{\ln x + \ln 2}{3}}$$

$$4^{\ln x} = 2x^{\ln 2}$$

$$2^{2 \ln x} = 2x^{\ln 2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\sqrt{2}16 - EA^2$$

$$512 - 2\sqrt{2}16EA + 2EA^2$$

$$2 \cdot 16^2$$

$$20 \quad 28 \quad \sqrt{2}16$$

$$\sqrt{2}16 \pm \sqrt{512 + 224}$$

$$736 \quad 25625 \quad 26$$

$$EA^2 - \sqrt{2}16EA = 56$$

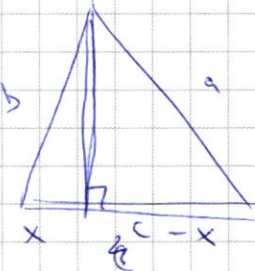
$$10\sqrt{2}$$

$$EA =$$

$$20\sqrt{2}$$

$$800 - 720 \quad 18\sqrt{2}$$

$$728 = 32 \cdot 18 \quad 640$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{x^{2\ln x}} = \frac{y \ln y}{y^{3\ln x}} = \frac{2 \ln^2 y}{2^{2\ln^2 y}} = y = 4$
 $(x-4) \ln(x-4)$
 $(4-x)^{3\ln x} = x^{2\ln x} (4-x)^{\ln(4-x)}$
 $(4-x)^{2\ln x + \ln \frac{x^3}{4-x}} = x^{2\ln x}$
 $\ln a = b \Rightarrow e^b = a$
 $e^b = a \Rightarrow b = \ln a$
 $(e^{\ln x})^{2\ln x} = e^{2\ln x \cdot \ln x}$
 $e^{\ln(4-x) \cdot \ln \frac{x^3}{4-x}}$
 $x^2 + 2xy + y^2 = 16$
 $y + 2y^{15} + y^2 = 16$
 $e^{\ln y \cdot 3\ln x} = e^{\ln y \ln y} \cdot e^{2\ln x \ln x}$
 $2(\ln x)^2 + (\ln y)^2 = 3\ln y \cdot \ln x$
 $(\ln x - \ln y)^2 + \ln x(\ln x - \ln y) = 0$
 $\ln \frac{x^2}{y} \cdot \ln \frac{x}{y} = 0$
 $x=2, y=2$

$\ln x + \ln x = \ln x^2$
 $a^{\ln b} = b^{\ln a}$
 $e^{\ln a} \left(\frac{b}{e}\right)^{\ln a}$
 $a < b$
 $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$
 $a^{\ln \frac{b}{a}} = b$
 $(a^b)^c = a^{bc}$
 $e^{\ln \frac{b}{a}} = \frac{b}{a}$
 $\ln x = 0 \Rightarrow e^0 = x \Rightarrow x = 1$

$x^2 = y \Rightarrow y = 2x$
 $x = y \Rightarrow x + y = 4$
 $x=2, y=2$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x = \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

$$\sin 7x \cos 2x = \sin 2x \cos 7x$$

$$-\sqrt{2}(1 - 2\cos 3x)$$



$$\cos x - \sin x \approx 1 - 2\sin^2 x$$

$$1 - 2\cos^2 \sin x$$

$$= 2\sin 7x \sqrt{1 - 2\sin^2 2x} = \sqrt{2}(1 - 2\sin^2 2x)$$

$$\cos 3x + \cos 2x = 1 \quad \sin^2 7x = 2$$

$$\sin^2 7x = \frac{1}{2}$$

$$\sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$4\sin^2 7x = 2\cos 4x$$

$$2 - 4\sin^2 2x$$

$$8\sin 3,5x \cos 3,5x$$

$$4\sin^2 7x - 2\cos 4x = 0$$

$$2\sin^2 7x = 1 - 2\sin^2 2x$$

$$\sin^2 7x + \sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$$\cos^2 7x + \cos^2 2x = 1,5$$

$$(\sin 7x + \sin 2x)^2$$

$$8\sin 7x \cos 7x + 2\sin 4x = 0$$

$$\cos 14x + \cos 4x = 1$$

$$\cos(9+5) + \cos(9-5) = 1$$

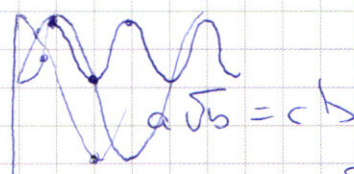
$$2\cos 9x \cos 5x = 1$$

$$\sin^2 x' = 2\sin x \cos x$$

$$\cos^2 x' = 2\cos x (\sin x)$$

$$4\sin 14x + 2\sin 4x = 0 \quad g'(f(x)) = g'$$

$$2\sin 14x = -\sin 4x$$



$$a = c\sqrt{b}$$

$$a^2 = c^2 b$$

$$\sin^2 x' = 2\cos x$$

$$a = -b$$

$$a^2 = b^2$$

$$a = b$$

$$(x+3)^2 = (x+3)$$

$$(x^2)^2 = 2x^2$$

$$x^2 = 2x$$

