

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 0
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ✓ 7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

$$8-3H \quad 9261 = 9 \cdot 169 = 9 \cdot 13 \cdot 13 \quad \textcircled{1}$$

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x - \cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \\ + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x &= 0 \end{aligned}$$

$$cd - ab - d + b - \sqrt{2}c + bc + ad = 0$$

$$+ a(a-b) - (d-b) + cd - \sqrt{2}c + bc = 0$$

$$(a-b)(a+b)$$

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$(a-b)(b-d)$$

$$cd + bc + ad + b = ab + d + \sqrt{2}c$$

$$-\sin 5x(\sin 4x - 1) + \cos 5x(\sin 4x - 1)$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sin 4x - 1) + \cos 4x \cos 5x +$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sin 4x - 1) + \cos 4x(\cos 5x + \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 4x - 1 \quad \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$-(\cos 2x - \sin 2x)^2$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 26 \\ \underline{18} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 13} \\ \underline{343} \\ 26 \\ \underline{26} \\ 83 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 343 \cdot 3 = \cancel{9 \cdot 343} \cdot 9 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 =$$

$$= 3^3 \cdot 7^3, \text{ значим возможные}$$

цифры числа ~~1; 3; 7; 9~~ $1; 3; 7; 9$, остальные не могут входить в состав из соображений делимости.

В числе три семерки,
и либо три тройки, либо тройка
и девятка,
остальные цифры единицы.

Итак, цифры: $\{1; 1; 1; 7; 7; 7; 3; 9\}$

или $\{1; 1; 7; 7; 7; 3; 3; 3\}$

$$S = S_1 + S_2 = \cancel{1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

Всего

соответствий

$$= 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 2 + 4 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 1 =$$

$$= 56 \cdot 2 \cdot 10 + 20 \cdot 28 = 1120 + 560 =$$

$$= 1680 \text{ (чисел)}$$

Ответ: 1680 чисел.

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x = 0$$

$$\cancel{\cos 5x \cos 4x + \sin 4x - 1} - \cancel{\sin 5x (\sin 4x - 1)} - \cos 4x - 1 - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos 5x (\sin 4x - 1) - \sin 5x (\sin 4x - 1) + \cos 5x \cos 4x + \sin 5x \cos 4x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$(\sin 4x - 1)(\cos 5x - \sin 5x) + \cos 4x(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$2 \sin 2x \cos 2x - \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$\downarrow$$

$$\cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$\downarrow$$

$$-(\cos 2x - \sin 2x)^2$$

$$\downarrow$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) - (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\cos 5x - \sin 5x) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\cancel{\cos 2x \cos 5x + \cos 2x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x - \sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x \cos 5x + \cos 2x \sin 5x + \sin 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x} = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$2 \sin 2x \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\cos 2x \cos 5x + \cos 2x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x + 2 \sin 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x - \sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x \cos 5x - 2 \sin 2x \sin 5x = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad || : \cos 2x$$

$$2 \sin 7x - \frac{1}{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1 = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$$

$$4 \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\tan 2x = 1$$

$$4 \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

~~2x =~~

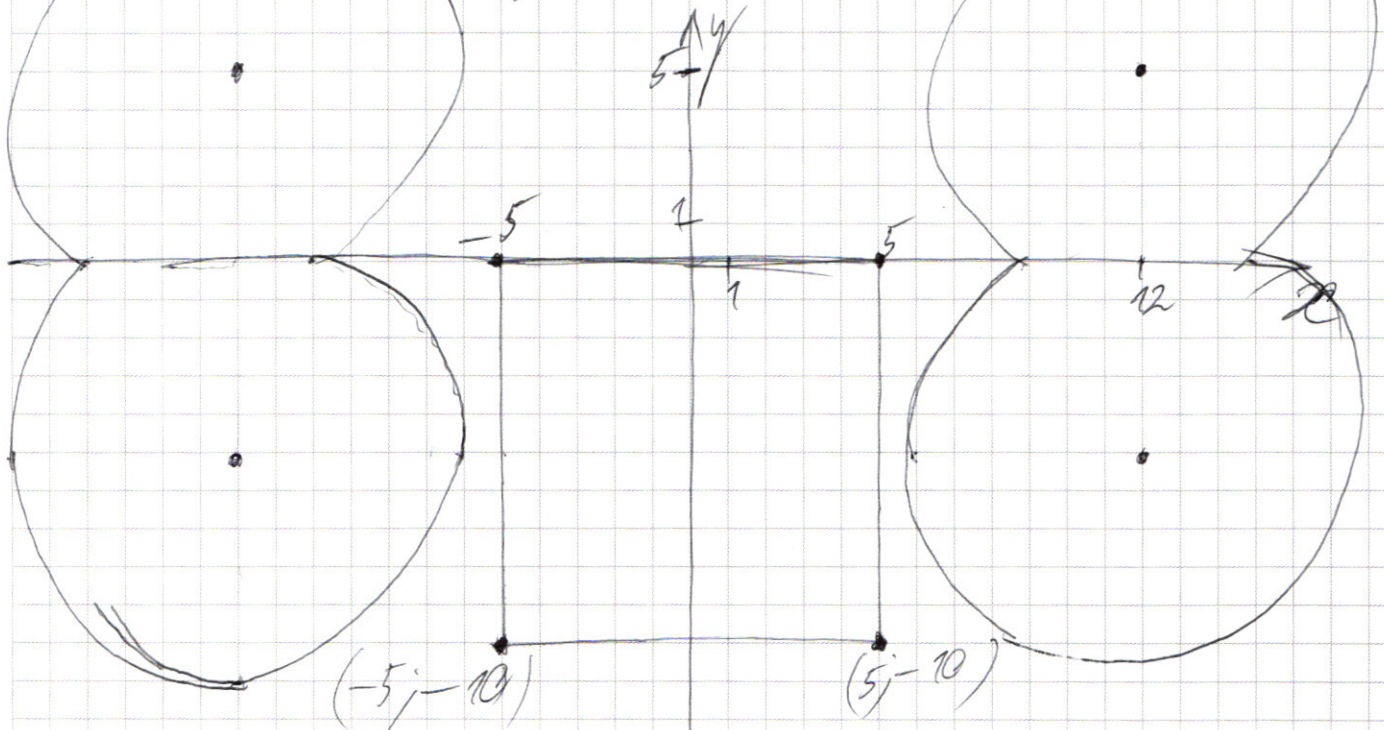
№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

раскрывая модуль по знакам
получаем графики в виде ромбов с вершинами $(5;0); (-5;0); (5;-10); (-5;-10)$

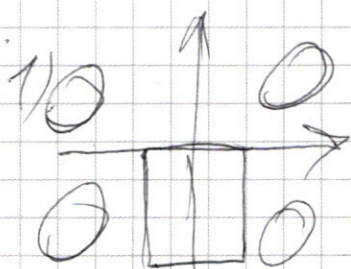
~~но эти графики представляют собой часть окружности в первой координатной четверти, отрезанный на все 4-е четверти, промен Окр $(5;12)$ $r = \sqrt{a}$~~

Построим:

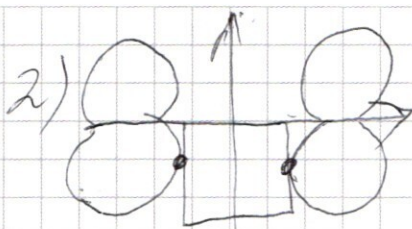


будем увеличивать a от нуля, и схематично рисуем изрезки:

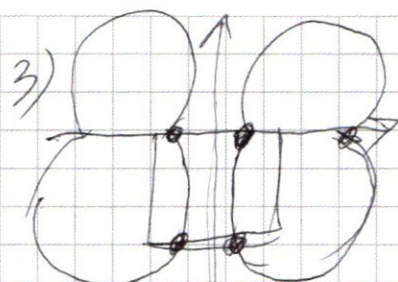
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



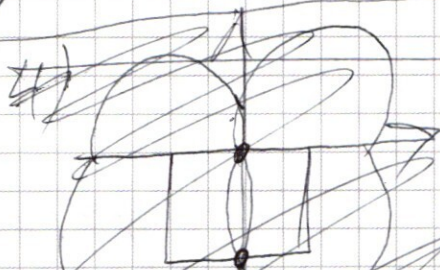
нет касания
 $a < 49$
0 решений



касание
 $a = 49$
1 решение



пересечение
 $a > 49; a \leq 144$
4 решения



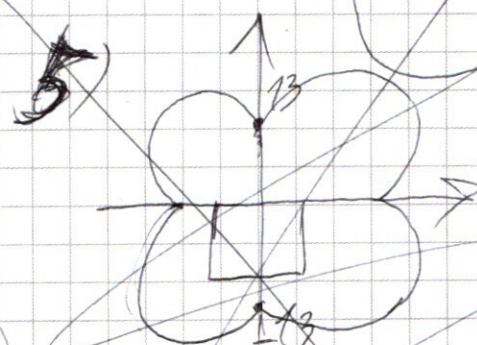
2 решения
 $a = 144$



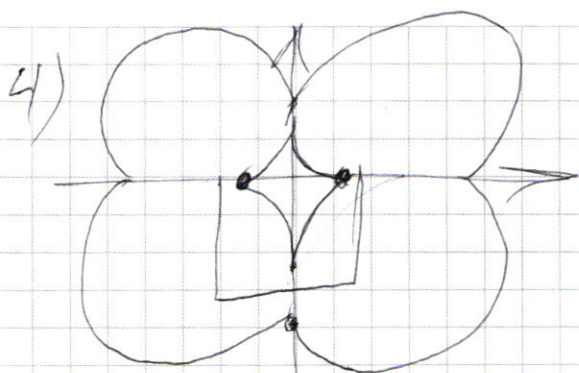
4 решения
 $a > 144; a \leq 169$



нет решений
или одно (х=0)
 $a > 169$
при $a = 13^2$
Ответ: $a \in$



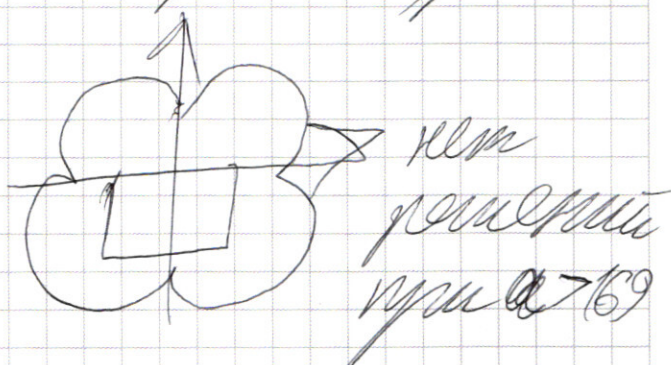
2 решения
 $a > 144; a \leq 169$



2 решения
при $a > 144$;
 $a < 169$

5) при $a = 169$
одно решение
 ~~$x=0; y=0$~~

6)



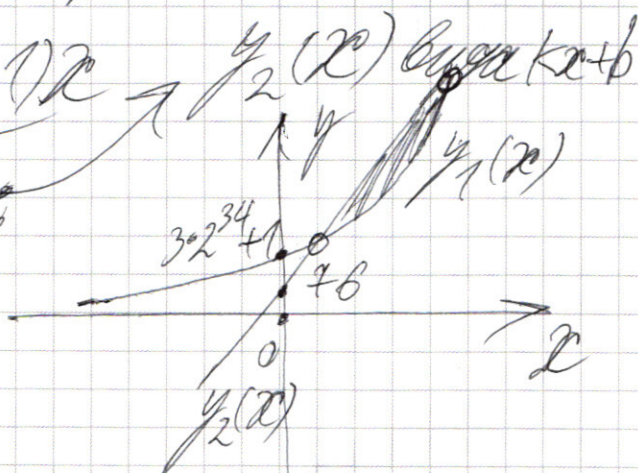
нет
решений
при $a > 169$

Ответ: $a \in (144; 169) \cup \{49\}$.

№7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \rightarrow y_1(x) \text{ вида } a^x + b \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \rightarrow y_2(x) \text{ вида } kx + b \end{cases}$$

График:



Находим решения $y_1 = y_2$

$x = 6$ — они пересекаются
 $x = 38$ — они расходятся

для каждого целого x из $(6; 38)$ найдем соответствующие y , для $x = x_0$ найдем y :

$$S_{x_0} = 76 + 2^{33}x_0 - 2x_0 - 2^{x_0} - 3 \cdot 2^{34} = (76 - 3 \cdot 2^{34}) + 2^{33}x_0 - 2x_0 - 2^{x_0}$$

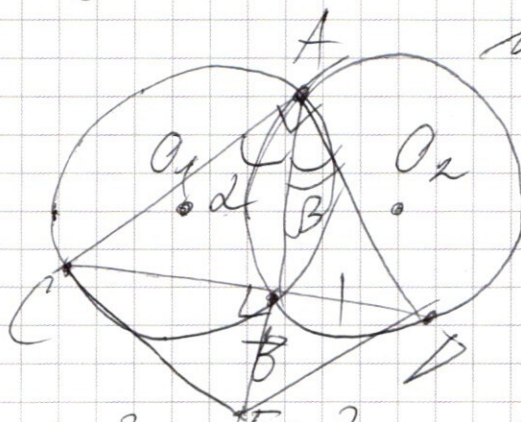
Сумма всех решений: $S = S_7 + S_8 + S_9 + \dots + S_{37}$

$$\begin{aligned} &= 31(76 - 3 \cdot 2^{34}) + 2^{33} \cdot (7 + 8 + \dots + 37) - 2(7 + 8 + \dots + 37) - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{37}) \\ &= 2356 - 93 \cdot 2^{34} + 2^{33} \cdot \frac{(37+7) \cdot 31}{2} - (37+7) \cdot 31 - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{37}) = \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 &= 2356 - 93 \cdot 2^{34} + 2^{33} \cdot 682 - 1364 - 2^7 \cdot (2^{31} - 1) = \\
 &= 992 + 2^{34} (\cancel{682} - 93) - 2^{38} + 2^7 = \\
 &= 1120 + 248 \cdot 2^{34} - 2^{38} = 1120 + (248 - 16) 2^{34} = \\
 &= 1120 + 232 \cdot 2^{34} = 29 \cdot 2^{37} + 1120
 \end{aligned}$$

Ответ: $29 \cdot 2^{37} + 1120$ пар.



$$\begin{aligned}
 1) \quad &\angle \alpha + \angle \beta = 90^\circ \\
 &2\angle \alpha + 2\angle \beta = 180^\circ \\
 2) \quad &\angle BDC = 2\angle \alpha \\
 &\angle BDC = 2\angle \beta
 \end{aligned}$$

$$BC^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 2\alpha$$

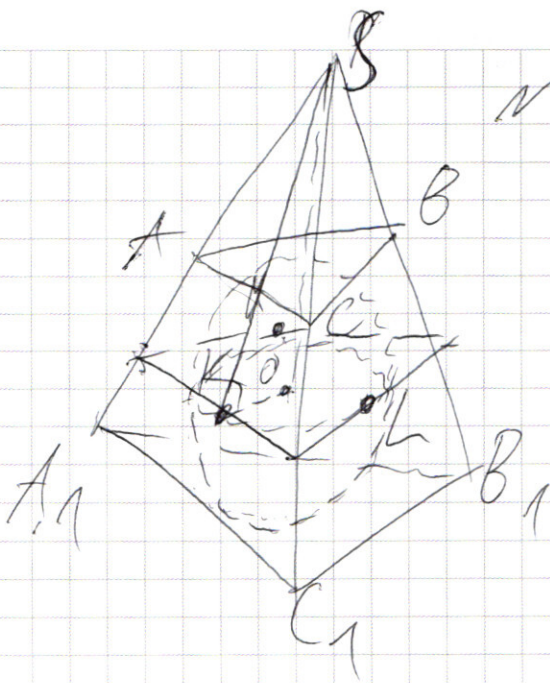
$$BD^2 = 2r^2 - 2r^2 \cos 2\beta$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad CF^2 &= CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 = 4r^2 - 2r^2 (\cos 2\alpha + \cos 2\beta) = \\
 &= 4r^2 = 400
 \end{aligned}$$

т.к. $\cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0$
или $2\alpha = 180^\circ - 2\beta$

$$CF = 20$$

Ответ: $CF = 20$



$h=4$

1) Из того, что плоскости кас. сферы ~~параллельны~~ пер-нм SO , а KLM - пер-н. SO , из того что сфера вписана в трех-

гранный угол, то $(KLM) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$

2) т.к. O - центр. окр., то

$$\rho(ABC; KLM) = \rho(A_1B_1C_1; KLM) = r$$

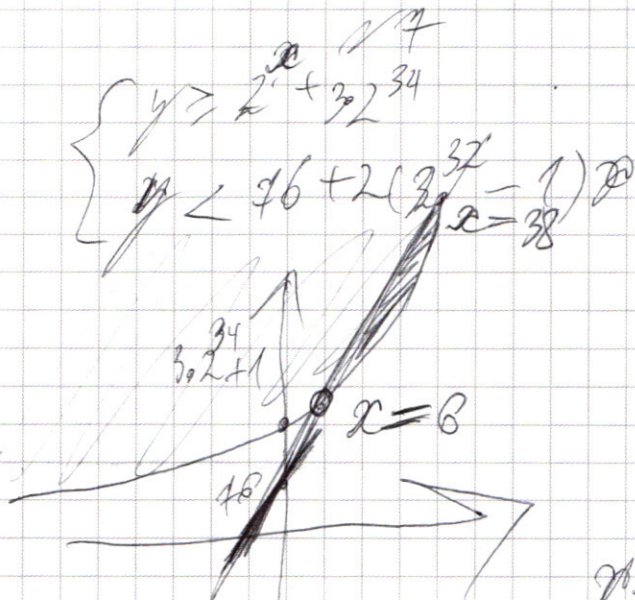
3) ~~Из интегральной др.~~

4) Из формулы объема усеченной пирамиды: $V = \frac{1}{3}h(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)$

Мы получили формулу для площади сечения ~~среднего~~ ~~середн.~~ проходящего через середину высоты усеченной пирамиды: $S_{\text{сеч.}} = S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2$

5) Из того, что $(KLM) \parallel (ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, $S_{KLM} = 1 + 16 + 4 = 21$

$$\angle KSO = \arctg\left(\frac{2}{4}\right) = \arctg \frac{1}{2} \quad \text{Ответ: } S_{KLM} = 21, \angle KSO = \arctg \frac{1}{2}.$$



$$2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x(2^{33} - 2) + 76$$

$$x = 6$$

$$3(2^{34} - 4) + 76 = 3 \cdot 2^{34} + 64$$

$$2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 3 \cdot 2^{34} + 64$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = x(2^{33} - 2) + 76$$

$$2^{33}x + (76 - 2x)$$

$$x = 38$$

$$2x = 76$$

$$x = 38$$

$$x = 38$$

$$2^{33} + 6 \cdot 2^{33} = 2^{33} \cdot 33 + (76 - 76)$$

$$2^{19}(1 + 3 \cdot 2^{15}) = 2^{33} \cdot 19 + 38$$

$$2^{19}(4 + 3 \cdot 2^{15}) =$$

$$2^{34}(1 + 3) = 34 \cdot 2^{34} + 8$$

$$(x - 34 + 3) = \frac{x}{2}$$

$$2(x - 31) = x$$

$$2(2^{x-34} + 3) = x$$

$$x = 62$$

$$2^{x-33} + 6 = x$$

$$x = 38$$

$$(2^{62} + 3 \cdot 2^{34}) = 62 \cdot 2^{33} + (76 - 62 \cdot 2)$$

$$2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 38(2^{33} - 2) + 76$$

$$2^{34}(2^4 + 3) = 38 \cdot 19 \cdot 2^{34} - 76 + 76$$

$$2^{34} \cdot 19 = 2^{34} \cdot 19$$

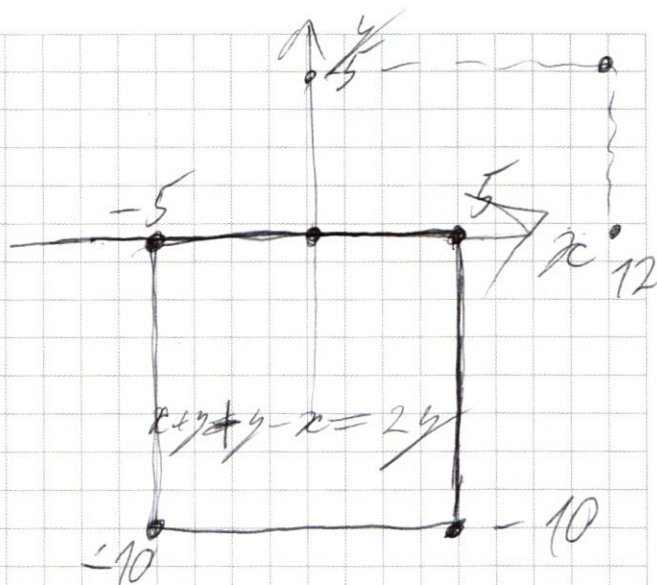
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

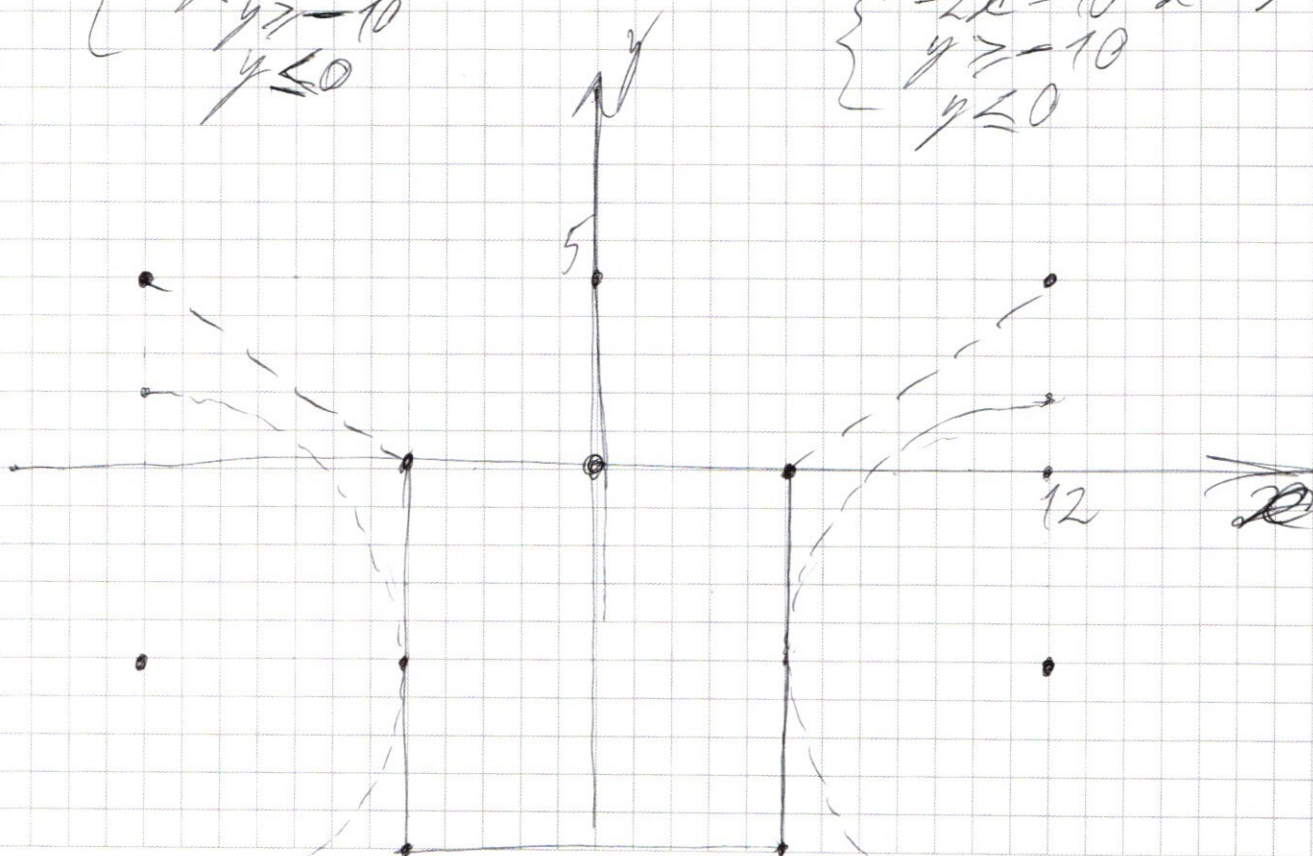
$$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 25$$

$$1) \begin{cases} x+y+5+y-x+5=10 \\ x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ xy=0 \\ x \geq -5 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x+y+5+x-y-5=10 \\ x+y \geq -5 \\ y-x \leq -5 \\ x=5 \\ y \geq -10 \\ y \leq 0 \end{cases}$$



$$3) \begin{cases} y-x+5-x-y-5=10 \\ y-x \geq -5 \\ x+y \leq -5 \\ -2x=10 \quad x=-5 \\ y \geq -10 \\ y \leq 0 \end{cases}$$





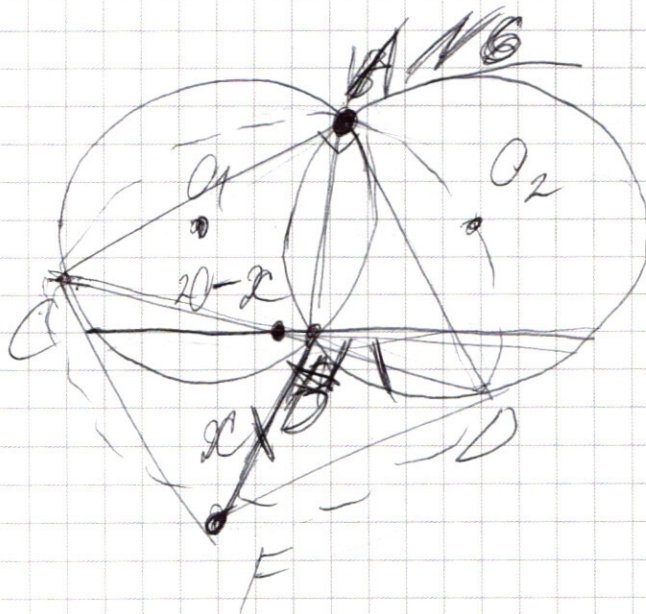
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$$CF^2 = 400 - 40x + x^2 + x^2 =$$

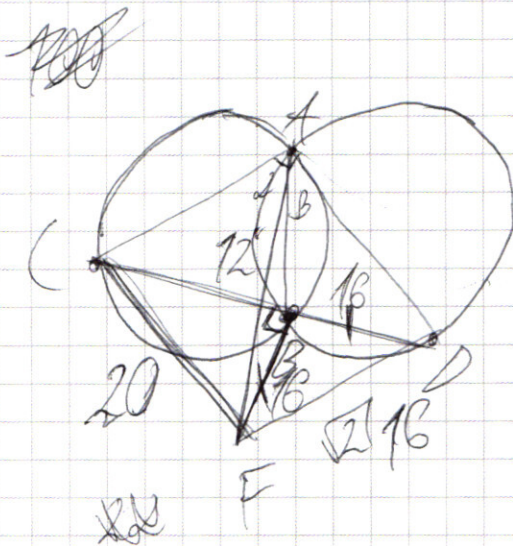
$$= 2x^2 - 40x + 400$$

$$CF = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$$

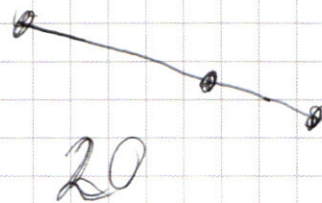
$$CF = \sqrt{2(x^2 - 20x + 200)} =$$

$$CF = \sqrt{2(x - 10)^2 + 400}$$

$$=$$



$$r = 10$$



$$CB^2 = 100 + 100 - 200 \cos 2\alpha \quad BD^2 = 100 + 100 - 200 \cos \beta$$

$$CB^2 + BD^2 = 400 - 200(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) =$$

$$= 400 - 200(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha - \cos^2 \beta + \sin^2 \beta) = 400$$

$$144 = 200 - 200 \cos 2\alpha \quad CF = 20$$

$$56 = 200 \cos 2\alpha$$

$$256; 2^8 \cdot 16^2$$

$$512 = 2^9 = \sqrt{10}$$

$$\begin{array}{r} 2^8 \cdot 28 \\ \times 28 \\ \hline 224 \\ + 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$400 + 512$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

$$2\alpha + 2\beta = 180^\circ$$

$$2\beta = 180^\circ - 2\alpha$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

12

$$(\cos 5x - \sin 5x)(-(\cos 2x - \sin 2x)^2) + (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) \cdot (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = 0$$

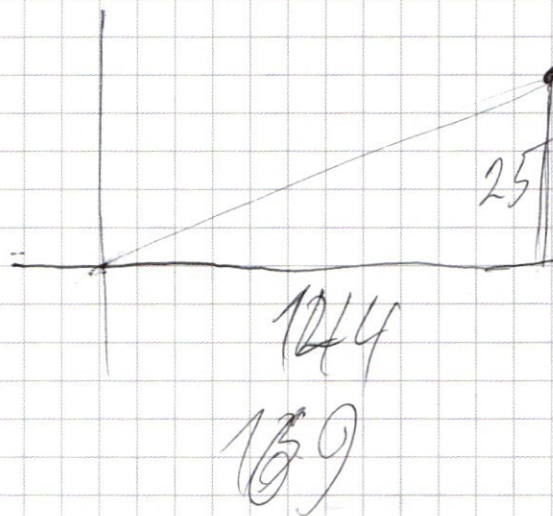
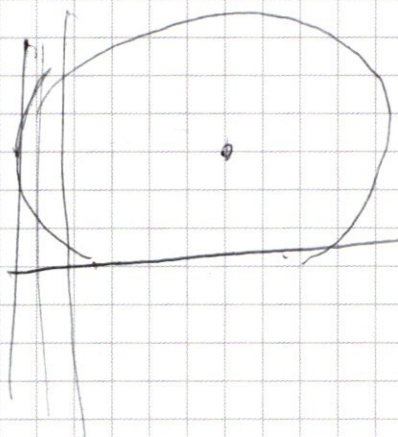
$$(\cos 2x - \sin 2x)((\cos 2x + \sin 2x)(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 5x - \sin 5x)) = 0$$

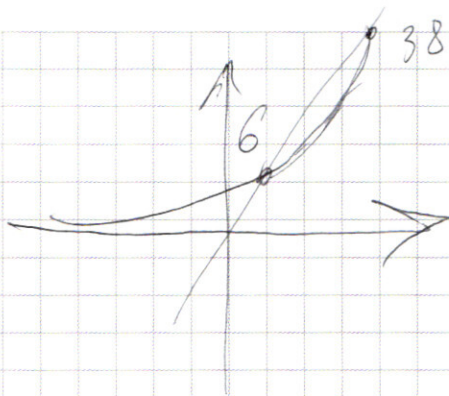
$$(\cos 2x \cos 5x + \cos 2x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 2x + \sin 2x \cos 5x + \sin 2x \sin 5x - \sqrt{2} \sin 2x - \cos 2x \cos 5x + \cos 2x \sin 5x + \sin 2x \cos 5x - \sin 2x \sin 5x) = 0$$

$$2 \cos 2x \sin 5x + 2 \sin 2x \cos 5x - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0$$

$$2 \sin 7x = \frac{1}{2} \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$4 \sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$





$$x = 7$$

$$y > 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$$

1 2

$$y < 46 + 2^{33} \cdot 4 - 14$$

~~782~~

$$y > 6 \cdot 2^{33} + 128$$

$$31 \cdot 46 =$$

$$7 \cdot 2^{33} + 62$$

=

$$S_{46} = 46 + 2^{33}x - 2x - 2^x - 6 \cdot 2^{33} =$$

$$= (x - 6) \cdot 2^{33} + (46 - 2x - 2^x)$$

$$\begin{array}{r} \times 46 \\ 31 \\ \hline 128 \\ + 46 \\ \hline 228 \\ \hline 2356 \end{array}$$

$$S_{37} = (1 + 2 + \dots + 37) \cdot 2^{33} + 31 \cdot 46 - 2(1 + \dots + 37) - (2^1 + \dots + 2^{37}) =$$

$$= (1 + 2 + \dots + 37) \cdot 2^{33} + 2956 - 1364 - (2^1 + \dots + 2^{37}) =$$

$$= 496 \cdot 2^{33} + 992 - 2^7(2^{31} - 1) = 496 \cdot 2^{33} - 2^{38} + 2^7 + 992 =$$

$$= 1120 + 2^{33}(496 - 2^5) = 1120 + 2^{33}(496 - 32) + \dots + 37$$

$$= 1120 + 2^{33} \cdot 464 =$$

$$128 + 256 + \dots + 2^{37} = 2^{37} \cdot 29 + 1120$$

$$(7 + 37) \cdot 31 =$$

$$q = 2$$

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16$$

$$1:1$$

$$2:3$$

$$3:4$$

$$4:15$$

$$5:31$$

$$S_{n+1} - S_n = b_1 q^n$$

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}$$

$$\begin{array}{r} 232 \\ \times 18 \\ \hline 368 \\ + 2320 \\ \hline 4176 \end{array}$$

$$= \frac{44}{2} \cdot 31 = 22 \cdot 31$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 22 \\ \hline 62 \\ + 682 \\ \hline 744 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 341 \\ - 93 \\ \hline 248 \end{array}$$

$$2(2^4 - 1) = 32 - 2$$

$$\frac{31(32)}{2} =$$

$$\begin{array}{r} 248 \\ \times 16 \\ \hline 3968 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \cdot 16 \\ \times 10 \\ \hline 2900 \\ + 2900 \\ \hline 5800 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 31 \\ 16 \\ \hline 496 \end{array}$$