МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Значит, искомые числа могут состоять только из цифр 1, 3, 7, причем (т.к. 3 и 7 – простые) цифр "3" должно быть 3 шт., цифр "7" – тоже 3 шт. Тогда единиц – ~~7~~ $8-6=2$ шт. Для первой единицы доступно 8 позиций, для второй – 7, остальные заняты цифрами 7 и 3. => Кол-во чисел $7 \cdot 8 = 56$ штук.

Ответ: 56

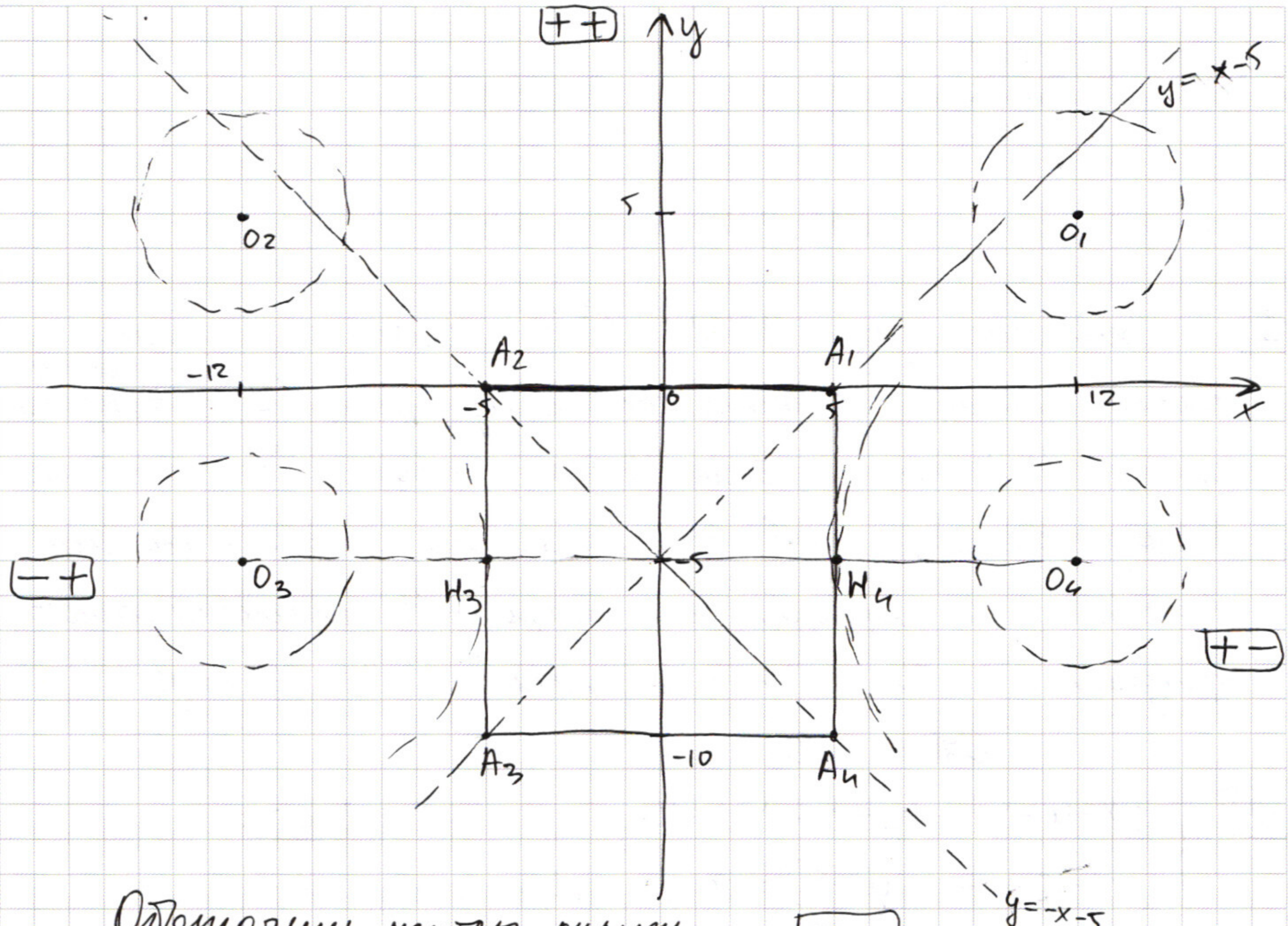
№5 $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10, \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a, \end{cases}$ ОДЗ: $\boxed{a \geq 0}$

Нули модулей:
и $y=-x-5$,
$y=x-5$,

Знаки раскрытия модуля	Ур-е
+ +	$x+y+5+y-x+5=10$; $2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$,
+ –	$x+y+5-y+x-5=10$, $2x=10 \Rightarrow \boxed{x=5}$,
– +	$-x-y-5+y-x+5=10$, $-2x=10 \Rightarrow \boxed{x=-5}$
– –	$-x-y-5-y+x-5=10$ $-2y=20 \Rightarrow \boxed{y=-10}$

Второе же ур-е системы представляет собой четыре окружности радиуса $\sqrt{a}$ с центрами в точках: $(12;5)$, $(-12;5)$; $(12;-5)$; $(-12;-5)$, причем каждая окружность ограничена соответствующей четвертью.

Изобразим нули модулей и расставим знаки для каждого модуля, подставляя точку $(0;0)$. Получаем квадрат со стороной 10 ед.



Обозначим центры окружностей O_1, O_2, O_3 и O_4, точки квадрата A_1, A_2, A_3, A_4, а также точки H_3 и H_4 — основания перпендикуляров $O_3H_3 \perp A_2A_3$ и $O_4H_4 \perp A_1A_4$ соотв-но. Длина отрезков $O_3H_3 = O_4H_4 <$ $< O_2A_2 = O_1A_1$, поэтому при увеличении a от нуля окр-ти №3 и №4 коснутся квадрата первыми (При $\sqrt{a} = 7 \Rightarrow a = 49$). В этом случае система имеет ровно 2 решения. Далее, при $a \in (49; O_2A_2^2]$ или $a \in (49; 74]$ решений 4. Далее решений также больше двух (т.к. окр-ти №3 и №4 на отрезке A_3A_4 дают два пересечения, не совпадающих с пер-ями от окр-ей №1 и №2, или одно П-е при $\sqrt{a} = O_3O$ (O-начало координат), но и в этом случае окр-ти №1 и №2 дают доп. пересечение на отрезках A_2A_3, A_2A_1 и A_1A_4). Еще раз 2 пересечения возникает в тот момент, когда радиусы окр-ей

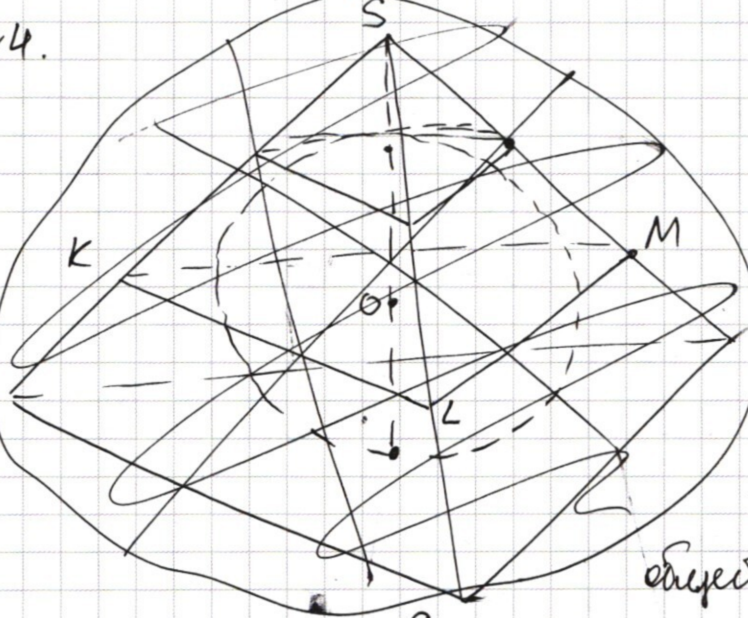
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

равны O_1A_3. В этом случае окр. N3 и N4 не пересекают квадрат вообще, а окр. N1 и N2 пересекают его в точках A_3 и A_4 с-но, т.е $\sqrt{a} = O_1A_3 \Rightarrow$

$$a = O_1A_3^2 = 15^2 + 17^2 = 225 + 289 = 514.$$

Ответ: $a = 49$ и $a = 514$.

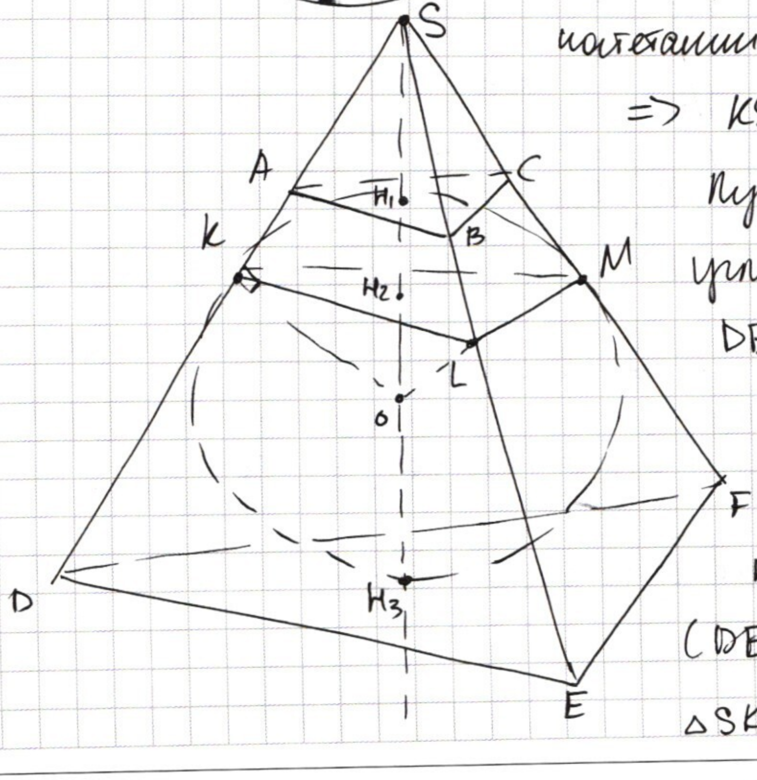
N4.



Т.к. сфера вписана в трехгранный угол, то $OK \perp KS$, $OM \perp MS$, $OL \perp SL$, как радиусы, проведенные в точку касания

Значит $\triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO$, т.к. они прямоугольные с общей гипотенузой SO и равными катетами $KO = OL = OM$ — радиусы.

$\Rightarrow KS = LS = MS$.



Пусть ABC — сечение трехгр. угла $\perp SO$ ближе к вершине, DEF — дальше от вершины

По усл $S_{ABC} = 1$; $S_{DEF} = 16$;

Пусть H_1 — точка кас-я пл-ти (ABC), H_3 — плоскости (DEF). Заметим, что, т.к. $\triangle SKO = \triangle SLO = \triangle SMO$ с общей гипотенузой, то высоты из вершин K, L, M попадают в одну точку H_2. Т.к. $KH_2, LH_2, MH_2 \perp SO$, то $H_2 \in (KLM)$ и $SO \perp (KLM)$, а значит $(ABC) \parallel (KLM) \parallel (DEF)$ (т.к. все три $\perp SO$).

Выходит, что $\triangle KLM$ и $\triangle DEF$ получены из $\triangle ABC$ с помощью преобразования подобия с вершиной в точке S.

$\Rightarrow$ $\triangle ABC \sim \triangle KLM \sim \triangle DEF$. Тогда $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = 16 = k^2$

$\Rightarrow$ $k = 4$.

Но тогда ~~$\frac{SE}{SB}$~~ $\frac{DE}{AB} = 4$; $\Rightarrow$ $\frac{SE}{SB} = 4$ из $\triangle SAB \sim \triangle SDE$ ($\angle DSE$ - общ и $AB \parallel DE$)

Но тогда $\frac{SK_3}{SK_1} = 4$ из $\triangle SBK_1 \sim \triangle SEK_3$ (прямоуг. с общ. углом).

Пусть $SK_3 = 4x \Rightarrow SK_1 = x$; $K_1K_3 = 3x$ – диаметр $\Rightarrow K_1O = \frac{K_1K_3}{2} = \frac{3}{2}x = OL = OK$

$SO = SK_1 + K_1O = x + \frac{3}{2}x = \frac{5}{2}x$

$\Rightarrow$ $\sin\angle KSO = \frac{KO}{SO} = \frac{3}{2}\frac{x \cdot 2}{5x} = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\angle KSO = \frac{4}{5}$

$\Rightarrow$ $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$;

Пусть $\frac{S_{KLM}}{S_{ABC}} = \lambda^2 \Rightarrow \lambda = \frac{SH_2}{SH_1}$ (аналогично тому как мы ранее получили, что $\frac{S_{DEF}}{S_{ABC}} = \left(\frac{SK_3}{SK_1}\right)^2 = k^2$).

~~$SK_2 = \sqrt{KS^2 - SK_2^2} = \sqrt{SO^2 - OK^2 - SK_2^2} = \frac{25}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^2 -$~~

$SK_2 = SK \cdot \cos\angle KSO = \frac{4}{5}SK = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{SO^2 - OK^2}$ (по т. Пифаг-ра)

$SK_2 = \frac{4}{5} \cdot \sqrt{\frac{25}{4}x^2 - \frac{9}{4}x^2} = \frac{4}{5} \cdot 2x = \frac{8}{5}x$

$\Rightarrow$ $\lambda = \frac{\frac{8}{5}x}{x} = \frac{8}{5} \Rightarrow S_{KLM} = S_{ABC} \cdot \left(\frac{8}{5}\right)^2 = \frac{64}{25}$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$; $S_{KLM} = \frac{64}{25}$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0, \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}$

Решим второе ур-е отн-но y:

$y^2 - y(4+x) - 2x^2 + 8x = 0$; $D = (4+x)^2 + 8x^2 - 32x =$
$= (3x)^2 - 2\cdot 3x\cdot 4 + 16 = (3x-4)^2 \geq 0$

$\Rightarrow y = \frac{4+x \pm |3x-4|}{2} = \left\{\begin{matrix} \text{т.к } \pm, \\ \text{то знак модуля можно опустить} \end{matrix}\right\} =$

$= \frac{4+x\pm(3x-4)}{2} = \left[\begin{matrix} 2x, \\ 4-x, \end{matrix}\right.$

Второе ур-е теперь: $(y-2x)(y-(4-x)) = 0$

Прологарифмируем первое уравнение системы и (лог-е по осн. e) приведем к виду:

$-\ln x\cdot(2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\cdot\ln y$

$-2\ln^2 x - 4\ln x\ln y = \ln^2 y - 7\ln x\ln y$;

$\ln^2 y - 3\ln x\ln y + 2\ln^2 x = 0$; Относительно $\ln y$:

$D = 9\ln^2 x - 8\ln^2 x = \ln^2 x \Rightarrow \ln y = \frac{3\ln x \pm |\ln x|}{2} =$

$= \frac{3\ln x \pm \ln x}{2} = \left[\begin{matrix} 2\ln x, \\ \ln x, \end{matrix}\right. = \left[\begin{matrix} \ln x^2, \\ \ln x, \end{matrix}\right.$

Переходим к аргументам: $\left[\begin{matrix} y = x^2, \\ y = x, \end{matrix}\right.$

В итоге получаем систему:

$\begin{cases} \left[\begin{matrix} y=x \\ y=x^2; \end{matrix}\right. \\ \left[\begin{matrix} y=2x, \\ y=4-x, \end{matrix}\right. \end{cases}$ ① $\begin{cases} y=x \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ не уд. ОДЗ.

② $\begin{cases} y=x \\ y=4-x \end{cases}$ $\quad x=4-x \quad x=2 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=2, \end{cases}$ ✓

③ $\begin{cases} y=x^2 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x^2=2x \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow y=\left[\begin{array}{l} 0, \\ 4, \end{array}\right.$

пара $(0;0)$ не уд ОДЗ
пара $(2;4)$ уд.

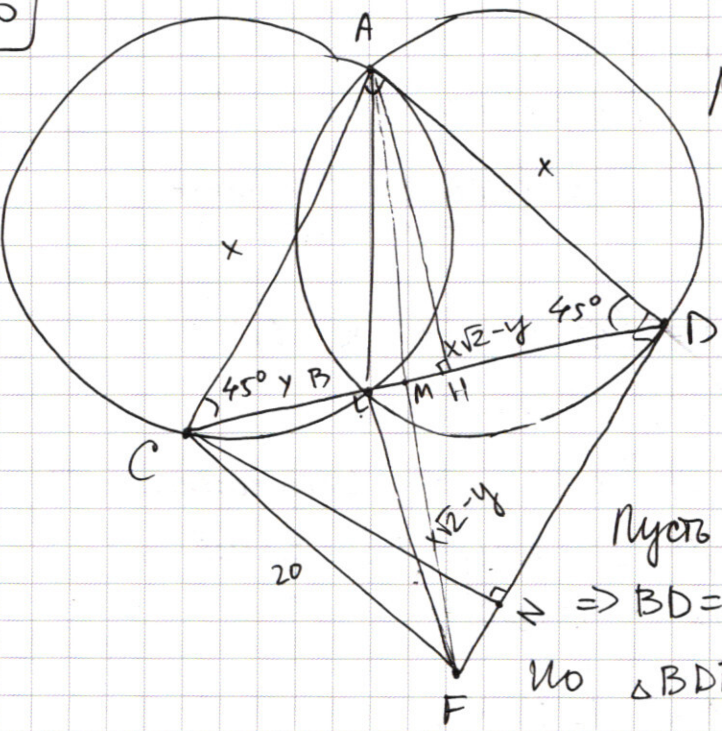
④ $\begin{cases} y=x^2, \\ y=4-x, \end{cases}$ $\quad x^2+x-4=0 \quad D=1+16=17; \quad x=\frac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Корень $x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}<0$ не уд. ОДЗ.

$\Rightarrow y=\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right)^2 = \frac{17+1-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$ уд. ОДЗ.

$\left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

Ответ: $(2;2), (2;4), \left(-\frac{1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$;

$\boxed{N6}$



Т.к. радиусы окр-ей равны, то дуги $\breve{AB}$, образуемые окр-ями равны, и $\angle ACD=\angle ADC$ − опир-ся на равные дуги.

Т.к. $\triangle CAD$ − прям, то $\angle ACD=\angle ADC=45^\circ$

Пусть $AC=AD=x$; $BC=y$ $\Rightarrow BD=CD-y=x\sqrt{2}-y$

Но $\triangle BDF$ − также прям. и равнобедр. по условию $\Rightarrow BF=x\sqrt{2}-y$. Значит по т. Пифагора из $\triangle CBF$: $CF^2 = y^2+(x\sqrt{2}-y)^2 = y^2+2x^2-2\sqrt{2}xy+y^2 =$
$= 2y^2+2x^2-2\sqrt{2}xy = 2\cdot\left(x^2+y^2+2\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2}xy\right)$ (1)

По теореме ~~...~~ синусов из $\triangle ABC$: $AB=2R\sin\angle ACB =$
$= 2R\sin 45^\circ = \sqrt{2}R$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Но по теореме косинусов для этого же тр-ка:

$AB^2 = x^2+y^2-2xy\cdot\cos\angle ACB = x^2+y^2-\sqrt{2}xy = (R\sqrt{2})^2 =$

Тогда из равенства (1) получаем, что $= 2R^2$

$CF^2 = 2\cdot 2R^2 = 4R^2 \Rightarrow CF = 2R = 20$ - пункт а).

~~Ответ:~~

б) Пусть $AH \perp CD$, т.к. AH - высота в $\triangle CAD$, то $AH = \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x$. Пусть также $M = AF \cap CD$ и $CM = a \Rightarrow DM = x\sqrt{2}-a$;

$$S_{ACD} = \frac{1}{2}AH\cdot CD = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}x\cdot x\sqrt{2} = \frac{x^2}{2}$$

$$S_{CDF} = \frac{1}{2}FB\cdot CD = \frac{1}{2}\cdot(x\sqrt{2}-y)\cdot x\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2}x\sqrt{2}\cdot x\sqrt{2} - \frac{1}{2}y\cdot x\sqrt{2} = x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}xy$$

$$S_{ACFD} = S_{ACD} + S_{CDF} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}xy;$$

~~$S_{ACF} = S_{ACFD}$~~ Из $\triangle CBF$ найдем x:

$CF^2 = BF^2 + CB^2 \Rightarrow 400 = (x\sqrt{2}-y)^2 + y^2 = 2x^2+2y^2-2\sqrt{2}xy$

$2x^2 - 24\sqrt{2}x + 2\cdot 12^2 - 400 = 0;\quad x^2 - 12\sqrt{2}x + 144 - 200 = 0;$

$x^2 - 12\sqrt{2}x - 56 = 0;\quad D = 144\cdot 2 + 4\cdot 56 = 4\cdot(72+56) = 4\cdot 128 =$

$= (16\sqrt{2})^2 \Rightarrow x = \dfrac{12\sqrt{2}\pm 16\sqrt{2}}{2}$ т.к. x - длина (т.е >0), то

$\underline{x = 14\sqrt{2}}$.

Пусть $CN \perp DF \Rightarrow CN \parallel AD$ и $CN = AD$, т.к $AC \parallel FD$, т.к. $\angle ADF = \angle ADC + \angle CDF = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow FN = \sqrt{CF^2 - CN^2} = \sqrt{400 - x^2} = \sqrt{400-392} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \quad FD = FN + DN = 2\sqrt{2} + AC = 16\sqrt{2};$

~~Тогда~~ $S_{AFD} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot FD = \frac{1}{2} \cdot x \cdot 16\sqrt{2} = \frac{1}{2} 14 \cdot 16 \cdot 2 =$
$= 16 \cdot 14 = 224$

$S_{ACFD} = \frac{3}{2}x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}xy = \frac{3}{\cancel{2}} \cdot 14^2 \cdot \cancel{2} - \frac{\sqrt{2}}{\cancel{2}} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 12 =$

$= 196 \cdot 3 - 14 \cdot 12 = 420.$

$$\begin{array}{r} \times\, 196 \\ 3 \\ \hline 588 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 14 \\ 12 \\ \hline +\,28 \\ 14 \\ \hline 168 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,588 \\ 168 \\ \hline 420 \end{array}$$

$\Rightarrow S_{ACF} = S_{ACFD} - S_{ADF} = 196$

$$\begin{array}{r} -\,420 \\ 224 \\ \hline 196 \end{array}$$

Ответ: а) $CF = 20$

б) $S_{ACF} = 196.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0; \end{cases}$ $\boxed{ОДЗ: \begin{cases} x>0 \\ y>0 \end{cases}}$

Решим второе ур-е относ-но y:

$y^2 - y(4+x) - 2x^2 + 8x = 0;$ $D = (4+x)^2 + 8x^2 - 32x =$

$= 16 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x = (3x)^2 - 2\cdot 3\cdot 4x + 16 =$

$= (3x-4)^2 \geq 0$

$\Rightarrow y = \frac{4+x \pm |3x-4|}{2} = \left\{ \begin{matrix} \text{т.к. "}\pm\text{" то} & \text{с общими} \\ \text{модуль раскроется} & \text{знаками} \end{matrix} \right\} =$

$= \frac{4+x \pm (3x-4)}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{4+x+3x-4}{2} \\ \frac{4+x-3x+4}{2} \end{array} \right. = \left[\begin{array}{l} 2x, \\ -x+4, \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ второе ур-е системы можно переписать в виде

$(y-2x)(y-(4-x)) = 0;$

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = y^{\ln y - 7\ln x}$ $\quad a^{\ln a} = e^{\ln^2 a}$

$\frac{1}{x^{2\ln x}\, y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}} = \frac{1}{(x^{\ln x})^2\, y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$

$(x^2(2x)^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^7}\right)}$

$(2^4x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)} = (2x)^{\ln 2 - \ln x^6}$

$$\frac{1}{2^{4\ln x}\cdot \cancel{(x^{\ln x})^6}} = \frac{(2x)^{\ln 2}}{2^{6\ln x}\cdot \cancel{(x^{\ln x})^6}}$$

$$2^{2\ln x} = (2x)^{\ln 2};$$

$$2\ln x\cdot \cancel{\ln 2} = \cancel{\ln 2}\cdot \ln 2x$$

$$2\ln x = \ln 2 + \ln x$$

$$\ln x = \ln 2 \qquad x = 2;$$

$$y = 4$$

$$\frac{1}{\left(x^2(4-x)^4\right)^{\ln x}} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{7\ln x}}$$

$$\frac{1}{(x^{\ln x})^2\cdot (4-x)^{4\ln x}} = \frac{(4-x)^{\ln(4-x)}}{(4-x)^{7\ln x}}$$

$$\frac{(4-x)^{3\ln x}}{(x^{\ln x})^2} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$-\ln x\cdot(2\ln x + 4\ln y) = (\ln y - 7\ln x)\cdot \ln y$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln x\ln y = \ln^2 y - 7\ln x\ln y;$$

$$\cancel{\ln^2 y - 2\ln^2 x =}$$

$$3\ln x\ln y - 2\ln^2 x - \ln^2 y = 0$$

$$\ln^2 y - 3\ln x\ln y + 2\ln^2 x = 0;$$

$$D = 9\ln^2 x - 8\ln^2 x = \ln^2 x$$

$$\ln y = \frac{3\ln x \pm \ln x}{2}$$

$$-2\sin 7x\cdot\sin 2x - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x\cdot\cos 2x = 0;$$

$$\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x = 0;$$

$$\cos 2x - \sin 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) - \sin 2x = 2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

$$\cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right) = +2\sin\frac{\pi}{4}\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

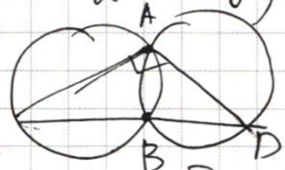
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

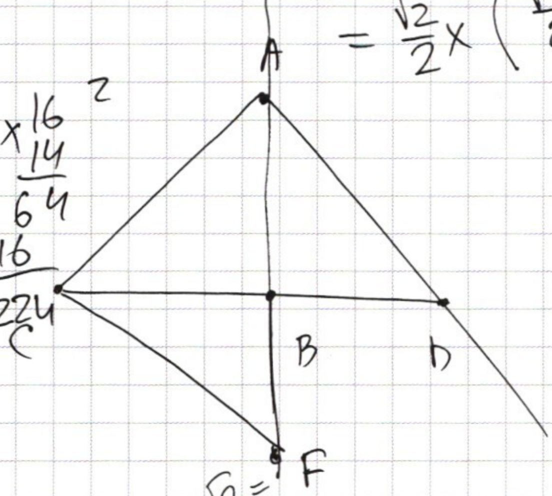
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

$S_o = \left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt2}{2}x + \frac{1}{2}(x\sqrt2 - y)\right)\cdot x\sqrt2 =$

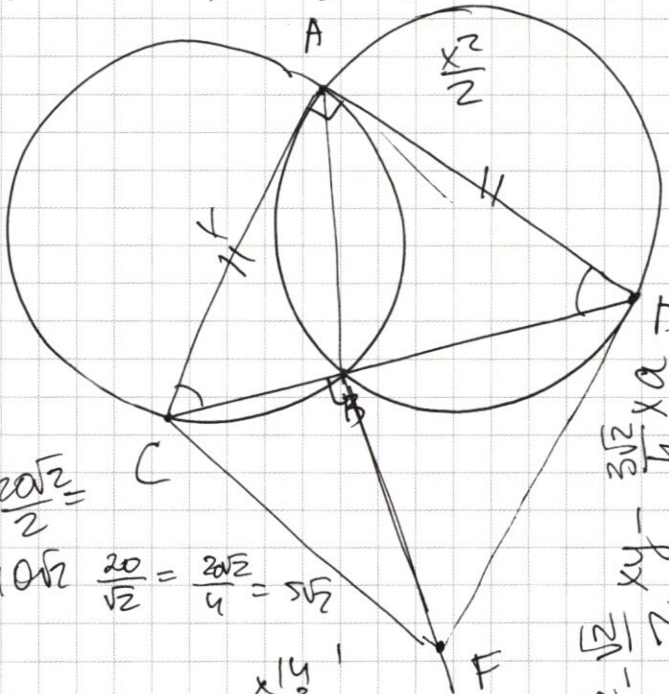
$= \frac{\sqrt2}{2}x\left(\frac{\sqrt2}{2}x + x\sqrt2 - y\right) = \frac{\sqrt2}{2}x\left(\frac{3}{2}\cancel{x}x\sqrt2\ y\right)$

$\begin{array}{r|l} 128 & 2 \\ 64 & 8^2 \end{array}$





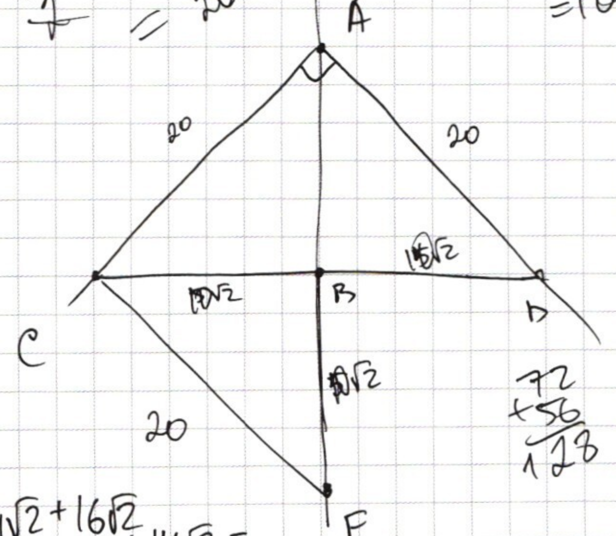
$\times\begin{array}{r}16^{2}\\14\end{array}$
$+\begin{array}{r}64\\16\end{array}$
224



$\frac{x^2}{2}$

$\frac{1}{2}\cdot 10\sqrt2\cdot \cancel{20}\cdot\sqrt2 = = 200;$

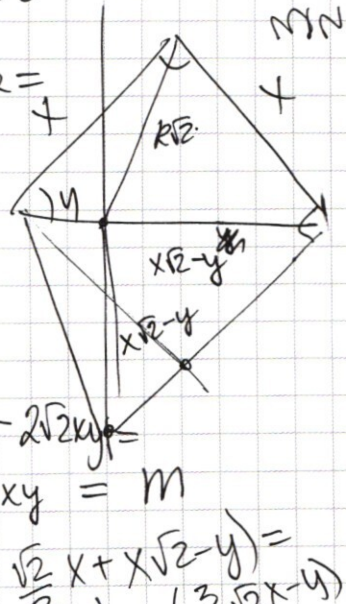
$\frac{20}{\sqrt2} = \frac{20\sqrt2}{2} = 10\sqrt2 \quad \frac{20}{\sqrt2} = \frac{20\sqrt2}{4} = 5\sqrt2$



$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \qquad \times\begin{array}{r}14\\3\end{array} \quad 420$

$a = 2R\sin\alpha = = 2R\cdot\frac{\sqrt2}{2} = = R\sqrt2$

$+\begin{array}{r}72\\56\end{array} \quad 128$



$\frac{3}{2}x^2 - \frac{\sqrt2}{2}xy - \frac{3\sqrt2}{4}xa - \frac{1}{2}ay$

$\frac{14\sqrt2 + 16\sqrt2}{2}\cdot 14\sqrt2 = = 15\sqrt2\cdot 14\sqrt2$

$y^2 + (\sqrt2 x - y)^2 = y^2 + 2x^2 + y^2 - 2\sqrt2 xy = = 2x^2 + 2y^2 - 2\sqrt2 xy = m$

$x^2 + y^2 - 2\cdot\frac{\sqrt2}{2}xy = R\sqrt2;$

$S_{ADF} = \frac{1}{2}\cdot a\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}x + x\sqrt2 - y\right) = = \frac{1}{2}a\left(\frac{3}{2}\sqrt2 x - y\right)$

$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x +$
$+ \sin 5x = 0;$

$\cos 5x(\cos 4x + \sin 4x) - \sin 5x(\cos 4x$

ab 5
cd 4

$ac - bd - \sqrt{2}\cdot c + b\cdot c + d\cdot a + b = 0;$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0;$

$-2\sin 7x \cdot \cos 2x + 2\sin 7x \cos 2x = \sqrt{2}\cos 4x;$

$\cancel{2\cos 2x (\sin 7x}$

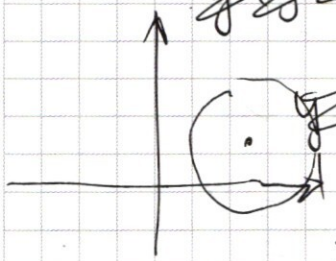
$2\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}\cos 4x$

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$y^2 - 4y + 4 - 4 - (2x^2 - 2\cdot\sqrt{2}x\cdot\sqrt{2}\cdot 2 + 8 - 8) = xy;$

$(y-2)^2 - (\sqrt{2}x - 2\sqrt{2})^2 + 8 = xy;$

$\cancel{y(y-2)} -$



$y+5 \geq x;$

$\cancel{y + (x+5}$

$0 < -(-1)$

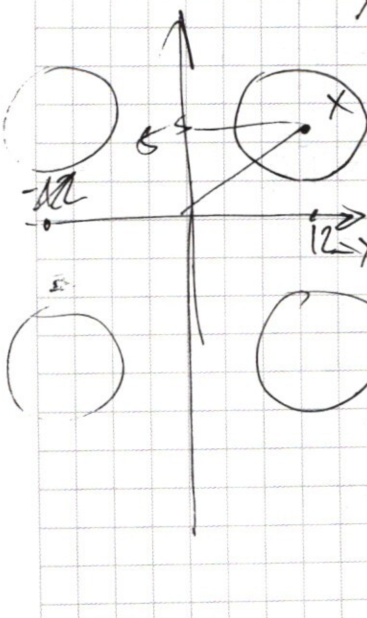
$x + (y+5)$; $|(y+5) - x|$;

$x = 0$ $y+5 = -1$

$x \geq -(y+5)$ $|a - b|$

$-1 - 0$

$x = y+5;$ $b < -a$



$x < -y-5$ $-b > a$

$y < -x-5$ $a - b > 2a$

12 $-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$

$x + y + 5 - y + x - 5 \geq 0$

$-2y = 20$ $2x = 10$

$$\begin{cases} x \geq -y-5 \\ x \leq y+5 \end{cases}$$

$y \geq -x-5$

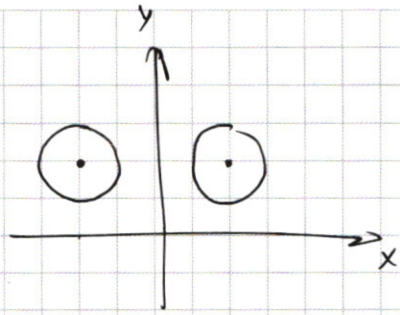
$y \geq x - 5$

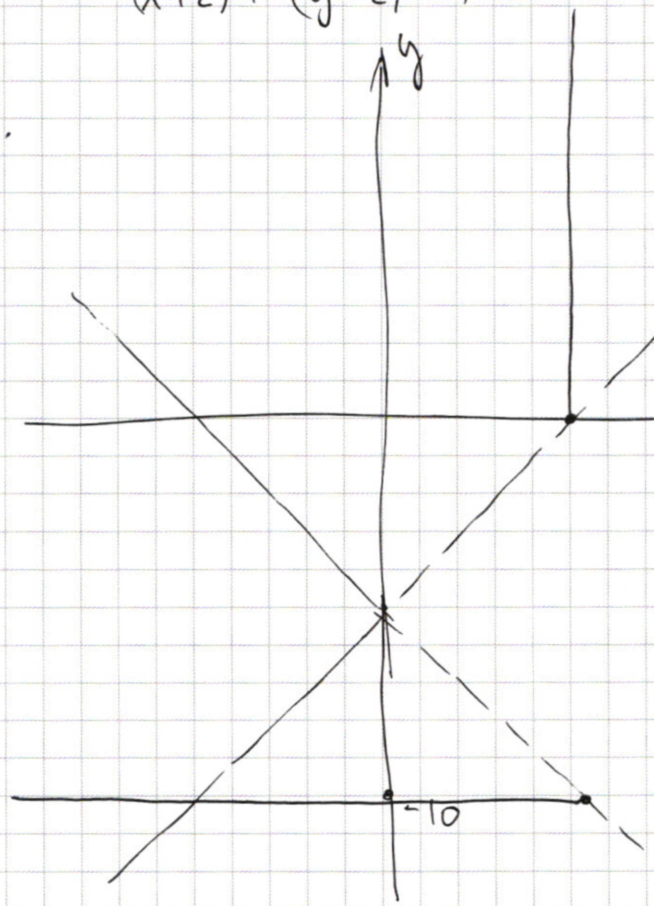
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

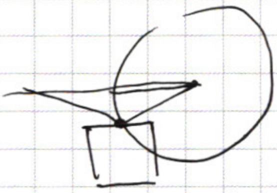
Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$(|x|-2)^2 + (|y|-2)^2 = 1$

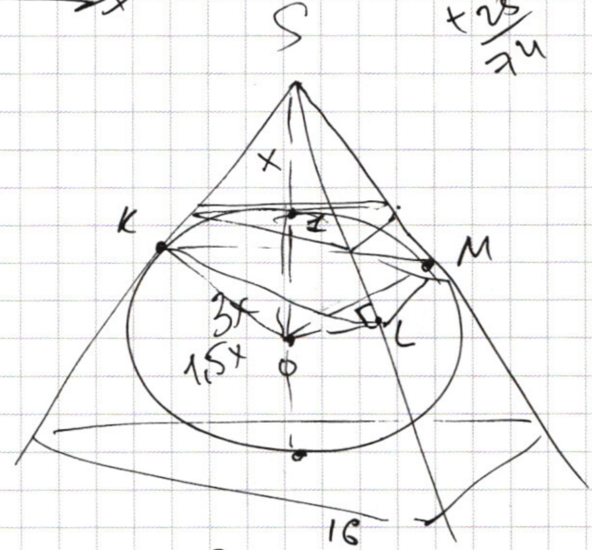
$(x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$

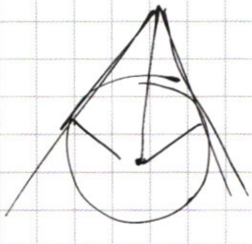






$\begin{array}{r} 49 \\ +\,25 \\ \hline 74 \end{array}$





$\begin{array}{r} \times\,15 \\ 15 \\ \hline +\,75 \\ 15\ \\ \hline 225 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times\,17 \\ 17 \\ \hline +\,119 \\ 17\ \\ \hline 289 \\ +\,225 \\ \hline 514 \end{array}$

$y^2 - y(4+x) - 2x^2 + 8x = 0;$

$D = (4+x)^2 + 8x^2 - 32x =$

$= 16 + 8x + x^2 + 8x^2 - 32x =$

$= (3x)^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y = \frac{4+x \pm (3x-4)}{2} = \left[\begin{array}{l} \frac{4+x+3x-4}{2} \\ \frac{4+x-3x+4}{2} \end{array}\right. = \left[\begin{array}{l} 2x \\ -x+4 \end{array}\right.$

$(y-2x)(y+x-4) = 0;$

$SИ_3 = 4x$

$И_1И_3 = 3x$

$И_3O = \frac{3}{2}x$

$x = 2y$

$SИ_3 = 8y;$

$\begin{array}{r} \times\,196 \\ 2 \\ \hline 392 \end{array}$

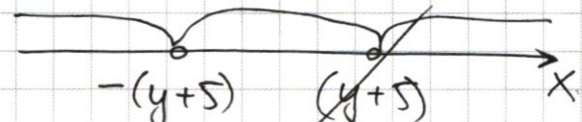
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

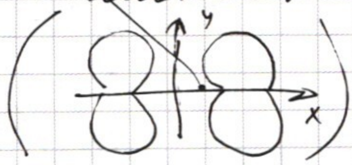
№5 $\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10, \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a, \end{cases}$



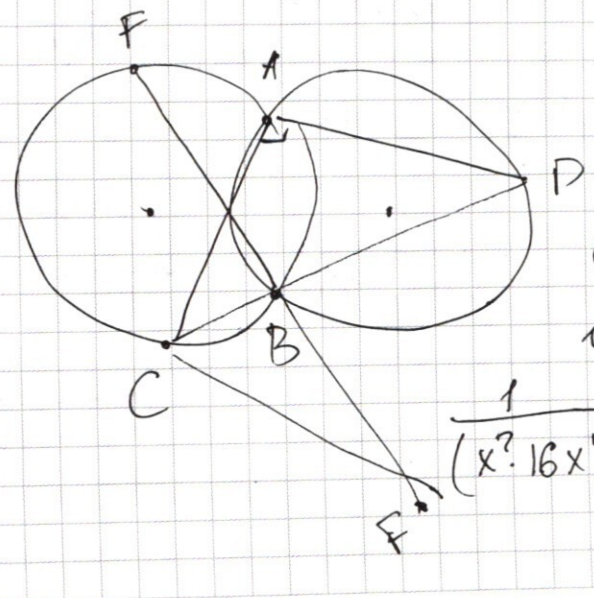
Рассмотрим первое ур-е на трех промежутках:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x< -(y+5), \\ -(x+y+5)-(y-x+5)=10, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[-(y+5);\ y+5], \\ x+y+5-(y-x+5)=10, \end{cases} \\ \begin{cases} x>y+5, \\ x+y+5+y-x+5=10, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<-x-5, \\ -2y=20, \end{cases} \\ \begin{cases} x\geqslant-(y+5), \\ x\leqslant y+5, \\ 2x=10, \end{cases} \\ \begin{cases} y<x-5, \\ 2y=0, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y<-x-5, \\ y=-10, \end{cases} \\ \begin{cases} y\geqslant-x-5, \\ y\geqslant x-5, \\ x=5, \end{cases} \\ \begin{cases} y<x-5, \\ y=0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Второе ур-е системы задает четыре окружности с ~~ц~~ центрами в точках $(12;5)$, $(-12;5)$, $(12;-5)$, $(-12;-5)$ и радиусами $\sqrt{a}$ ($a\geqslant0$ из второго ур-я). Если радиус таков, что окружности выходят за пределы своих четвертей, то на оси они "сливаются".



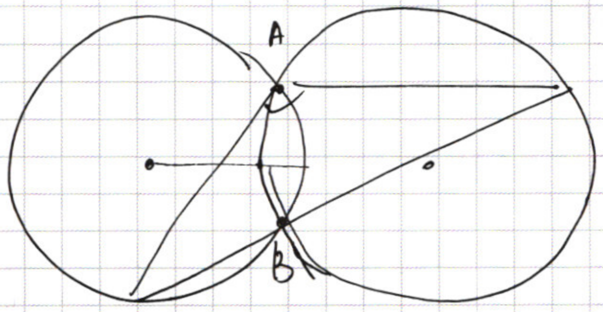
y



$$\frac{1}{(x^7y^4)^{\ln x}}=\frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$$

$y=2x$

$$\frac{1}{(x^7\cdot16x^4)^{\ln x}}=\frac{(2x)^{\ln 2x}}{(2^7x^7)^{\ln x}}$$



$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$(7\cdot 3)^3 = 9261$

$$\begin{array}{r} 49 \\ +25 \\ \hline 74 \end{array}$$

1 7 3

$\sqrt{5^2+7^2} = \sqrt{74}$

$8\cdot 7$

$-2\sin 7x \overset{\sin 2x}{\cancel{\cos 2x}} - \sqrt{2}\cos 4x + 2\sin 7x \cos 2x = 0;$

$\sin 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos 4x = 0;$

$\cos 2x - \sin 2x = \cos 2x - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$ $\sin\frac{\pi}{4}$

$= -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2 2x - \sin^2 2x\right)$

$-2\sin 7x \cdot \sin\frac{\pi}{4}\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - \sin\frac{\pi}{4}\cos 4x = 0;$

$\cancel{4}\quad \sin 7x \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos 4x = 0;$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} = y^{\ln y - \ln x^7} =$

$y^7 = x^7 y^4$

$y^3 = x^2;$

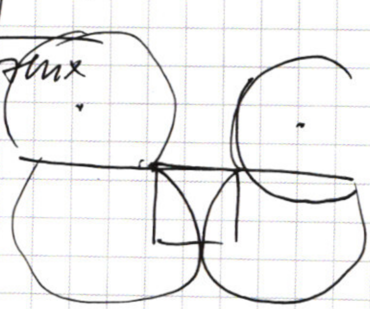
$= \cancel{\frac{1}{y^{7\ln x}}} = \cancel{\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}}}$

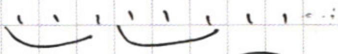
$y^{\ln y}$

$y^{\ln y} = e^{\ln y^{\ln y}} = e^{\ln^2 y} = \left(e^{\ln y}\right)^{\ln y}$

$\frac{1}{(x^2y^4)^{\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$ $\quad \frac{1}{x^{2\ln x}\cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{7\ln x}}$

$\frac{y^{3\ln x}}{x^{2\ln x}} = y^{\ln y}$





☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)