

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \cdot h = 9261 \cdot 3 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 9 \\ -2 \\ \hline 0 \\ -26 \\ -24 \\ \hline 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3087 \cdot 3 \\ -6 \\ \hline 1029 \\ -27 \\ \hline 9 \\ -12 \\ -12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 49 \\ \times 7 \\ \hline 343 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ \times 3 \\ \hline 168 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9^5 \\ 81 \cdot 3 = 243 \\ 81 \cdot 3 = 243 \\ -729 \\ \hline 1818 \\ 1818 \\ \hline 986 \\ 59049 \end{array}$$

1) 9^n нет в числе
Тогда набор цифр: 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560.$$

2) 9^n есть
Тогда набор цифр: 1, 1, 1, 9, 3, 7, 7, 7

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 140$$

$$\frac{5! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 56 \cdot 20$$

Ответ: 560.3

2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = \sin(\alpha + \beta) \pm \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \pm \sin \alpha \cos \beta \mp \cos \alpha \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\beta = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta - \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \text{или} \quad \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \right)$$

$$\cos x + \sin x =$$

$$\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin 7x = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{4} \cos 2x - \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x = 0$$

$$\cos \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0$$



$$\frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$$

$$\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \cdot \cos \left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \sin \left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos \left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0 \quad \sin \left(\dots \right) = 0$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi z$$

$$n, z \in \mathbb{Z}$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi z$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi z$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} z$$

$$\begin{cases} (x^2 y) - \ln x = y^3 \ln(y/x^7) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Реш: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x \neq 0 \\ y \neq 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y > 0)$$

$$y^{\ln(y/x^7)} = y^{\ln y - \ln x^7} = \left(\frac{y}{x^7} \right)^{\ln y} = \frac{y^{\ln y}}{x^{7 \ln y}} = \frac{1}{x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln(y \cdot x^4)}}$$

$$\frac{1}{x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln(y \cdot x^4)}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln y} \cdot x^{4 \ln x}}$$

$$y^{3 \ln x} = y^{\ln y} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$y^{3 \ln x - \ln y} = x^{2 \ln x}$$

$$y^{\ln \frac{x^3}{y}} = x^{\ln x^2}$$

$$\frac{x^{\ln y^3}}{y^{\ln y}} = x^{\ln x^2}$$

$$(xy)^{\ln xy} = x^{\ln xy^3}$$

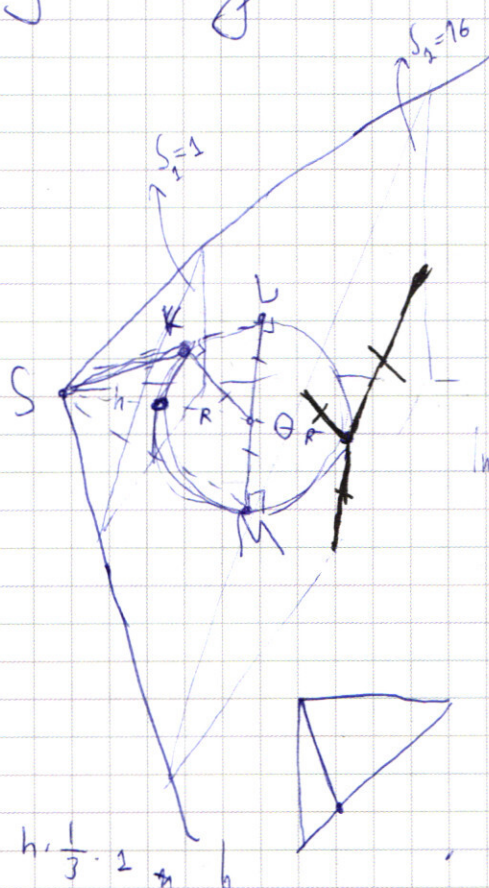
$$y^{\ln xy} = x^{\ln \frac{y^3}{x^2}}$$

$$y^{\ln xy} = x^{\ln y^3 - \ln x^2}$$

$$y^{\ln xy} = x^{\ln y^3} \cdot x^{-\ln x^2}$$

$$y^{\ln xy} = x^{\ln y^3 - \ln x^2}$$

$$y^{\ln x^3} = x^{\ln y}$$



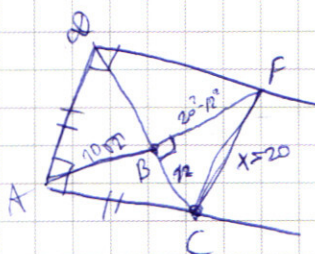
$$\ln(x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln(y \cdot x^4)}) = \ln(y^{3 \ln x})$$

$$2 \ln^2 x + \ln^2 y = 3 \ln x - \ln y$$

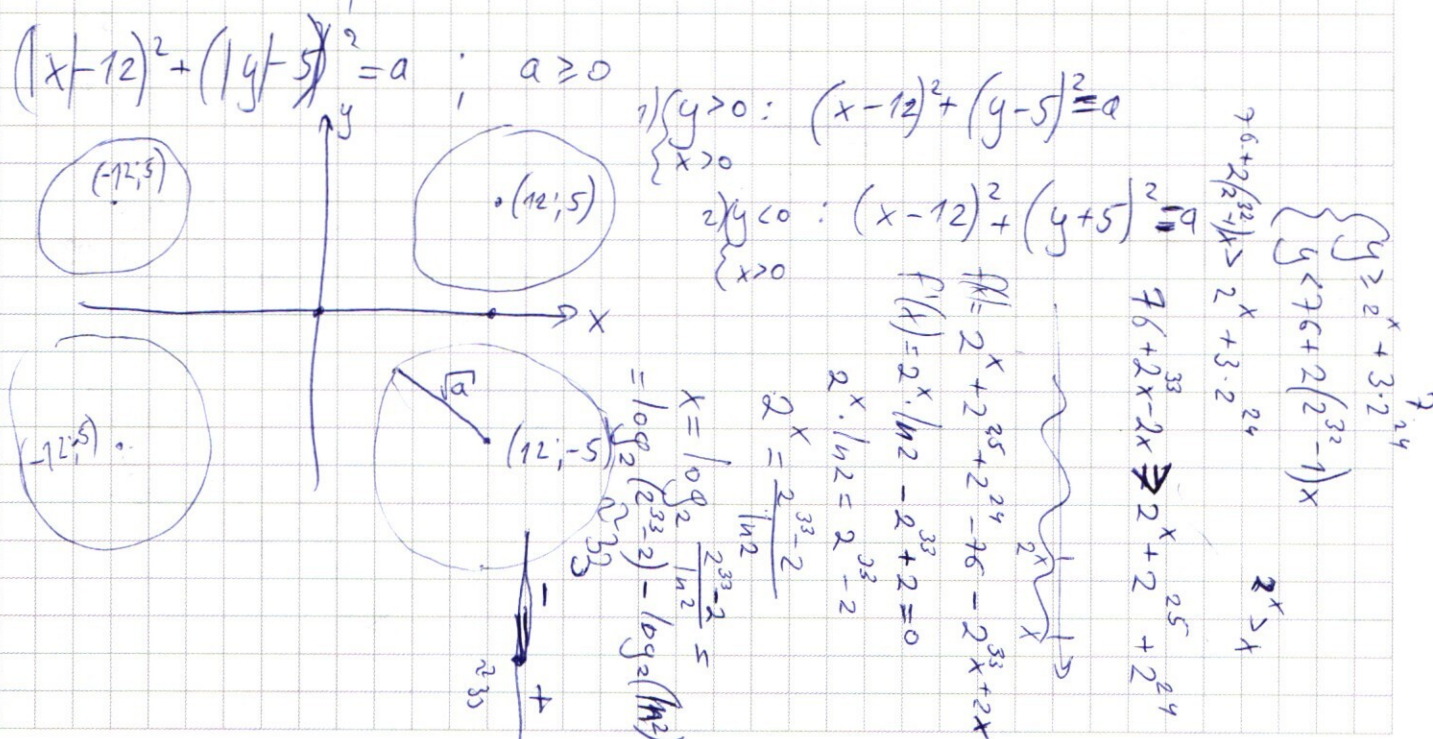
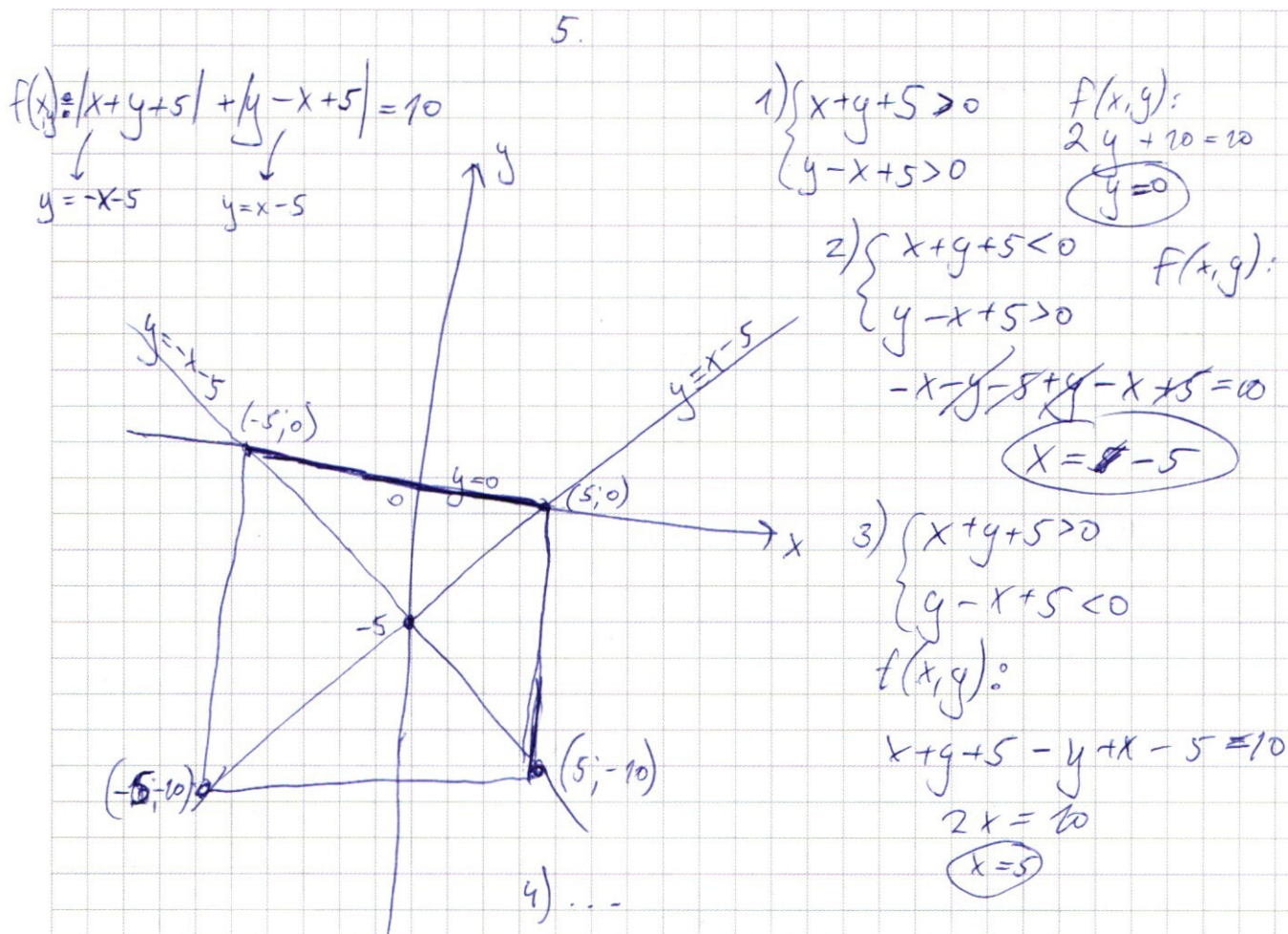
$$(\ln x + \ln y)^2 = 3 \ln x - \ln y - \ln^2 x$$

$$\ln xy = \ln x (3 \ln y - \ln x)$$

$$\ln xy \cdot \ln xy = \ln x \cdot \ln(y^3)$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$S = (\dots)$$

$$P = \frac{20 + 14\sqrt{2} + 2\sqrt{226}}{2}$$

$$AF = 2\sqrt{226}$$

$$p - a = 7\sqrt{2} + \sqrt{126} - 10$$

$$(12; 5)$$

$$12 - 5 = \sqrt{a}$$

$$a = 49$$

$$(12; -5)$$

$$AF^2 = AC^2 + CF^2 - 2 \cos \angle AC \cdot CF$$

$$\cos \angle = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2 AC \cdot CF}$$

$$\cos \angle = \frac{392 + 100 - 904}{2 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20}$$

$$200 = AD^2 + 256 - 2 \cdot 16 \cdot AD$$

$$AD^2 - 16\sqrt{2} AD + 56 = 0$$

$$D - 256 - 4 \cdot 56 = 512 - 224 = 288$$

$$P_1 = \frac{288}{4} = 72$$

$$AD_1 = 8\sqrt{2} + \sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$AD_2 = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$$

$$72 = 8 \cdot 9 = 3^2 \cdot 2^2 \cdot 2$$

$$\frac{98}{196} + \frac{256}{196} = \frac{452}{196}$$

$$\frac{452}{196} = \frac{113}{49}$$

$$128 - 56 = 72$$

$$98 = 49 \cdot 2$$

$$113$$

$$2\sqrt{226}$$

$$\sqrt{1 - \frac{2}{100}} = \frac{98}{100}$$

$$200 = AD^2 + BD^2 - \sqrt{2} AD \cdot BD$$

$$CF = \sqrt{2} AB = 20$$

$$CF^2 = CD^2 + FD^2 - \sqrt{2} CD \cdot FD$$

$$\frac{CF^2}{2} = AD^2 + BD^2 - \sqrt{2} AD \cdot BD = AD^2 + BD^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} AD \cdot BD = AB^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 = 9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ - цифры восьмизначного числа.

П.Б. Чтобы произведение цифр равнялось 9261, нужно чтобы среди них были 3 тройки и 3 семерки. Также возможно, что будет 1 девятка, 2 тройки и 3 семерки. Оставшиеся цифры должны быть единицами.

1) "9" нет в числе:

Тогда имеем набор цифр: 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7, 7.

П.К. каждая цифра встречается 1 раз в числе, а цифр в наборе повторения, всего чисел: $\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 560$.

2) "9" в числе есть:

Тогда набор цифр: 1, 1, 1, 9, 3, 7, 7, 7.

Аналогично всего случаев: $\frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1120$.

Других наборов не можем быть, поэтому всего $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680.

2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

Применяя гр-му разности кос. и суммы синусов, имеем:

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

2.

$$\sqrt{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ \sqrt{2} \sin 7x = \cos 2x + \sin 2x \end{cases}$$

Введем вспомогательный угол в обеих равенствах, учитывая:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 0 \\ \sin 7x = \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$$

$$\frac{\pi}{4} + 2x = 0 \quad \text{или} \quad \sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}; \quad 2 \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \quad \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad \text{или} \quad \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi z$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k \quad 9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n \quad n, z \in \mathbb{Z}$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi z$$

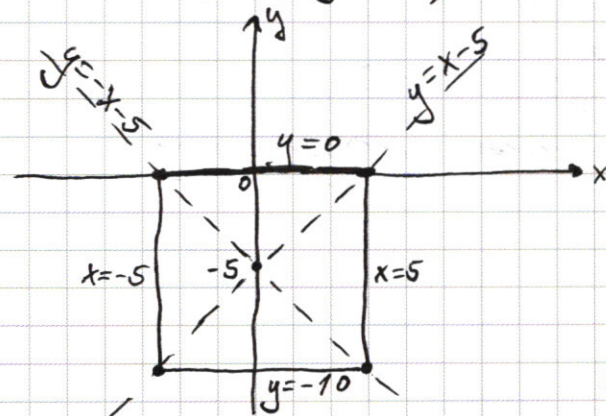
$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} z$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} n$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} z$; $k, n, z \in \mathbb{Z}$.

5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a. & (2) \end{cases} \quad (a \geq 0)$$



Построим график рав-ва (1).

Рассмотрим случаи крайних значений:

$$1) \begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow (1): y = 0$$

$$2) \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow (1): x = -5$$

$$3) \begin{cases} x+y+5 > 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow (1): x = 5$$

$$4) \begin{cases} x+y+5 \leq 0 \\ y-x+5 < 0 \end{cases} \Rightarrow (1): y = -10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

Т.е. графиком рав-ва (1) является квадрат с вершинами в $(5; 0)$, $(5; -10)$, $(-5; -10)$, $(-5; 0)$. Графиком рав-ва (2) является окружность с центром в точке $(12; 5)$ и радиусом $\sqrt{a}$; если убрать модуль. С модулем же эта окружность симметрична относительно оси x и оси y , поэтому гр. рав-ва (2) является парой одинаковых окружностей с центрами в точках $(12; 5)$, $(12; -5)$; $(-12; -5)$, $(-12; 5)$. Так как квадрат (1) и окружности (2) симметричны относительно оси Oy , то достаточно рассмотреть только половину полукругом $y > 0$. Количество решений зависит от значения a .

При $a = 0$ найдем един. реш. $y = \pm 5$ $x = \pm 12$ ком. не уг. (1).

При $a_1 > \sqrt{a} > 0$ - нет решений

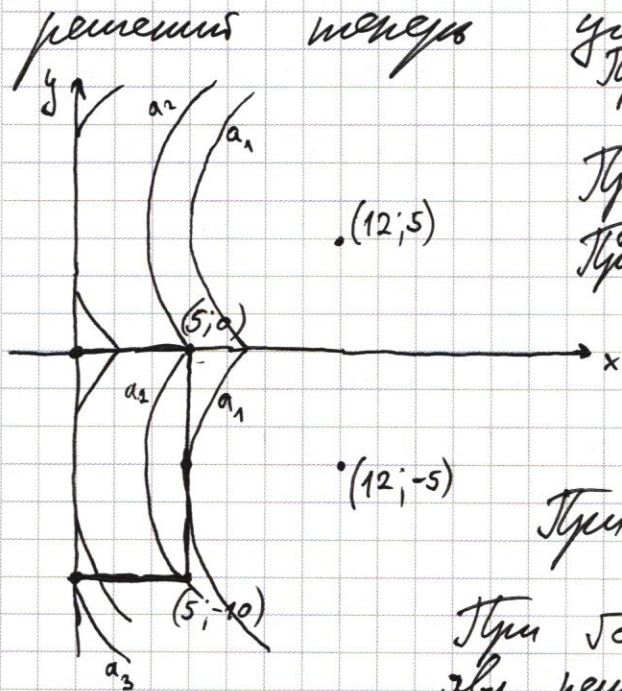
При $\sqrt{a} = a_1$ - касание окр. и квадр. 1 решение

При $a_2 > \sqrt{a} > a_1$ - окр. пересекают квадрат дважды $\Rightarrow$ 2 реш.

При $a_3 > \sqrt{a} \geq a_2$ - 2 пересечения, 2 решения

При $\sqrt{a} = a_3$ точки $(0; 0)$ и $(0; -10)$ явл. решениями $\Rightarrow$ 2 решения.

При $\sqrt{a} > a_3$ - нет пересечений с кв.; нет решений.



5.

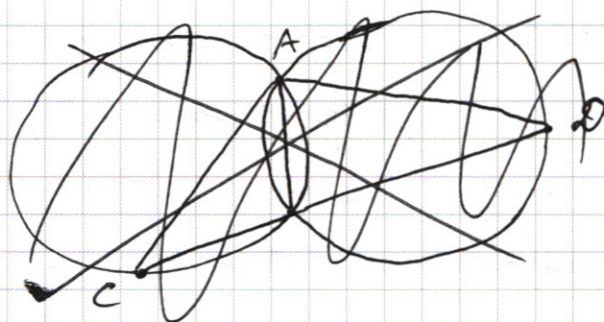
Но если только $\sqrt{a'} = a_1$ подходит, т.к. при этом будет $1 \cdot 2 = 2$ решение у исходной системы.

a_1 - точка касания; $a_1 = 12 - 5 = 7$

$\sqrt{a'} = 7$; $a = 49$.

Ответ: 49.

6.



а) П.к. АВ - общая хорда одинаковых окружностей, то $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$.

Значит $\angle AOB = 90^\circ$,

Значит $R^2 + R^2 = AB^2$.

$AB = 10\sqrt{2}$.

Но замечим, что по т. косинусов

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot AD \cdot BD$$

Поскольку $\triangle BDF$ - равнобедренный, прямоугольный,

$\angle CDF = 45^\circ$,

значит по т. косинусов в $\triangle CDF$:

$$CF^2 = CD^2 + FD^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot CD \cdot FD$$

Но $CD^2 = AC^2 + AD^2 = 2AD^2$ и $FD^2 = BF^2 + BD^2 = 2BD^2$

$$CD = \sqrt{2} AD$$

$$FD = \sqrt{2} BD$$

Значит $CF^2 = 2AD^2 + 2BD^2 - 2 \cdot 2 \cos 45^\circ \cdot AD \cdot BD$

Откуда $\frac{CF^2}{2} = AD^2 + BD^2 - 2 \cos 45^\circ \cdot AD \cdot BD = AB^2$

Значит $CF = \sqrt{2} \cdot AB = 20$.

б) П.к. $BC = 12$, то $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 16 = BD$.

По теореме косинусов в $\triangle ADB$:

$$AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot AD \cdot BD$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AD^2 - 16\sqrt{2}AD + 56 = 0$$

$$D_1 = 64 \cdot 2 - 56 = 72$$

$$AD_1 = 8\sqrt{2} + 6\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$AD_2 = 8\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = 2\sqrt{2}, \text{ но т.к. } B \in CD \text{ по условию}$$

$$AD = 2\sqrt{2} = AC \text{ не подходит, поскольку } 2\sqrt{2} < R = 10.$$

$$\text{Значит, } AD = 14\sqrt{2}.$$

$$\text{т.к. } \angle ADC + \angle CDF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ, \text{ то } \triangle ADF - \text{прямоуг.}$$

$$\text{По т. Пифагора } AF^2 = AD^2 + FD^2 = 196 \cdot 2 + 256 \cdot 2 = 904$$

$$\text{По т. косинусов в } \triangle ACF:$$

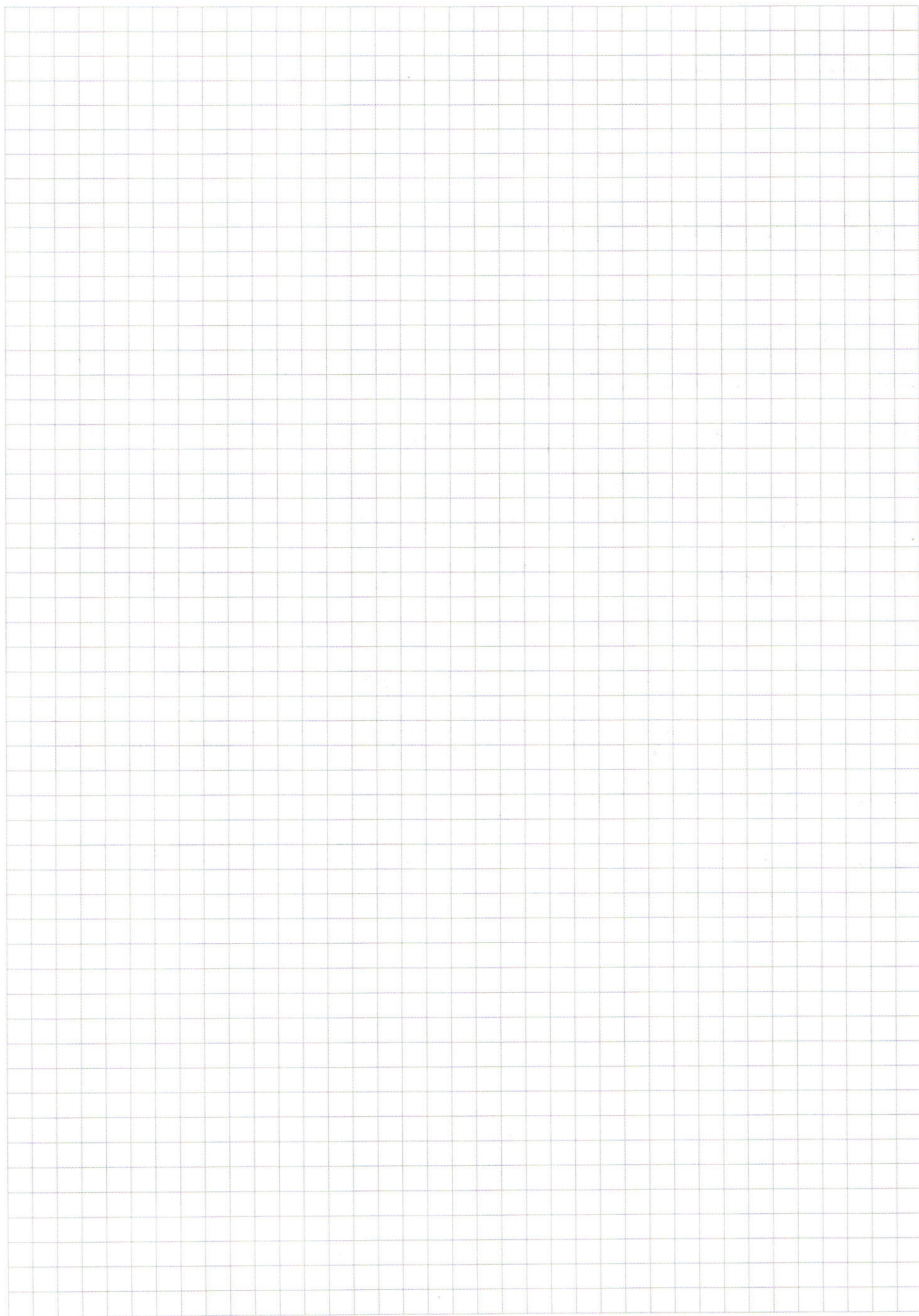
$$AF^2 = AC^2 + CF^2 - 2 \cos \alpha \cdot AC \cdot CF, \text{ где } \alpha = \angle ACF$$

$$\text{Откуда } \cos \alpha = \frac{AC^2 + CF^2 - AF^2}{2AC \cdot CF} = \frac{392 + 400 - 904}{2 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20} = -\frac{112}{2 \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

$$\text{Тогда } \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{\frac{98}{100}} = 0,7\sqrt{2}.$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot CF \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7}{10} \cdot \sqrt{2} = 196$$

$$\text{Ответ: а) } 20; \text{ б) } 196.$$



☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)