

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$9261 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1$$

Нужно ~~рассмотреть~~ найти количество 8-значных чисел, где есть три 3, три 7 и две 1. Их всего

$$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

Также число может состоять из одной 9, одной 3, ~~одной~~ ~~трех~~ 7 и ~~трех~~ 1. Количество таких

$$\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{1} = 560 \cdot 2 = 1120$$

Всего вариантов — $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

N 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$76 + 2(2^{32} - 1)x = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$34 - x + (x - 6) \cdot 2^{32} = 2^{x-1}$$

$$(2^{32} - 1)(x - 6) = 2^5(2^{x-6} - 1)$$

Очевидно, что $x = 6$ и $x = 38$ корни

$$\text{При } x < 6 \quad (2^{32} - 1)(x - 6) < 2^5(2^{x-6} - 1)$$

$$\text{При } x > 38 \quad (2^{32} - 1)(x - 6) < 2^5(2^{x-6} - 1)$$

Таким образом $x \in [7; 37]$

~~76 + 2(2^{32} - 1)(x - 6) - 2^5(2^{x-6} - 1)~~ — количество пар

$(x; y)$ при определенном x . Сложим все ~~такие~~ значения, где $x \in [7; 37]$

$$\begin{aligned}
 & (2^{32}-1)(1+2+\dots+31) - 2^5(2-1+2^2-1+2^3-1+\dots+2^{31}-1) = \\
 & = (2^{32}-1) \cdot 31 \cdot 16 - 32(2^{32}-33) = 16(31 \cdot 2^{32} - 31 - 2 \cdot 2^{32} + 33 \cdot 2) = \\
 & = 16 \cdot 29 \cdot 2^{32} + 35 \cdot 16 = \underline{464 \cdot 2^{32} + 560} \quad 29 \cdot 2^{36} + 560 \\
 & \text{Ответ. } 29 \cdot 2^6 + 560
 \end{aligned}$$

N5

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$((x)-12)^2 + ((y)-5)^2 = a$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$\text{I } x+y+5+y-x+5=10$$

$$y=0$$

$$x+5 \geq 0; -x+5 \geq 0 \Rightarrow x \in [-5; 5]$$

$$\text{II } x+y+5-y+x-5=10$$

$$x=5$$

$$y+10 \geq 0; -y \leq 0 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y \geq -10$$

$$\text{III } -x-y-5+y-x+5=10$$

$$-2x=10 \Rightarrow x=-5$$

$$-x-y-5 \leq 0; x+y+10 \geq 0 \Rightarrow y \geq -10$$

$$\text{IV } -x-y-5-y+x-5=10$$

$$-2y=20; y=-10$$

$$+x-5 \leq 0; -x-5 \leq 0$$

График на следующей странице.

4 точки по краям - центры окружностей с радиусами $\sqrt{a}$

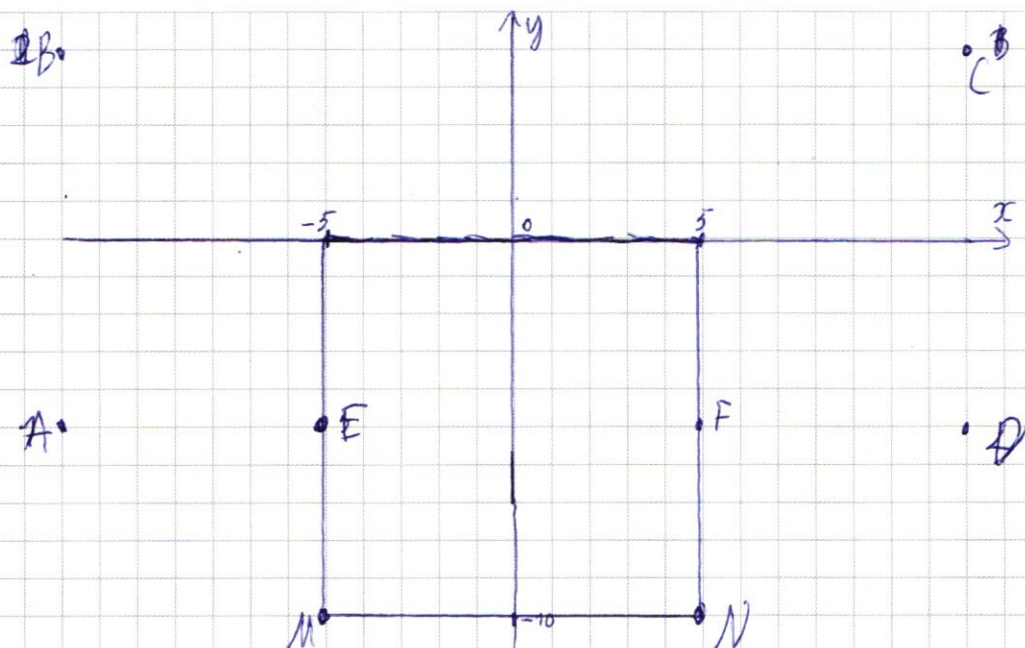
Тип $a < 49$ 0 касаний

Тип $a = 49$ 2 касания ($AE=4$ и $DF=4$)

Тип $a > 49$ > 2 касаний

Тип $a = 516$ 2 касания (BN и CM)

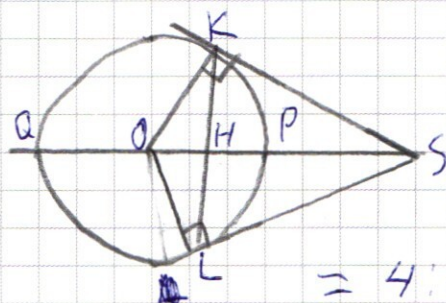
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



При $a > 516$ касаний.

Ответ: 49; 516

N4



Пусть P - пересечение окружности с 1-м сечением, Q со 2-м сечением.
Поскольку $S_a : S_p = 16 : 1$, то $SQ : SP =$

$$= 4 : 1$$

$$SQ = 4SP$$

$$SP + 2r = SQ$$

$$r = 1,5SP$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1,5SP}{2,5SP} = \arcsin \frac{3}{5}$$

Пусть H - пересечение SO с K L, $\angle OHK = 90^\circ \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{SH}{SK} = \frac{4}{5} \Rightarrow SH = \frac{16}{5} SP \Rightarrow \text{Площадь сечения} = \left(\frac{16}{5}\right)^2 = 10,24$$

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5}$; 10,24

N 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x = \cos 5x + \cos 4x - \sin 5x \sin 4x$$

$$\sin 9x = \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x$$

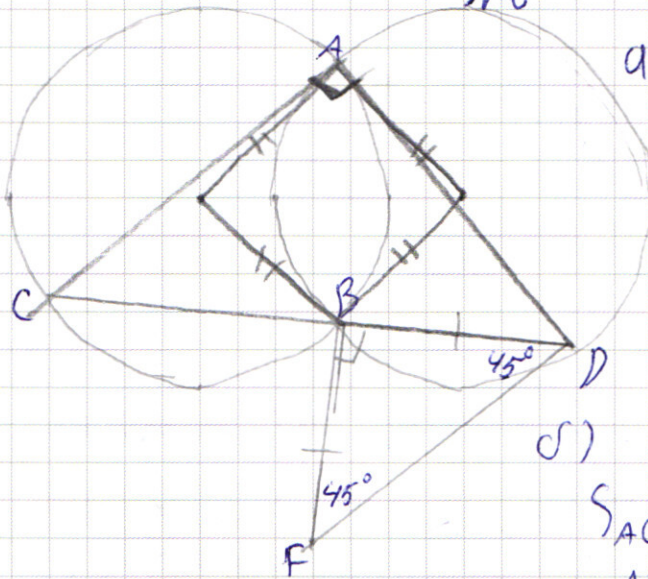
$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x = 0$$

$$(\sin 5x - \cos 5x)(1 - \sin 4x) + \cos 4x(\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + 2\pi n, \frac{\pi}{20} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$

N 6



$$a) CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2}$$

$$CA^2 + AD^2 = CD^2$$

$$R = 10$$

$$CF = 10\sqrt{2}$$

Ответ: $10\sqrt{2}$

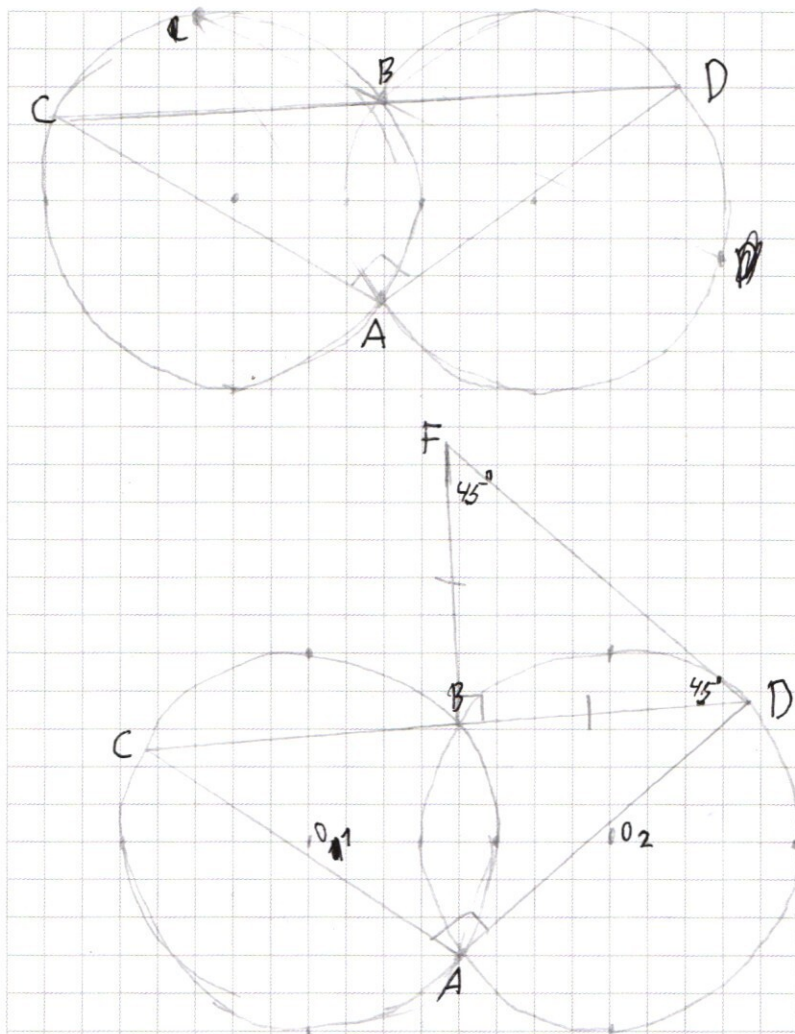
$$b) BC = 12$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot AF = 6AF$$

$$AF = 20\sqrt{2} \Rightarrow S_{ACF} = 120\sqrt{2}$$

Ответ: $120\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos 30^\circ - \cos 90^\circ = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin 30^\circ + \sin 90^\circ$$

$$2 \sin 60^\circ \sin$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

23

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x =$$

$$= 2 \sin 7x \sin 2x + 2 \cos 4x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 4x - 4y = 0$$

$$2y^2 - 2xy - 4x^2 + 16x - 8y = 0$$

$$(y-x)^2 + (y-4)^2 - (x-\frac{8}{3})^2 + \frac{64}{9} - 16 =$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \cos \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \sin \left(\frac{\alpha + \beta}{2} \right) \sin \left(\frac{\alpha - \beta}{2} \right)$$

$$z = (x^2 y^4)^{\ln x} \cdot y^{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$1 = x^{2 \ln x} y^{\ln \frac{y}{x}} = x^{2 \ln x} \cdot y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x} = x^{2 \ln x - \ln x} \cdot y^{\ln y} = x^{\ln x} \cdot y^{\ln y}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta$$

$$\sin \alpha - \sin \beta$$

$$2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin \frac{\pi}{4} x (\sin 2x + \cos 2x) = \sqrt{2} \cos 4x \quad \sin 7x = \cos 4x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x (\sin 2x + \cos 2x) = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

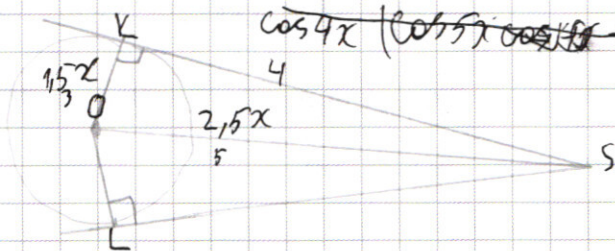
$$\sin 9x = \cos 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x$$

$$\cos 9x = \cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x$$

$$-\cos 5x + \cos 5x \mp (\cos 4x - 1) - \sin 5x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 5x + \sin 4x \cos 5x = \cancel{\cos 5x} (\sin 4x + \cos 4x - 1) - \sqrt{2} \cos 4x +$$

$$\cos 5x (\sin 4x + \cos 4x - 1) + \sin 5x (\cos 4x - \sin 4x + 1) = \sqrt{2} \cos x$$

$$\cos 4x (\cos 5x \cos 4x + \sin 5x - \sqrt{2}) + (\cos 5x + \sin 5x)$$



$$\angle KSO = 90^\circ \text{ in } \frac{3}{5}$$

$$\frac{(16)^2}{5} = \frac{256}{5} = 10\frac{6}{5}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$(\cos 5x - \sin 5x)(\sin 4x - 1) +$$

$$\textcircled{2} + \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{8} \quad \sin 5x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\begin{aligned} \cos 5x - \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \cancel{\sin 5x} \cos 4x + \\ + \sin 4x \cos 5x = 0 \quad (\sin 5x - \cos 5x)(1 - \sin 4x) + \end{aligned}$$

$$(\sin 5x - \cos 5x)(1 - \sin 4x) +$$

$$+ \cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\begin{array}{r} 9 \ 2 \ 6 \ 1 \ 3 \\ 3 \ 0 \ 8 \ 7 \ 3 \\ 1 \ 0 \ 2 \ 9 \ 3 \\ 3 \ 4 \ 3 \ 7 \\ 4 \ 9 \ 7 \\ 7 \ 7 \ 4 \\ 1 \end{array}$$

$$7 \cdot 4 = 28$$

$$\frac{6!}{3!3!} = 20$$

$$20 \cdot 28 = 560$$

$$\frac{8! \cdot 5!}{3!3!3!2!} = 560$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2} = 560$$

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$76 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 - 2x > 2^x + 2^{33}(6-x)$$

$$38 - x > 2^{x-1} + 2^{32}(6-x)$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$1 = y^{\ln(\frac{y}{x})} \cdot y^{4 \ln x} \cdot x^{2 \ln x}$$

$$1 = y^{\ln \frac{y}{x^5}} \cdot x^{\ln x^2}$$

$$y^2 - 4y + 4 - 2x^2 + 8x - 8 + 4 - xy = 0$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 + 4 - xy = 0$$

$$(2^{32}-1)(x-6) = 2^{x-6}(2^{x-6}-1)$$

$$(2^{32}-1)(1+2+\dots+31) - 2^5(2^{-1}+2^2-1+2^3-1+\dots+2^{31}-1)$$

$$(2^{32}-1) \cdot 31 \cdot 16 - 2^5(2^{32}-31 \cdot 3) = 16(2^{32} \cdot 31 - 2^{32} \cdot 2 + 33 \cdot 2^5) =$$

$$= 2^9 \cdot 33 + 2^{32} \cdot 29$$

$$76 + 2(2^{32}-1)x = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$39 + 2^{32}x - x = 2^{x-1} + 3 \cdot 2^{33}$$

$$38 + (x-6) \cdot 2^{32} = 2^{x-1}$$

$$32 + (6-x) + (x-6)2^{32} = 2^{x-1}$$

$$(2^{32}-1)(x-6) = 2^{x-1} - 2^5$$

$$2(2^{32}-1)(x-6) = 2^x - 2^6$$

$$x-6; 2^5 \quad x > 6$$

$$x-6; 2^{x-1} \quad x < 6$$

$$x=6 - \text{корень}$$

$$(2^{32}-1)(x-6) = 2^5(2^{x-6}-1)$$

$$x = 38$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ ((|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

I $y=0; y+5 > x$
 $y+5 > -x$

II $x+y+5 - y+x-5 = 10$
 $x=5$

$$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 & y+10 \geq 0 \\ y-x+5 \leq 0 & y \leq 0 \end{cases} \quad -10 \leq y \leq 0$$

~~III $x-y-5+y-x+5=10$
 $-2x=10$
 $x=-5$~~

$-x-y-5+y-x+5=10$
 $-2x=10 \Rightarrow x=-5$
 $-y < 0 \Rightarrow y > 0; y+10 > 0$

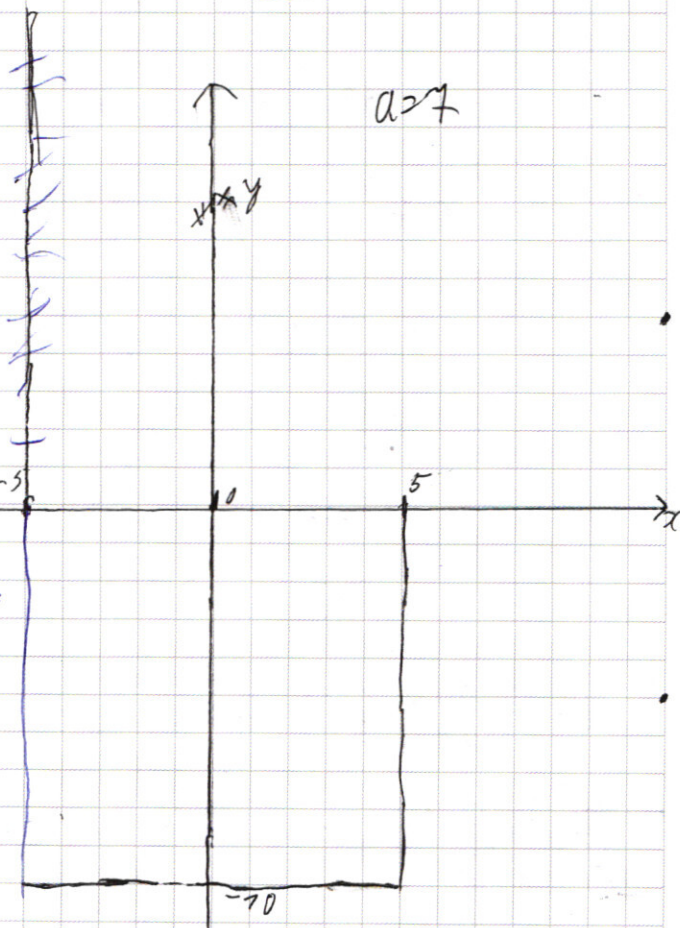
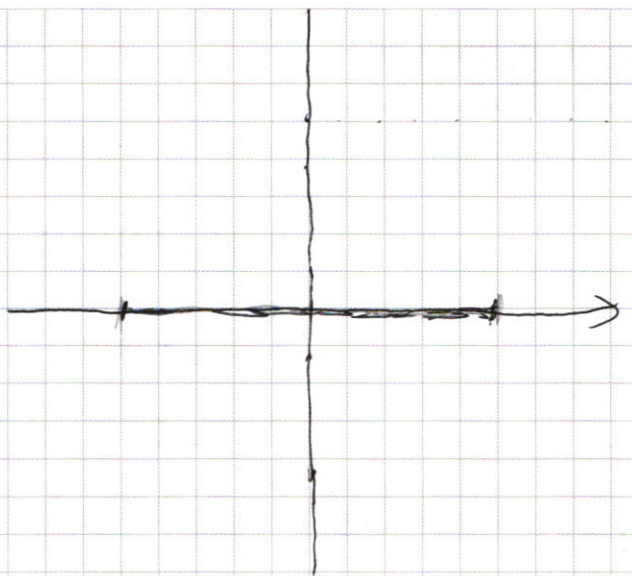
IV $-x-y-5-y+x-5=10$
 $-2y=20$
 $y=-10$

$x+y+5 < 0 \quad x < 5$

$y-x+5 < 0 \quad -5 < x$

x -переменная $\Rightarrow$ -2 точки

$$75^2 + 17^2 = 225 + 225 + 60 + 4 = 516$$





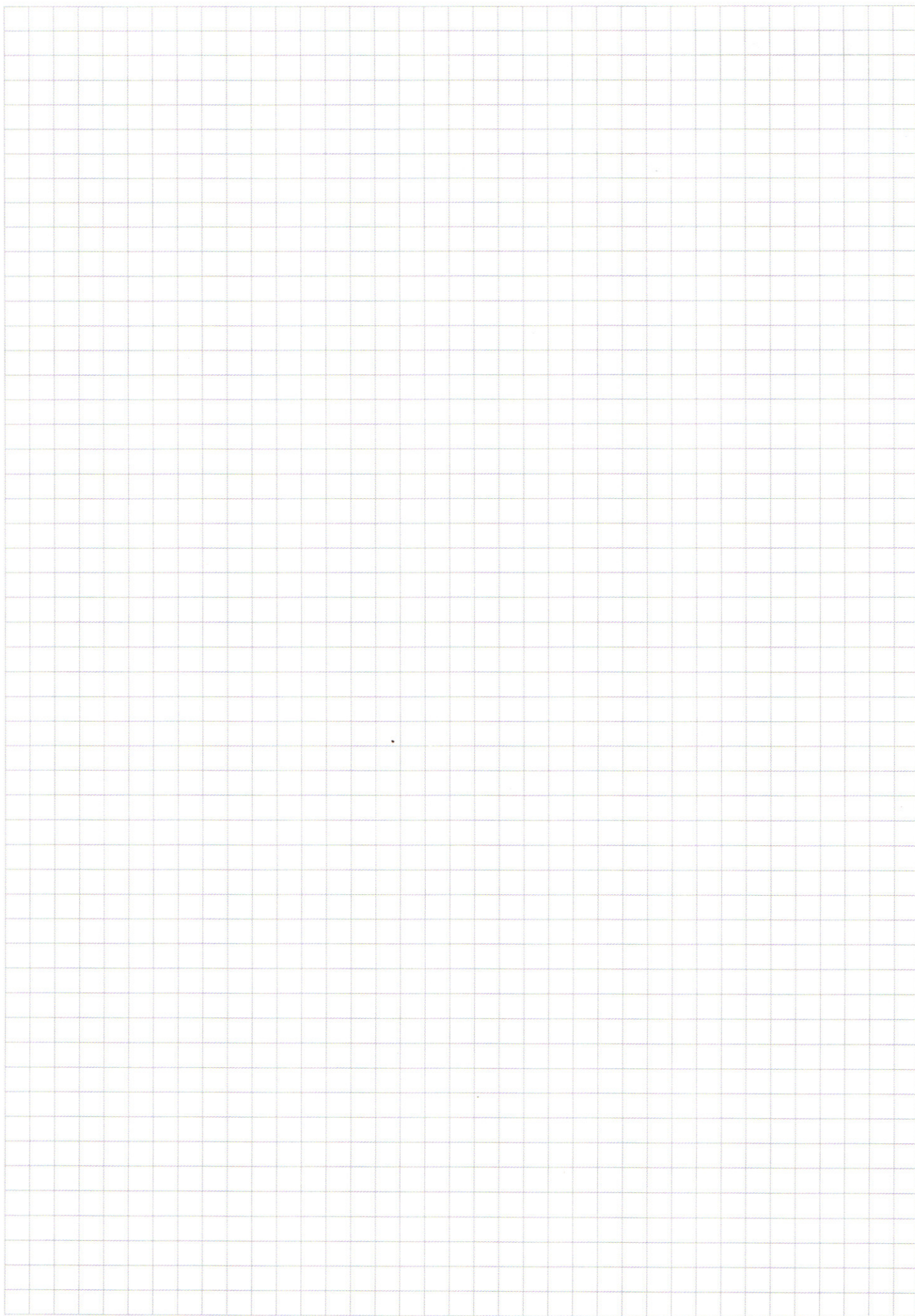
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)