

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ]

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

1) Разложим число 9261 на простые множители: $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, т.е. в восьмизначном числе должны присутствовать 3-ри тройки и три семерки. Все остальные ^{цифры} ~~числа~~ восьмизначного числа должны равняться 1, поскольку иначе или среди них будет либо цифра 0 либо цифра, большая чем 1, но произведение цифр данного восьмизначного числа будет либо равняться нулю либо числу, большему чем 9261.

2) Составим, удовлетворяющее условию ~~ча~~ восьмизначное число: 1. выберем из 8-ми мест три (это можно сделать C_8^3 способами) и ~~остав~~ поставим на них цифры 3.

2. выберем ещё 3-и места под цифры 7 (C_5^3 способов), остальные места будут под цифрой 1. Всего ~~возможных~~ таких восьмизначных чисел: $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} \cdot \frac{5!}{2! \cdot 3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 8 = 70 \cdot 8 = 560$.

Ответ: 560

№2

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ -2 \sin(7x) \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x &= \sqrt{2} \cos 4x \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) &= \sqrt{2} \cos 4x \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) &= \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) \\ (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) &= 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = \sin 2x & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) & (2) \end{cases}$$

$$(1) \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right) = 0 \cdot (-1)$$

$$\sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{\pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | + \frac{\pi}{4}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad | : 2$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) 2 \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2 \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0 & (2.1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0 & (2.2) \end{cases}$$

$$(2.1) \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | + \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | \cdot \frac{2}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$(2.2) \cos\left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi t, t \in \mathbb{Z} \quad | - \frac{\pi}{8}$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} + \pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi t, t \in \mathbb{Z} \quad | \cdot \frac{2}{9}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi t, t \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \left\{ \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n, \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi k, \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi t \right\}, n, k, t \in \mathbb{Z}$$

✓✓

Дано:

$$S_1 = 1 = S_{ABCD}$$

$$S_2 = 16 = S_{ABCD}$$

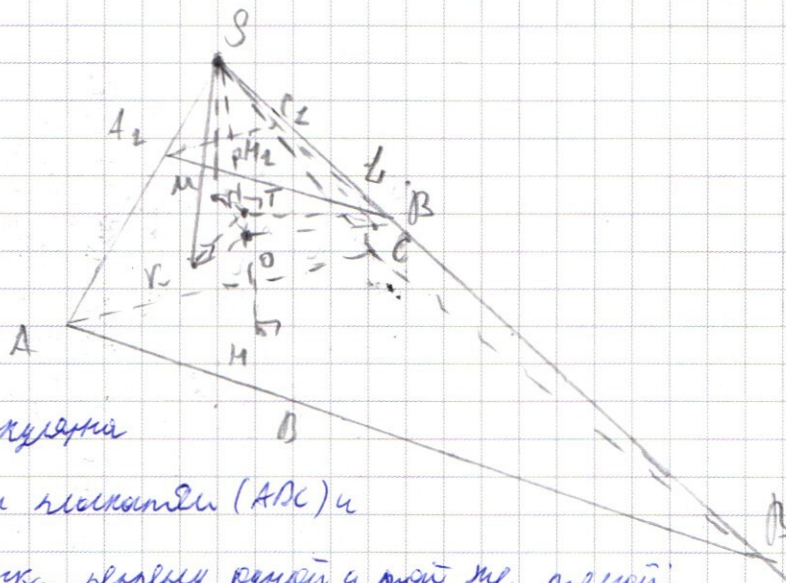
Найти:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

с КСО - ?

$S_{\text{ср}} - ?$

Решение:



1) Поскольку SO перпендикулярна

плоскостям касательным сфере касаниям (ABC) и

$(A_1B_1C_1)$ $\Rightarrow$ по св-ву пл-ей, перпен. одной и той же прямой:

$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$, а м.к. пирамиды $SA_1B_1C_1$ и $SABC$ имеют одну и ту же треугольную форму $\Rightarrow$ пер. $SA_1B_1C_1$ подобны $SABC$, $K =$

$$= \sqrt{\frac{S_1}{S_2}} = \frac{1}{4}$$

2) Доп. построение: $SO \cap (ABC) = K$, $SO \cap (A_1B_1C_1) = L$; $OM, OK, OL \Rightarrow$
 $\Rightarrow SK \perp OK, SM \perp OM, SL \perp OL$ (м.к. OK, OM, OL - радиусы провед. в м.кас.) $\Rightarrow \Delta SKO = \Delta SMO = \Delta SLO$ (по ш. и кат.),

3) Пусть радиус сферы равен R , а $SK_1 = x$. м.к. $SO \perp (ABC)$ и $SO \perp (A_1B_1C_1)$
 $\Rightarrow SK = 2R + x \Rightarrow \frac{SK_1}{SK} = K \Rightarrow \frac{x}{x + 2R} = \frac{1}{4} \Rightarrow 4x = x + 2R \Rightarrow x = \frac{2R}{3}$

В ΔKSO (α/γ): $KO = R \Rightarrow \sin \angle KSO = \frac{R}{x + R} = \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

$$4) \frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = K^3; \frac{V_{SA_1B_1C_1}}{V_{SABC}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{S_1}{S_2} = \frac{SK_1}{SK}$$

$$V_{SABC} = \frac{1}{3} S_2 \cdot SK$$

№5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-2)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases} \quad (*)$$

1) Пусть $a \geq 0$: $\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ |x| = 2 \\ |y| = 5 \end{cases}$ ~~$x=2$~~ $\Rightarrow y=5$

$$2+5+5+|2-5+5|=$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$$

$$2+5+5+|2-5+5|=10$$

$$x=2$$

$$y=-5$$

$$2+5+5+|-2-5+5|=10$$

$\Rightarrow \emptyset$ $a \geq 0$ - не подходит

$$x=-2$$

$$y=5$$

$$2+5+5+|-2-5+5|=10$$

$$x=-2$$

$$y=5$$

$$|-2+5+5| + |-5+2+5| = 10$$

2) Пусть $a > 0$

2.1) $(x-2)^2 + (y-5)^2 = a$ - график окр., с центром $(2, 5)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$ (W_1)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

2.2) $(x-2)^2 + (y+5)^2 = a$ - график окр., с центром $(2, -5)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$ (W_2)

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

2.3) $(x+2)^2 + (y+5)^2 = a$ - график окр., с центром $(-2, -5)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$ (W_3)

$$\begin{cases} x < 0 \\ y < 0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.4) $\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 = a \\ x < 0 \\ y > 0 \end{cases}$ - график окр. с центром $(-2, 5)$ и радиусом $R = \sqrt{a}$ (W_4)

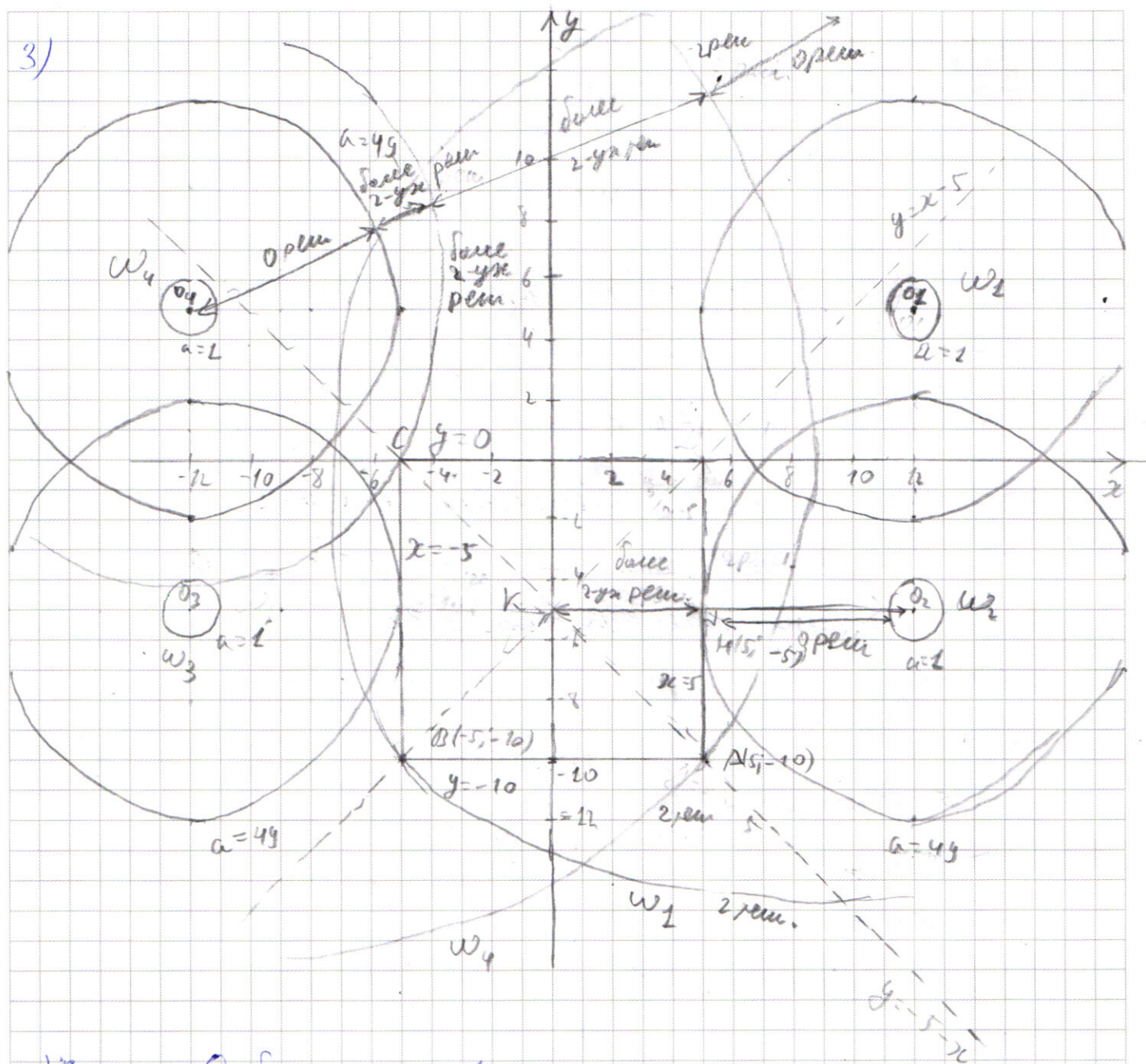
2.5) $\begin{cases} y \geq x-5 & \text{— л. прямая, пересек. с осью: } x=5, y=0 \\ y \geq -5-x & \text{— л. прямая, } \begin{array}{c|c} x & y \\ \hline 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{array} \\ y=0 & \text{— график окр. прямая } \parallel \text{ } OX \end{cases}$ $y = \frac{5}{2} = x \geq 0$

2.6) $\begin{cases} y \leq x-5 \\ y \leq -5-x \\ y = -5 & \text{— график прямой } \parallel OX \end{cases}$

2.7) $\begin{cases} y \geq x-5 \\ y \leq -5-x \\ x = -5 & \text{— л. прямая } \parallel OY \end{cases}$

2.8) $\begin{cases} y \leq x-5 \\ y \geq -5-x \\ x = 5 & \text{— л. прямая } \parallel OY \end{cases}$

3/



4) Система Φ будет иметь два решения когда окр. ω_3 и ω_2 кас. прямым $x = -5$ и $x = 5$ и когда окружности ω_3 и ω_2 не пересекают квадрат $ABCD$ квадрат $ABCD$, а ω_1 и ω_4 пересекают квадрат $ABCD$ в т. B и A соответственно.

В первом случае радиус ω_2 $O_2 K \perp x=5$; $K(5, -5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \sqrt{r^2} \text{ т.к. } O_2(12, -5) \Rightarrow a = \sqrt{(12-5)^2} = 49 \text{ (аналогично для } \omega_3)$$

Во втором случае: $a = \sqrt{r^2(O_2(12, -5); B(-5, -10))} = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{289 + 25} = \sqrt{314} = 17.72$ (аналогично для ω_3)

ω_4 равно 514 т.к. окр. ω_1 и ω_2 — симметричны относительно

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~начала координат O и сторон квадрата $ABCD$ (точка пересечения диагоналей))~~

Ответ: $\cos \alpha \in \{49, 5, 24\}$

(Δ)

4) Доп. вып. $\angle T_1 \perp SO$, $\angle T_2 \perp SO$, $\angle T_3 \perp SO$. Т.к. $\angle OKS = \angle OLS = \angle OMS$

$\Rightarrow$ высоты KT_1 , KT_2 и KT_3 равны $\Rightarrow OT_1 = OT_2 = OT_3$

т.к. $\angle SOP = \angle SOK = \angle SOM \Rightarrow OT_1 = OT_2 = OT_3 \Rightarrow$ высоты KT_1 , KT_2 , KT_3

пересекаются в одной точке $T \Rightarrow$ плоскость $(KLM) \perp SO \Rightarrow$ по с-у

двух плоск., перпен. одной и той же прямой: $(KLM) \parallel (ABC)$,

$(KLM) \parallel (A_1B_1C_1) \Rightarrow$ пирамида $SKLM$ подобна с вершиной S и

основанием, являющимся сечением трехгранного угла и плоскости

(KLM) подобна пирамиде $SA_1B_1C_1$ краем коэф.

подобия: $K' = \frac{SK}{ST}$ (ST — высота этой пирамиды), а.к.б.

Т.к. $\sin \angle KSO = \cos \angle KOS = \frac{3}{5}$ (по с-у трехгран. угла) $\Rightarrow TO =$

$= R \cos \angle KOS = \frac{3}{5} R \Rightarrow ST = SO - TO = R + x - \frac{3}{5} R = \frac{2}{5} R + x = R \left(\frac{2}{5} + \frac{x}{R} \right) =$

$= R \cdot \frac{26}{25} \Rightarrow K' = \frac{x}{\frac{26}{25} R} = \frac{2}{\frac{26}{25}} = \frac{2 \cdot 25}{26} = \frac{5}{13}$

5) $\frac{S_1}{S_{сеч}} = \frac{25}{64} \Rightarrow \boxed{S_{сеч} = \frac{64}{25} S_1 = \frac{64}{25} (25)} = 64$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right)$, $S_{сеч} = \frac{64}{25}$.

н.б.

Дано:

а) $R = 10$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$AB \cdot AC = 22$$

CF - ?

S_{ACF} - ?

Решение:

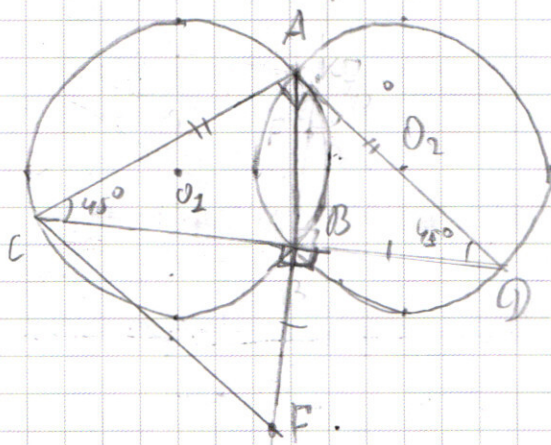
Дан. рисун. AD!

$\triangle ABC$ по т. синусов: $\frac{AB}{\sin \angle C} = 2R$. $\triangle ADC$ по т. синусов: $\frac{AB}{\sin \angle D} = 2R$

$$2R \Rightarrow \sin \angle C = \sin \angle D \Rightarrow \angle C = \angle D \Rightarrow \angle C = \angle D = 45^\circ \Rightarrow \triangle CAD -$$

-пр.т.; $\triangle$

2



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 3 \cdot 3087 = 9 \cdot 1029 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 26 \overline{) 10} \\ \underline{24} \\ 21 \overline{) 6} \\ \underline{21} \\ 6 \overline{) 24} \\ \underline{24} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} 19 \cdot 19 &= 290 + 19 \cdot 9 = 290 + \\ &+ 90 + 81 = 280 + 81 = 361 \\ \cancel{40} + \cancel{72} \end{aligned}$$

$$C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot C_3^1 \cdot (C_3^1)^1$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{28} \\ 63 \end{array}$$

$$C_8^3 \cdot C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 7}{8}$$

$$= 35 \cdot 2 \cdot 8 = 40 \cdot 8 = 560$$

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \\ \cos 1 &= 2 \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$7, 3, 7, 3, 7, 3, 7, 3$$

$$\sqrt{2} \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{x}{8} = \sin\left(9x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$= \frac{1}{22} \quad 2 \sin\left(\frac{7}{2}x\right) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$2 \sin(7x) \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$2 \sin(8x - x)$$

$$\cos(9x) - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$2 \sin(7x) (\cos 2x - \sin 2x) = \cos 4x \cdot 2$$

$$2 \sqrt{2} \sin 7x \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$2 \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} \cos\left(425x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\cos\left(9x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x$$

$$2 \cos(7x) \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 4x = \cos(7x - 3x)$$

