

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

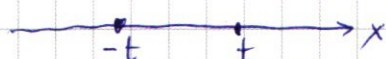
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.
$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$|x+(y+5)| + |(y+5)-x| = 10$

$y+5=t; f(x) = |t+x| + |t-x|$

$|t+x| + |t-x| = 10$



$t+x$	-	+	+
$t-x$	+	+	-

$$f(x) = \begin{cases} -x-t+t-x, & x \leq -t \\ x+t+t-x, & -t \leq x \leq t \\ x+t-t+x, & x \geq t \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x=10 \\ x \leq -y-5 \\ 2y+10 \leq 10 \\ -y-5 \leq x \leq y+5 \\ 2x=10 \\ x \geq y+5 \end{cases}$$

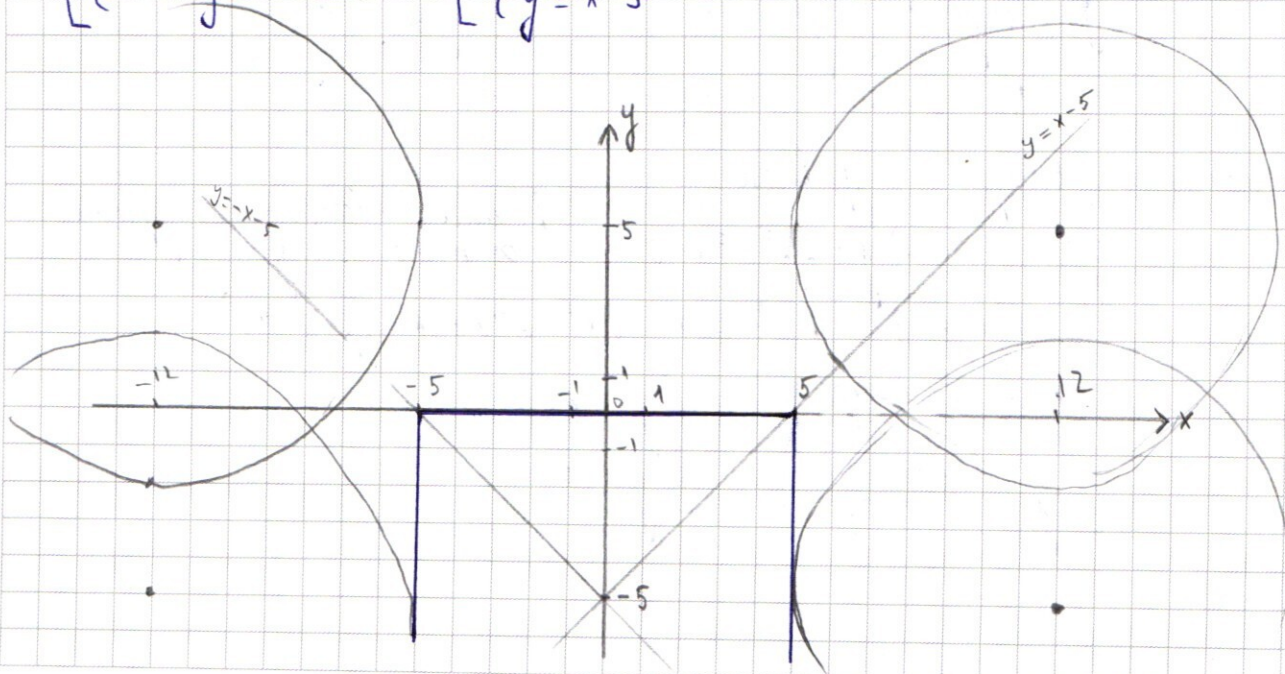
$$\begin{cases} x=-5 \\ y \leq -x-5 \\ y=0 \\ -5 \leq x \leq 5 \\ x=5 \\ y \leq x-5 \end{cases}$$

Рассмотрим второе ур-ние системы. Оно задает 4 симметрично расположенных ~~от начала координат~~ окружности, радиусы которых равны в зависимости от a .

Центрами этих окр-тей будут точки, имеющие координаты $(12; 5); (12; -5); (-12; -5); (-12; 5)$.

$$f(x) = \begin{cases} -2x, & x \leq -t \\ 2t, & -t \leq x \leq t \\ 2x, & x \geq t \end{cases}$$

Построим график:



Заметим, что окружности, расположенные выше оси Ox , не должны иметь общих точек с графиком $f(x)$, ведь тогда будет больше ^{решений} двух ~~корней~~ у системы.

Чтобы система имела ровно 2 решения, нужно, чтобы каждая из окружностей, расположенных ниже оси Ox , касалась графика. Так как они симметричны отн-ко оси Oy , то можно рассмотреть только одну из них и найти a .

Возьмем левую окружность с центром в $m(12; -5)$:

$$\begin{cases} x = 5 \end{cases}$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

$$49 + y^2 - 10|y| + 25 - a = 0$$

$$D = 100 - 4 \cdot 25 - 4 \cdot 49 + 4 \cdot a = 0$$

$$4 \cdot a = 4 \cdot 49 \Rightarrow a = 49.$$

Заметим, что при $a = 49$ $R = 7$ (радиус) и верхние окр-ти не касаются графика, т.е. система имеет ровно 2 решения.

Ответ: $a = 49$.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x+1})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases} (*)$$

Рассмотрим второе уравнение:

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

Решим квадратное уравнение отн-но y .

$$D = x^2 + 16 + 8x + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = 2x$

* Т.к. $x \neq 0$ мы можем на него
(или *) сокращать

$$(x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \left(\frac{2}{x^6} \right)}$$

$$-\ln(16x^6) \cdot \ln x = \ln(2x) \cdot \ln \left(\frac{2}{x^6} \right)$$

$$-\ln x (4\ln 2 + 6\ln x) = (\ln 2 + \ln x)(\ln 2 - 6\ln x)$$

$$-4\ln 2 \ln x - 6\ln^2 x = \ln^2 2 + \ln 2 \cdot \ln x - 6\ln 2 \cdot \ln x - 6\ln^2 x$$

$$\cancel{6\ln^2 x} \cdot \ln x = \ln^2 2$$

$$\ln x = \ln 2$$

$$\begin{matrix} x=2 & \text{усп. (*)} \\ y=2x=4 & \text{усп. (*)} \end{matrix}$$

2) $y = 4-x$

$$(x^2 \cdot (4-x)^4)^{-\ln x} = (4-x)^{\ln \left(\frac{4-x}{x^2} \right)}$$

$$-2\ln x \cdot (\ln x + 2\ln(4-x)) = \ln(4-x) \cdot (\ln(4-x) - 2\ln x)$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x \ln(4-x) = \ln^2(4-x) - 2\ln x \ln(4-x)$$

$$3\ln x \ln(4-x) = \ln^2(4-x) + 2\ln^2 x$$

$$2\ln x \ln(4-x) - 2\ln^2 x = \ln^2(4-x) - \ln x \ln(4-x)$$

$$(\ln(4-x) - \ln x)(\ln(4-x) - \ln x^2) = 0$$

$$\begin{cases} \ln(4-x) = \ln x \\ \ln(4-x) = \ln x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4-x = x \\ 4-x = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 & \text{усп. (*)} \\ x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} & \text{усп. (*)} \\ x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} & \text{не усп. (*)} \end{cases}$$

При $x=2$ $y=4-x=2$ усп. (*)

При $x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ $y = \frac{8+1-\sqrt{17}}{2} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ усп. (*)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{9-\sqrt{17}}{2} > 0 \\ 9 > \sqrt{17} \\ 81 > 17 \end{array} \right\}$$

Ответ: $(2; 4); (2; 2); \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$

№4. Дано: $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = 16$

Найти: 1) $\angle KSO$ - ?
2) S_{KLM} - ?

Решение: 1) плоскости (ABC) и $(A_1B_1C_1)$ - параллельны, тогда

$\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$ (по углам) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \angle C \cdot 2}{A_1C_1 \cdot B_1C_1 \cdot \sin \angle C} = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{16 B_1C_1}{BC} = \frac{BC}{B_1C_1} \Rightarrow BC^2 = (4 B_1C_1)^2 \Rightarrow BC = 4 B_1C_1.$$

Аналогично, $AC = 4 A_1C_1$ и $AH = 4 A_1H_1$ (из подобия $\triangle$ -ков).

$$\triangle SA_1H_1 \sim \triangle SAH \text{ (по углам)} \Rightarrow \frac{SH_1}{A_1H_1} = \frac{SH_1 + 2R}{AH} = \frac{SH_1 + 2R}{4A_1H_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4SH_1 = SH_1 + 2R \Rightarrow SH_1 = \frac{2}{3}R.$$

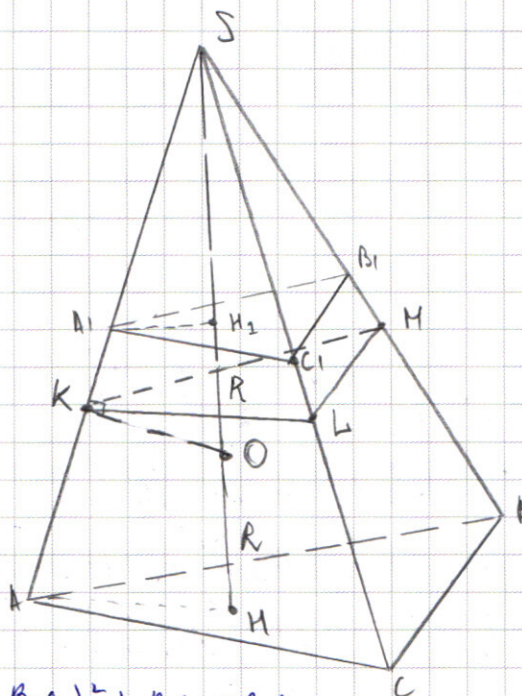
$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{SH_1 + R} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}.$$

2) $SK = SL = SM$ (как отрезки касательных проведенных из одной точки)

$$SK = SO \cdot \cos \angle KSO$$

$$(\angle KSO - острый) \Rightarrow \cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$SK = \frac{5}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot R = \frac{4}{3}R$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$n2 \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$(\sin 9x + \sin 5x) + (\cos 9x - \cos 5x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \cdot \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 4x$$

$$\sin 7x \cdot (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x = \sqrt{2} \cdot \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + x + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi - \frac{\pi}{4} - x + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, & n \in \mathbb{Z} \\ 8x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$6x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

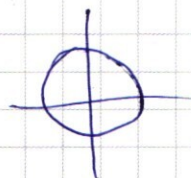
$$8x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{3\pi}{32} + \frac{\pi k}{4}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{8} + n \right), & n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{8} + k \right), & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \left(\frac{3}{8} + k \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$



1. Проверка цифр равно 9261.

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$, т.е. три цифры обязательно будут 7-ками,
(если среди цифр нет 0)

Оставшиеся 5 цифр равны при перемножении
равно $3^3 = 27$.

Это: 1) либо три 3 и две 1

2) либо одна 3, одна 9 и три единицы.

Посчитаем кол-во таких чисел:

1) ----- Выбираем 2 из 5 мест для единиц $C_2^5 = \frac{5!}{3!2!} =$
 $= \frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ на оставшиеся места ставим тройки.
способов

2) Выбираем 1 из 5 мест для тройки, одно из 4 оставшихся
для 9, на остальные три ставим единицы
 $5 \cdot 4 = 20$ способов

Всего таких 8-значных чисел

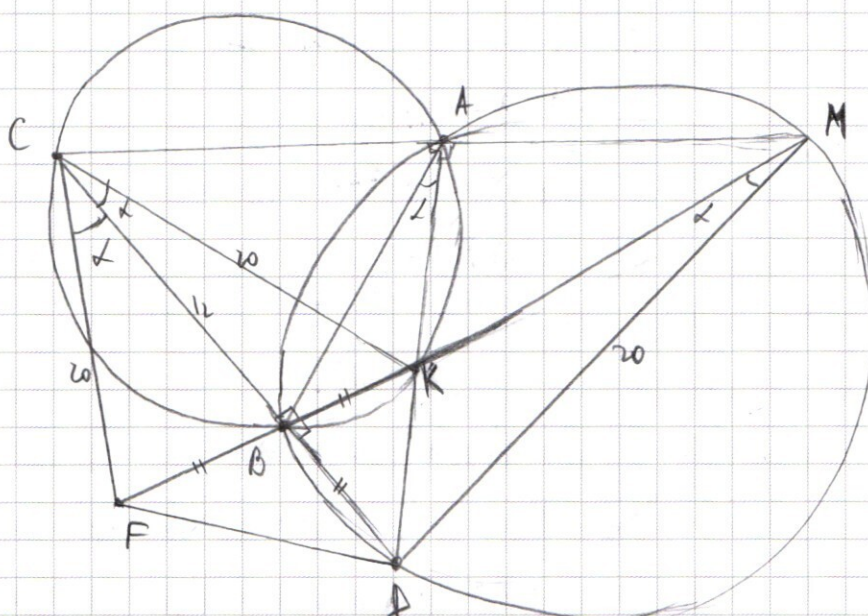
$$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot (10 + 20) = 336 \cdot 30 = 10080$$

↑
Выбираем три места из восьми для семерок.

Ответ: 10080.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6
 $R=10$
 $\angle CAD=90^\circ$
 $BC=12$



1) DM и CK - диаметры, т.к. на них опираются углы по 90° .

Пусть $\angle FMD = \alpha$. $\angle BAD = \angle FMD = \alpha$ (т.к. опир. на одну дугу).

$\angle KAB = \angle KCB = \alpha$ (т.к. опир. на одну дугу). $\Rightarrow$

В $\triangle CKB$ и $\triangle MVB$: $\angle BCK = \angle BMD = \alpha$; $MB = CK = 2R = 20 \Rightarrow \triangle CKB = \triangle MVB \Rightarrow$
(по гипотенузе и остр. углу).

$\Rightarrow CB = MB$; $BK = BD$. Тогда в $\triangle FCK$

высота CB явл-ся медианой $\Rightarrow \triangle FCK - \text{равнобедренный} \Rightarrow FC = CK = 2R = 20$.

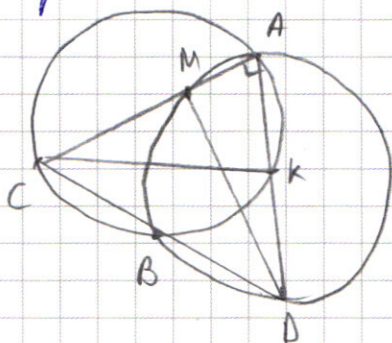
2) CB - также и биссектриса $\Rightarrow \angle FCB = \alpha$. Из $\triangle CKB$: $\cos \alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$, (т.к. α - острый) $\Rightarrow \frac{BK}{CK} = \frac{4}{5} \Rightarrow BK = \frac{4 \cdot 20}{5} = 16$.

Но тогда $BM = BK + KM = 16 + KM = BC = 12$, что невозможно.

Значит, экр-ты расположены по-другому.

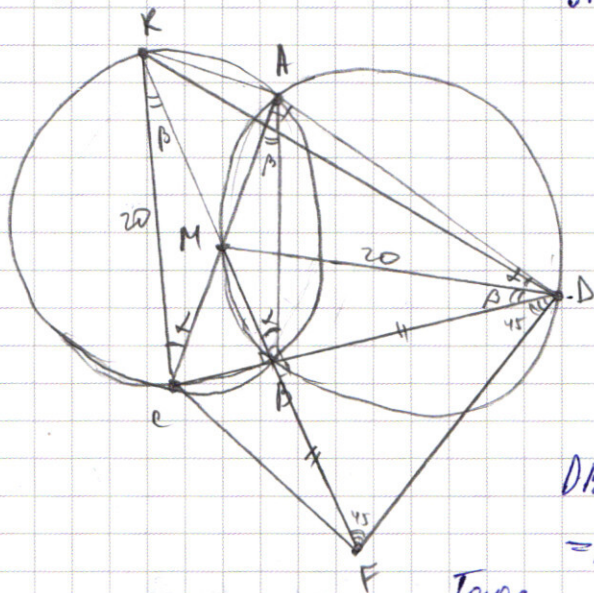
1 случай)



$\angle CAD = 90^\circ \Rightarrow DM$ и CK - диаметры.

Но тогда $\perp$ -р. проведенный к CD , должен пройти $т. M$ и $т. K$, что возможно только если они совпадают, но тогда окр-ти касаются в одной точке $\Rightarrow$ невозм.

2 случай)



$DM = CK = 20$ - диаметры

$\angle DAB = \angle DMB$

$\triangle KDC = \triangle DBM$ (по гип. и ост. углу) $\Rightarrow$

$KB = DB = FB \Rightarrow DKF$ - $\triangle$ и $DK = DF$.

DB - высота, медиана и биссектриса.

$DB = \frac{1}{2} KF$ и $свн-ся$ медианой $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle KDB$ - прямоугольный; $\angle KDB = 90^\circ$.
Тогда прямые DM и DK - совпадают $\Rightarrow$ противоречие.

№ 7.

$$\begin{cases} y > 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 4 \cdot 19 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x \leq y - 3 \cdot 2^{34}$$

$$\log_2 2^x \leq \log_2 (y - 3 \cdot 2^{34})$$

$$x \leq \log_2 (y - 3 \cdot 2^{34})$$

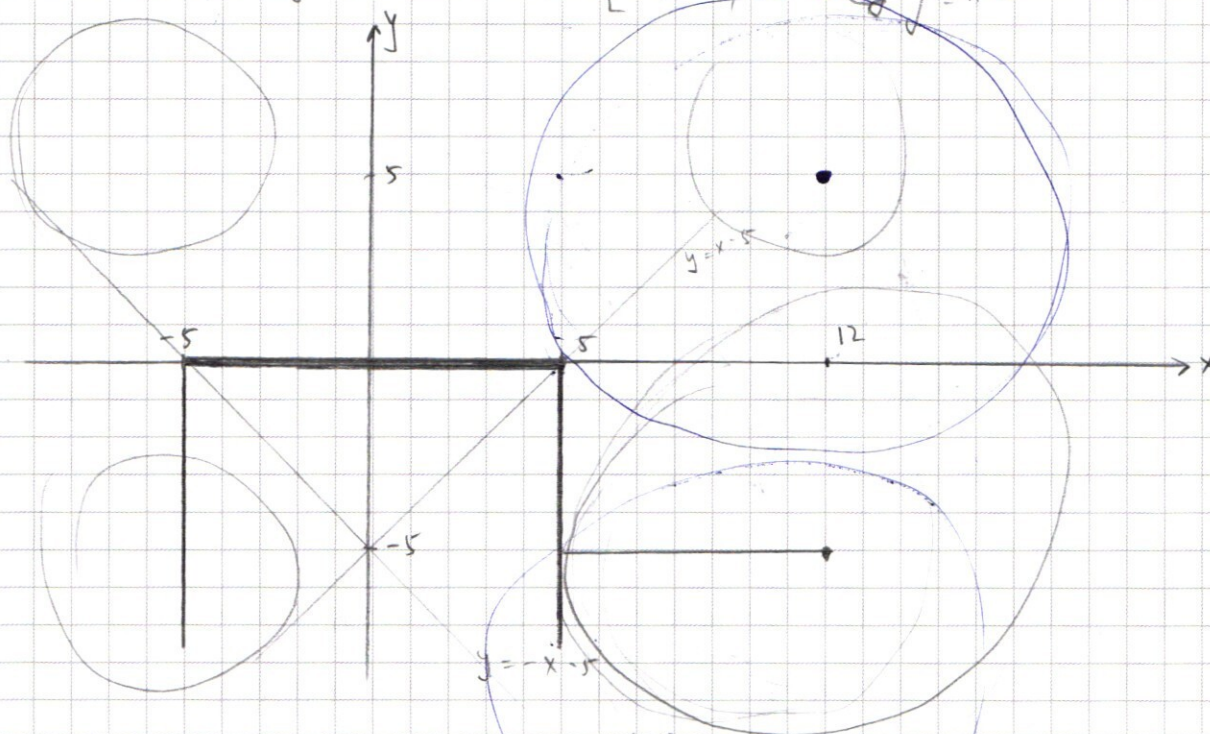
$$y < 2 \left(2 \cdot 19 + (2^{32} - 1) \cdot \log_2 (y - 3 \cdot 2^{34}) \right)$$

$$2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot \log_2 (y - 3 \cdot 2^{34}) - y > -76$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -2x = 10, & x \leq -y - 5 \\ 2y + 10 = 10, & -y - 5 \leq x \leq y + 5 \\ 2x = 10, & x \geq y + 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -5, & y \leq -x - 5 \\ y = 0, & -5 \leq x \leq 5 \text{ или } \\ x = 5, & y \geq x - 5 \end{cases} \quad \begin{cases} y \geq -x - 5 \\ y \geq x - 5 \end{cases}$$



Чтобы было 2 корня, ^{ниже} окр-ти должны касаться ~~линии~~ $x = 5$ и $x = -5$.
Тогда $R = r = 1$ $a = 49$.

$$(151 - 12)^2 + (141 - 5)^2 = a$$

$$49 + y^2 - 10y + 25 - a = 0$$

$$D = 100 - 100 + 4a - 4 \cdot 49 = 0 \Rightarrow a = 49$$

(он острый)

$$\cos \angle KSO = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5} = \frac{KS}{\frac{5}{3}R} \Rightarrow \frac{3KS}{5R} = \frac{4}{5} \Rightarrow KS = \frac{4R}{3}$$

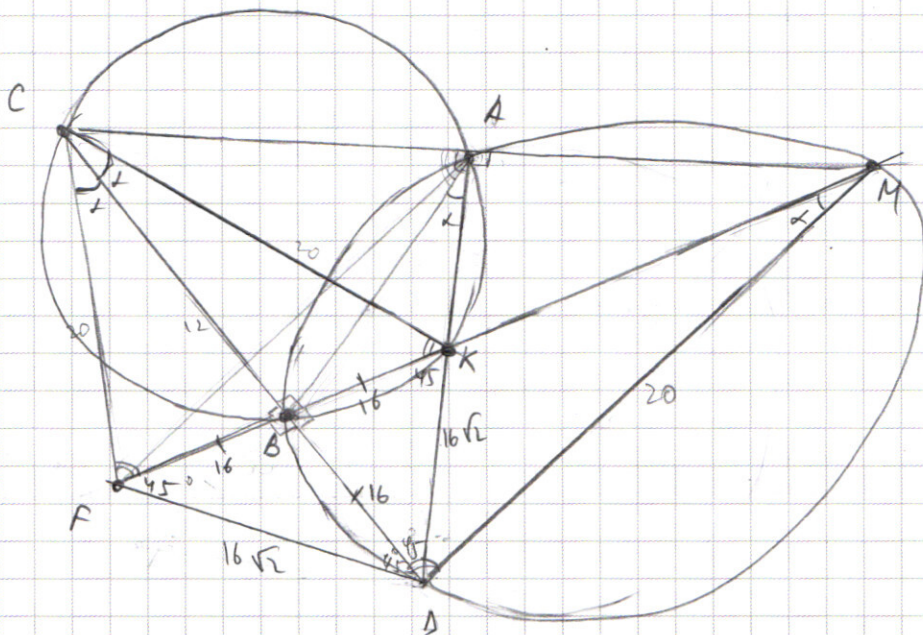
$KS = MS = LS$ (как окр-ки касательные из одной точки)

$$R = 10$$

$$\angle CAD = 90^\circ$$

$$BC = 12$$

$$S_{ACF} = ?$$



CK - диаметр,
CK = 20
DM - диаметр, $\Rightarrow$
DM = 20

$$\begin{array}{r} 28 \\ 128 \\ \hline + 224 \\ 56 \\ \hline 784 \end{array}$$

$$\frac{400}{4} = \frac{100}{1} = 100$$

$$1) \triangle CKB = \triangle MDB \text{ (по гип. и острому углу)} \Rightarrow CB = MB; BK = BD \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{в } \triangle FCK \text{ CB - высота и медиана } \Rightarrow \text{он равнобедренный} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CF = CK = 2R = 20.$$

$$\angle FCB = \angle KCB = \angle$$

$$2) BC = 12$$

т.к. $\angle$ - острый

$$\cos \angle = \frac{BC}{CF} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \angle = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{FB}{20} = \frac{4}{5} \Rightarrow FB = 16$$

$$S_{ACF} = ?$$

По теор. кос. в $\triangle FCD$. $FD^2 = 400 + 28^2 - 2 \cdot 20 \cdot 28 \cdot \cos \angle$

$$FD^2 = 400 + 784 - 2 \cdot 20 \cdot 28 \cdot \frac{3}{5} = 16 \cdot (25 + 49 - 2 \cdot 7 \cdot 3) = 16 \cdot (24 + 50 - 42) =$$

$$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{16}{FD} \Rightarrow FD = \frac{16 \cdot 2}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$$

$$= 16 \cdot (24 + 50 - 42) = 16 \cdot (24 + 8) = 16 \cdot 32 = 512 = 16 \cdot 16 \cdot 2 = (16\sqrt{2})^2$$

в $\triangle KBD$ по теор. Пифагора: $KD^2 = 16^2 + 16^2 \Rightarrow KD = 16\sqrt{2} = FD$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-1)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

ровно два решения

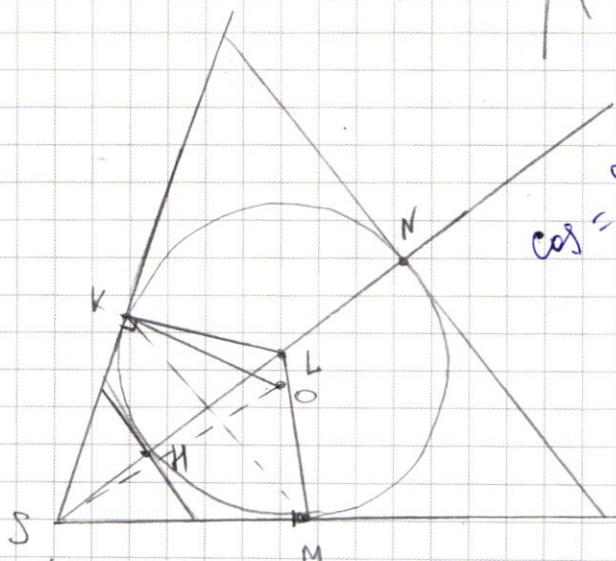
~~Если $a=0$, $a=16$ - есть по 2 решения, но~~

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sqrt{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$SR = SM = SL$$



$$\cos = \frac{SK}{SO}$$

$$SN = SH + 2R \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$\triangle PKC_1 \sim \triangle PLC_1$ (по углам) $\Rightarrow$

$$\frac{PK}{PL} = \frac{PC_1}{PC_1} = \frac{PC_1}{PC_1}$$

$$\frac{AC \cdot BC \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = 16 \cdot \frac{AC \cdot BC \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow$$

$$\frac{AC}{AC} = 16 \cdot \frac{BC}{BC} = \frac{BC}{BC} \Rightarrow$$

$\triangle SHK \sim \triangle SKO$ (по углам) $\Rightarrow BC^2 = 16 AC^2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC = 4 AC \Rightarrow$

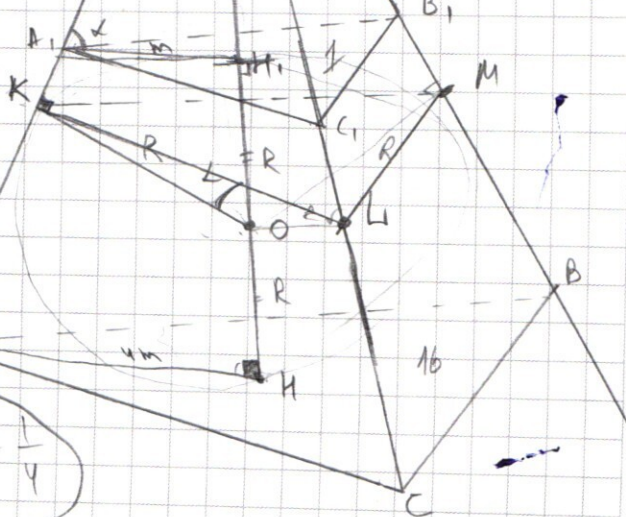
$$\frac{SH}{HK} = \frac{SK}{OK} = \frac{SK}{R}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{SO} = \frac{R}{h+R} = \frac{AH}{SA}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R}{h+R} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{AH}{SA} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}R$$

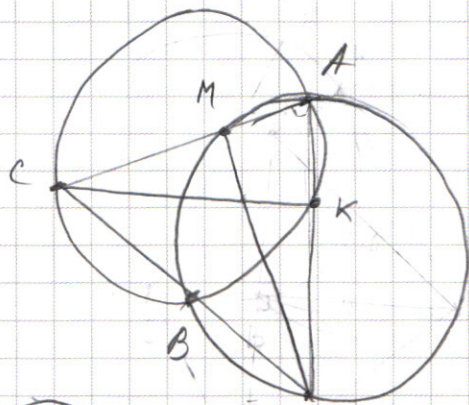


$$\frac{h}{R} = \frac{h+2R}{4R} \Rightarrow 4h = h+2R \Rightarrow 3h = 2R \Rightarrow h = \frac{2}{3}R$$

$$R=10$$

$$\angle CAD=90^\circ$$

$$\angle FBD=90^\circ$$



$$DM=2R=CN - \text{диаметры}$$

$$0 = x - \frac{2}{1-t} \cdot \frac{2}{1+t} = x$$

$$\frac{2}{1+t} + 1 = x$$

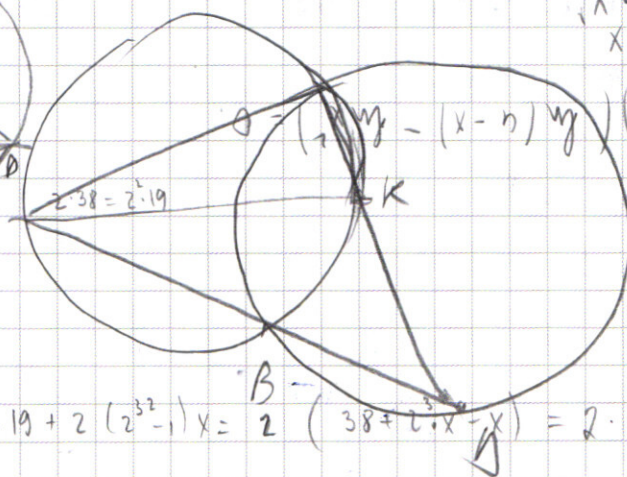
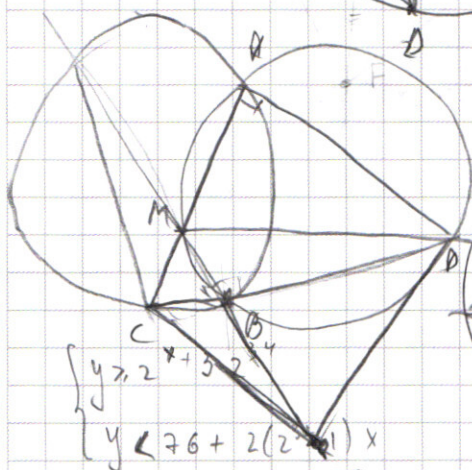
$$t = \frac{x}{x+1} = \frac{1}{x+1}$$

$$0 = h - x + \frac{1}{x+1} \cdot x$$

$$z = x$$

$$x = x - h$$

$$y = x - h$$



$$x \cdot y = (x-h) \cdot y$$

$$x \cdot y = (x-h) \cdot y$$

$$(x \cdot y - (x-h) \cdot y) \cdot (x \cdot y - (x-h) \cdot y)$$

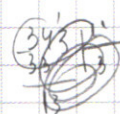
$$76 + 2(2^{32}-1)x = 2^{32} \cdot 19 + 2(2^{32}-1)x = 2(38 + 2^{32}x - x) = 2(2^{32}x + 34 - x)$$

$$2^x(1 + 3 \cdot 2^{34-x})$$

$$34 - x = t \quad 2^{34-t}(1 + 3 \cdot 2^t) \leq y < 2(2^{32} \cdot 34 - 2^{32} \cdot t + 2^t + t)$$

Единицы и нули

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3087} \\ 3 \\ \underline{27} \\ 387 \\ 36 \\ \underline{27} \\ 117 \\ 108 \\ \underline{9} \\ 87 \\ 81 \\ \underline{6} \\ 7 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 149} \\ 3 \\ \underline{102} \\ 47 \\ 42 \\ \underline{5} \end{array}$$

$$0123456789$$

Проверенные цифры равно 9261

$$9261 = 3 \cdot 3087 = 3^2 \cdot 1029 = 3^3 \cdot (333 + 10) = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

Обязательно должно быть три семерки — ост-се 5 мест

Не будет кратно 27

- 3, 3, 3
- 3, 3, 6
- 3, 9
- 3, 6, 6

333

Если нет 3, 6, 9

Нет 3 и 9, но есть одна 6

Нет 3 и 9, есть две 6

Если 1, 3 и 6, нет 9

- 3 6 6
- 3 6 9
- 3 9
- 3 3 6
- 3 3 9

$$\begin{array}{r} 3 \ 3 \ 3 \\ 3 \ 3 \ 6 \\ 3 \ 6 \ 6 \\ 6 \ 6 \ 6 \\ \hline 45 \end{array}$$

без 6 и 9

1) без 3, 6, 9, 0
2) 3 тройки

- 6 6 6 6 6
- 6 6 6
- 6 9
- 9 9

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - (x+4)y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 16 + 8x + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x)^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4x + 4^2 = (3x-4)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} \\ y = \frac{x+4-3x+4}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

$\begin{matrix} x > 0 \\ \frac{y}{x^2} > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}$

$OD3$

1) $y = \frac{2x}{x^2} \cdot x^4 = 2x^3$ $(x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$

$\frac{1}{(16x^6)^{\ln x}} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$

$\ln(x^2 \cdot 16 \cdot x^4)^{-\ln x} = \ln(2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$

$-4 \ln 2 \ln x - 6 \ln^2 x = \ln 2 \ln x + \ln^2 2 - 6 \ln x \ln 2$

$\ln 2 \ln x = \ln^2 2$

$\ln x = \ln 2$

$x = 2$

$-2(\ln x + 2 \ln(4-x)) \cdot \ln x = \ln(4-x) \cdot (\ln(4-x) - 2 \ln x)$

$-2 \ln^2 x - 4 \ln(4-x) \ln x = \ln^2(4-x) - 2 \ln(4-x) \ln x$

$3 \ln(4-x) \ln x = \ln^2(4-x) + 2 \ln^2 x$

$2 \ln(4-x) \ln x + \ln(4-x) \ln x = \ln^2(4-x) + 2 \ln^2 x$

$2 \ln x (\ln(4-x) - \ln x) = \ln(4-x) (\ln(4-x) - \ln x)$

$$\sin 9x + \cos 9x + \sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \cdot \sin 2x = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$(\sin 4x \cos 3x + \sin 3x \cos 4x)(\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x$$

$$\sin 2x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x$$

$$\sin 7x = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

$$\alpha + \beta = 90$$

$$\alpha - \beta = 30$$

$$\cos 2t = 2 \cos^2 t - 1$$

$$2 \cos^2 x - 1 = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos^2 x - 2 \sin x \cos x - \sin^2 x$$

$$2 \cos x (\cos x - \sin x)$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\frac{3}{2} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$0 - \frac{\sqrt{3}}{2} = -2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$$

$$\sqrt{2} (\sin x \cdot \cos 6x + \sin 6x \cdot \cos x) = 2 \cos^2 x - 1 + 2 \cos x \sin x$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$y+5=t$$

$$f = |x+t| + |t-x|$$

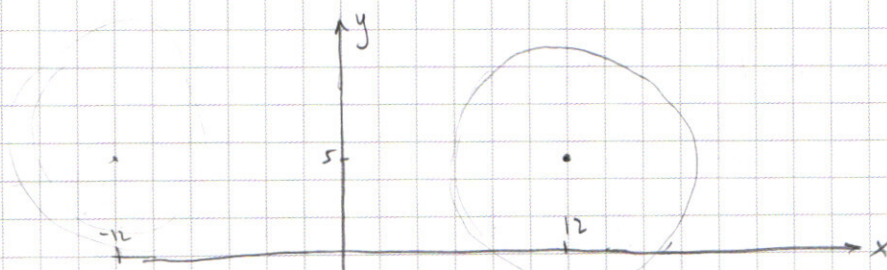
$$-t \quad t$$

$$t+x \quad - \quad + \quad +$$

$$t-x \quad + \quad + \quad -$$

$$f = \begin{cases} -x-t+x-x, & x \leq -t \\ x-t+x-x, & -t \leq x \leq t \\ x+t-x-x, & x > t \end{cases}$$

$$f = \begin{cases} -2x, & x \leq -t \\ 2t, & -t \leq x \leq t \\ 2x, & x > t \end{cases}$$



$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right)$$

$$\sin 90 + \cos 90 = 2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$$

$$\sin 0 + \cos 0 = 1 = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\sqrt{2} = \sqrt{2}$$