

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) т.к. $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, то необходимо, чтобы число содержало ровно три 7-ки. Более того, число не может содержать нули, иначе произведение было бы равно нулю. Чтобы произведение сохранялось равным 9261, необходимо ~~и~~ отсутствие других цифр кроме 7-ки, 3-ки, 9-ки и 1-цы.

2) Итого 2 вида чисел: а) состоящие из 3 7-к, 3 3-ек и единиц. б) сост. из 3 7-к, 3-ки, 9-ки и единиц.

Тогда кол-во чисел типа а): $\frac{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6}$, а типа б):

$$\frac{8 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4}{6}$$

$$\text{Итого: } 8 \cdot 7 \cdot 10 + 8 \cdot 7 \cdot 20 = 56 \cdot 30 = 1680$$

Ответ: 1680

22.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$\sin 7x = \sin(x + \frac{\pi}{4});$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$$

$$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi m; m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m; m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n; n \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi m; m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1): $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

1-ый модуль раскрываем
не меняя знак при $y > -x-5$
2-ой - при $y > x-5$

Плоскость разбилась на 4 части (I, II, III, IV)

Построим для каждой свой график:

I: $x+y+5+y-x+5=10;$
 $y=0$

II: $x+y+5-y+x-5=10$
 $2x=10; x=5$

III: $-x-y-5-y+x-5=10$

$2y=-10; y=-5$

IV: $-x-y-5+y-x+5=10$
 $-2x=10; x=-5$

Получили квадрат со стороной 10.

(2): $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$

аналогично прямые $x=0$ и $y=0$ разбивают плоскость на 4 части, откуда в каждой из частей свой график:

a) $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ - окружность, верш. (12; 5) $R = \sqrt{a}$

б) $(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$ верш. (-12; 5); $R = \sqrt{a}$

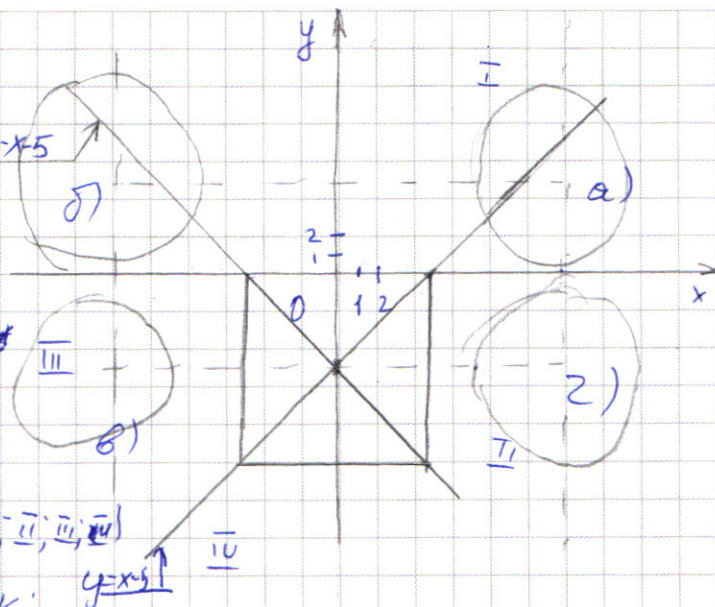
в) $(x+12)^2 + (y+5)^2 = a$; верш. (-12; -5); $R = \sqrt{a}$;

г) $(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$; верш. (12; -5); $R = \sqrt{a}$

3) очевидно, что система имеет 2 решения в 2-ух случаях: 2 нижние окружности касаются квадрата, тогда $12-5 = \sqrt{a}; a=49;$

и 2 верхние окр. проходят через нижние вершины квадрата, тогда $a^* = (5+10)^2 + (12+5)^2 = 225 + 289 = 514.$

чтобы убедиться, что нижние окр не ~~касаются~~ пересекают квадрат подставим самую дальнюю от центра той из них точку квадрата:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

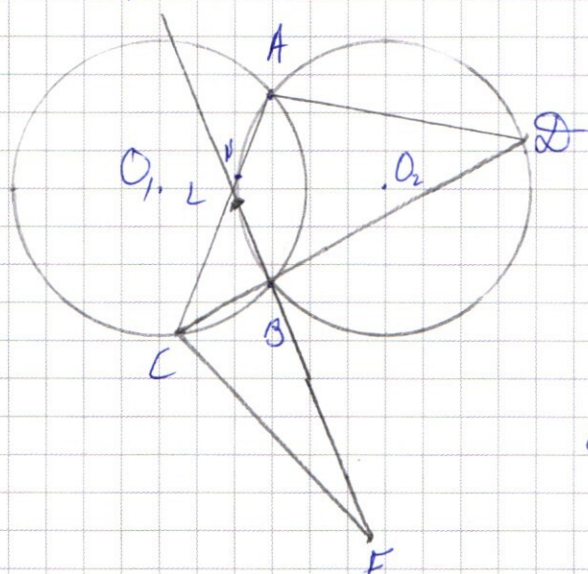
$$(-5; 0); (0-12)^2 + (-5+5)^2 = 514$$

$514 > 144$, следовательно при $a=514$ равно 2 решения.

Ответ: 49; 514.

№ 6.

Решение:



1) Пусть L - точка пересечения BF и

окр O_2 , а N - тог. пересечения

AC и O_1 , то $\triangle ABL \sim \triangle ACD$

по 3-м $\angle$ -ам, следовательно,

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CL}{CD};$$

а по св-ву секущих:

$$CN \cdot CA = CB \cdot CD; \quad \frac{BC}{CN} = \frac{CA}{CD},$$

откуда $CN = CL$, следовательно N и L - совпадают, т.к. $\angle B = 90^\circ$;

DL - диаметр; $\triangle DLB = \triangle BCF$ по 2 сторонам и $\angle$ -ам

между ними, откуда $CF = DL$ - соответств. стороны.

$$CF = 2R = 20;$$

2) по т. Пифагора $BF = \sqrt{CF^2 - BC^2} = 16$; $BD = BF = 16$; $CD = 28$;

т.к. $BL = BC$; $BL = 12$; $CL = 12\sqrt{2}$; - по т. Пифагора.

по св-ву секущих: $CA \cdot CN = CN^2 + CN \cdot AN = CB \cdot CD$

$$CA = \frac{12 \cdot 28}{12\sqrt{2}} = 14\sqrt{2};$$

$\angle ACD = 45^\circ$, т.к. $\triangle BCL$ - равнобедр.

$$\sin(\angle ACF) = \sin \angle ACD \cos \angle BCF + \sin \angle BCF \cos \angle ACD;$$

$$\sin \angle ACF = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10},$$

$$S_{ACF} = \frac{CA \cdot CF}{2} \sin \angle ACF = \frac{14\sqrt{2} \cdot 20}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 196$$

Ответ: 20; 196.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2): y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y+x)^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(x+y)^2 - 3x(x+y) + 4(x-y) = 0$$

$$(x+y)(y-2x) + 4(2x-y) = 0$$

$$(2x-y)(4-x-y) = 0$$

$$x = \frac{y}{2}; \quad x = y + 4 - y;$$

при $x = \frac{y}{2}$; (1): $\left(\frac{y^6}{4}\right)^{-\ln \frac{y}{2}} = y^{\ln \frac{2^7}{y^6}}$

$$\frac{y^6}{4} = y^{-\log_{y/2} \frac{2^7}{y^6}} = y^{-\log_{y/2} 2 + \log_{y/2} \frac{y^6}{2^6}};$$

$$y^{-\log_{y/2} 2} = \frac{1}{4}$$

$$y^{\log_{y/2} 2} = 4;$$

$$2^{\log_{y/2} y} = 4;$$

$$\log_{y/2} y = 2; \quad y = 4, x = 2.$$

при $x = 4 - x$ ~~решений нет.~~ (2; 4)

$$(1): (4-y)^2 y^4 = y^{-\log_{(4-y)} \frac{y}{y^4}}$$

$$(4-y)^2 = y^{-\log_{(4-y)} \frac{y}{(4-y)^3}} = y^3 y^{-\log_{4-y} y}$$

решений нет.

Ответ: (2; 4).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 37

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{33} - 1)x \end{cases}$$

найду точки пересечения

графиков:

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + (2^{33} - 2)x;$$

Реш. Между эти точки перебором

пытаюсь освободиться от свободных членов $3 \cdot 2^{34}$ и 76

$$x_1 = 38 \text{ при этом: } 16 \cdot 2^{34} + 3 \cdot 2^{34} = 76 - 76 + 19 \cdot 2^{34} - \text{верно,}$$

след $x = 38$ - корень;

$$x_2 = 2; \quad 2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 3 \cdot 2^{34} - 12; - \text{верно, след } x = 2 \text{ тоже корень.}$$

пусть $\triangle AOB$ - $\triangle$ -к 1 сторона, которого $\parallel$ ох и проходит

через точку пересеч. $x = 38$; а 2-ая $\parallel$ оу и прох. через тог.

$x = 38$, тогда найду целые решения в этом $\triangle$ -ке:

$$1(2^{33} - 2) + 2(2^{33} - 2) + 3(2^{33} - 2) + \dots + 30(2^{33} - 2) - 30; - \text{сумма арифм. прогр.}$$

$$= \frac{(2^{33} - 2) + 30(2^{33} - 2)}{2} \cdot 30 - 30$$

р. $y = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$ определяет реш., которые нам не подходят

$$\text{Всего их: } 2^7 - 2^6 + 2^8 - 2^6 + \dots + 2^{37} - 2^6 = (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{37}) - 30 \cdot 2^6$$

$$= \frac{2^7(2^{30} - 1)}{(2 - 1)} - 30 \cdot 2^6$$

$$\text{Тогда целых решений: } 31 \cdot 15(2^{33} - 2) - 30 - 2^7(2^{30} - 1) - 30 \cdot 2^6 =$$

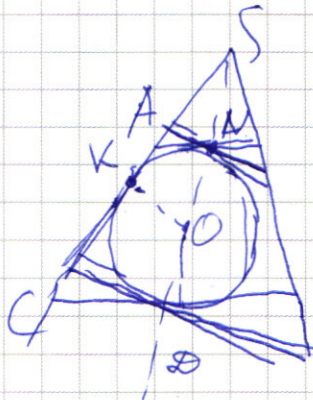
$$= 31 \cdot 30 \cdot 2^{32} - 31 \cdot 30 - 30 - 30 \cdot 2^6 - 2^{37} - 2^7 = 898 \cdot 2^{32} - 1087$$

Ответ: $898 \cdot 2^{32} - 1087$.

№ 4

Решение:

1) Перерисуем плоскость KSO :



$$\triangle ASN \sim \triangle CSO; k = \frac{1}{6};$$

$$\triangle SKO \sim \triangle SCS;$$

$$\frac{KO}{CS} = \frac{SK}{SN + NO};$$

$$\frac{KO}{AN} = \frac{SK}{SN};$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) \begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ -9 \\ \hline 026 \\ -18 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ -9 \\ \hline 12 \\ -9 \\ \hline 3 \\ 343 \overline{) 3} \\ -3 \\ \hline 0 \end{array}$$



$$\cos \frac{3\pi}{4} = \cos \pi = -2 \sin \frac{3\pi}{4} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3; \quad 3 \cdot 7 - k\pi, \quad 3 \cdot 9 - k\pi, \quad \text{или } 3 \cdot 7k\pi \text{ и } 3 + 9.$$

$$2) \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin x) - \sqrt{2} (\cos x - \sin x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\sin 7x - \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) = 0$$

$$3) \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x^{2 \ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^3}} \quad x = -2 \frac{\ln y/x^3}{\ln x},$$

$$x = y^{-2 \log_x \frac{y}{x^3}} = y^{-2 \log_x y + 6} = y^{-2 \log_x y + 6}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = (y-x)^2 + xy - 3x^2 + 8x - 4y;$$

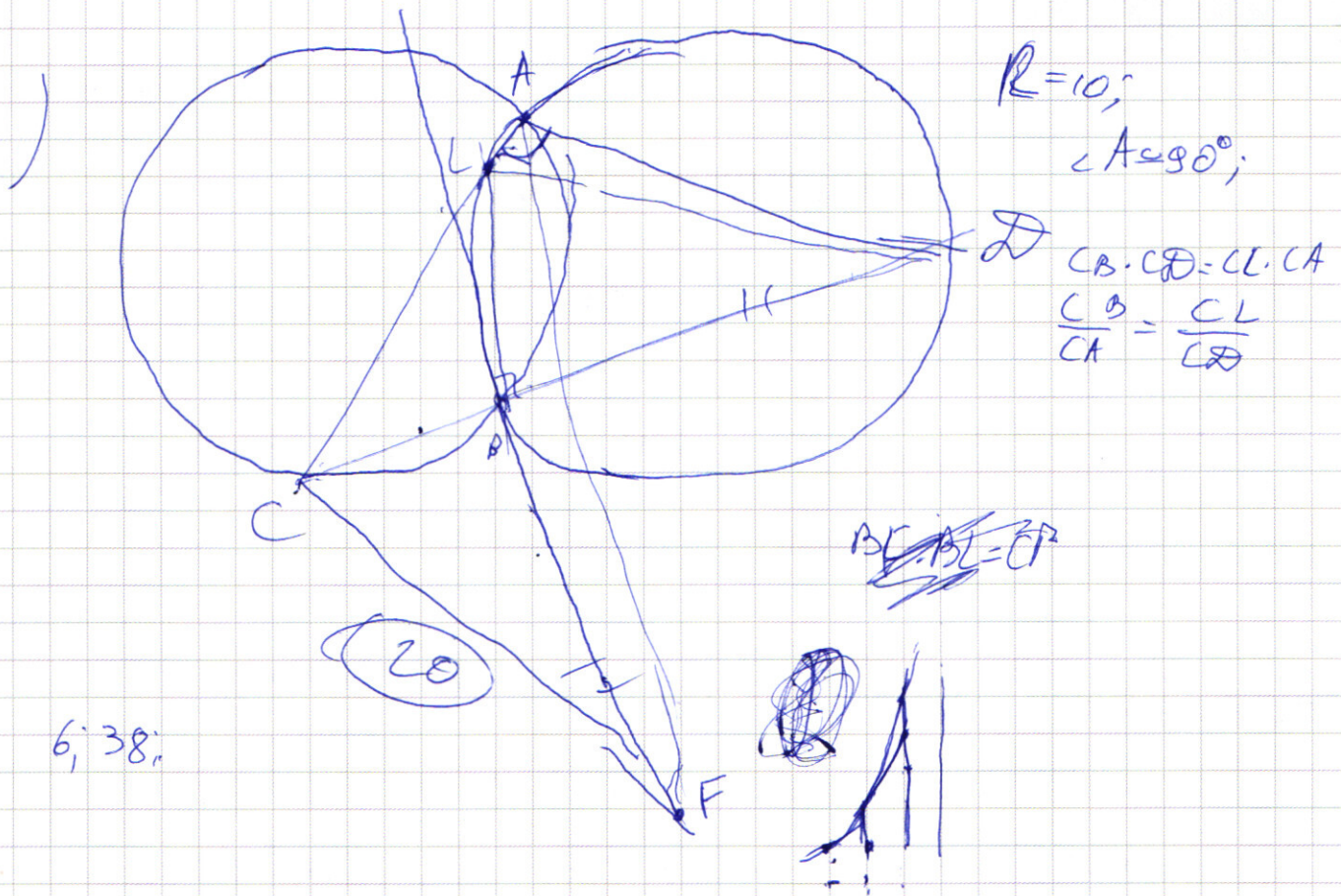
$$= (y+x)^2 - 3xy - 3x^2 + 8x - 4y; \quad (y+x)(y+x-3x) + 4(2x-y) = (2x-y)(y-y-x) = 0$$

$$x = \frac{y}{2}; \quad x = y - y; \quad \left(\frac{y^6}{y^2} \right)^{-\ln \frac{y}{2}} = y^{\ln \frac{128}{y^6}}$$

$$\left(\frac{y^6}{4} \right) = y^{-\log_{y/2} \frac{y^6}{4}} = 5 - \log_{y/2} 2;$$

$$y^{-\log_{y/2} 2} = \frac{1}{4} \quad -\log_{y/2} y = \frac{1}{4}; \quad \log_{y/2} y = 2;$$

$$y = \frac{y^2}{4}; \quad y = 4$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

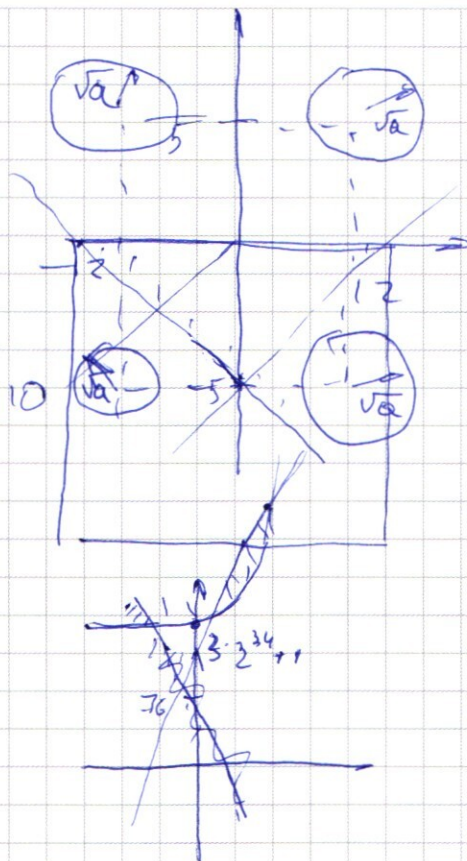
$$5) \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

~~$$x > -5, y > 5$$~~

~~$$y > 0, y = x - 5$$~~

$$y > -x - 5; y > -5 + x$$



~~6) 7)~~
$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{24} = 76 + 2 \cdot 2^{32} - 2x$$

$$2^x + 2x = 76 + 2^{33} (x - 6) = 76 - 5 \cdot 2^{33}$$

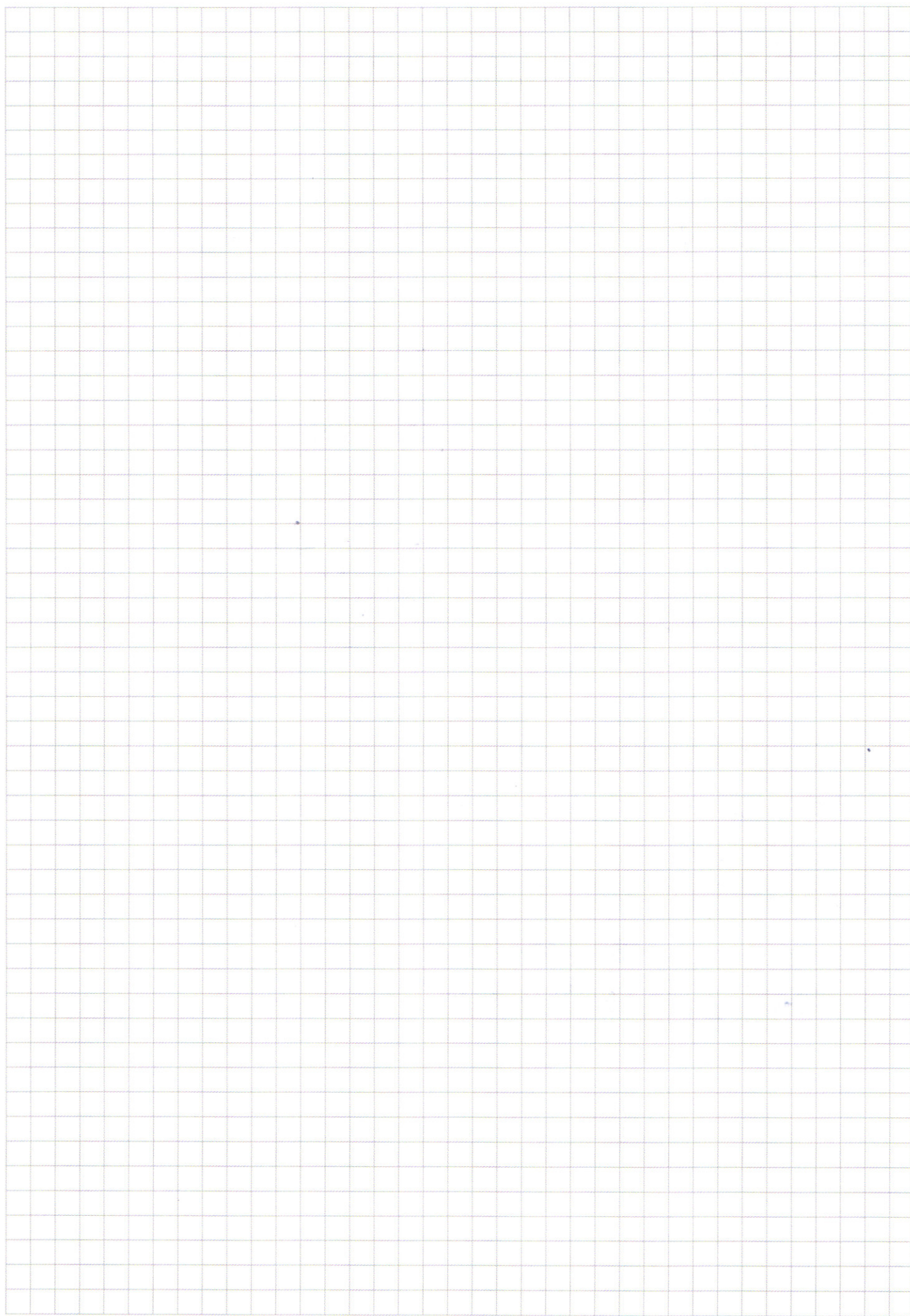
~~$$2^x \geq -2x + 76 - 5 \cdot 2^{33}$$~~

~~$$2^x = 2^x = (2^{33} - 2)x + 76 - 3 \cdot 2^{34}$$~~

$$64 = 76 - 12; x = 6; \text{ не } x \in \mathbb{Z};$$

~~$$x = 18 \cdot 2^{34};$$~~
$$(x = 38; 162^{384} = 19 \cdot 2^{34} - 76 + 76 - 3)$$

нет решений;



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x = y$; $(y-y)^2(y^4) = y$

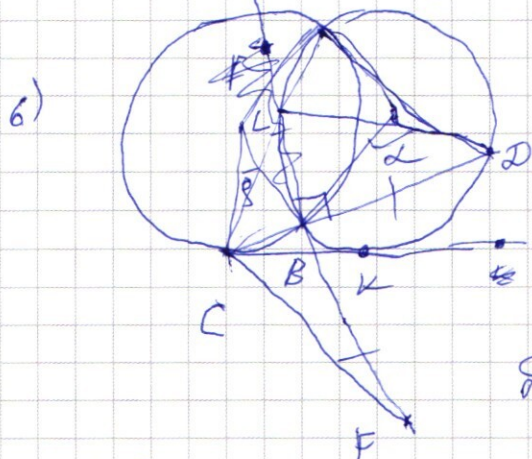
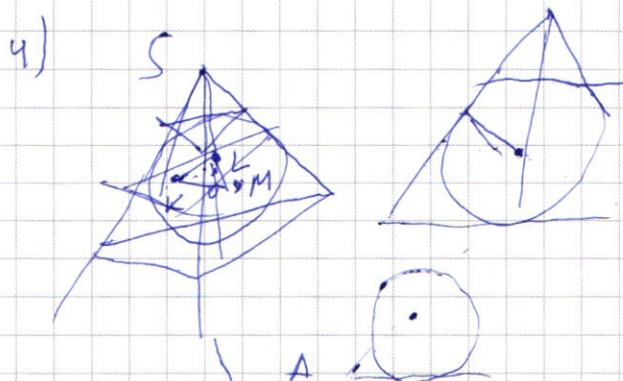
$$x^2 y^4 = y^{-\log_x \frac{y}{x}}$$

$$(y-y)^2 = y^{-\log_{y-y} \frac{y}{y-y}} = y$$

$$(y-y)^2 = y^{-\log_{y-y} \frac{y}{y-y}}$$

$$y^{-\log_{y-y} y} + 3 \quad y^3 \cdot y^{-\log_{y-y} y}$$

$$y^2 - 8y + 16 = \dots$$



$$\angle DCK = \frac{1}{2} \cup BC = \frac{1}{2} (\angle DK - \angle BK);$$

$$\cup BC = \cup DK - \cup BK; \quad \cup BC = \cup BK;$$

$$\cup DK = 2 \cup BC$$

$$\sin \alpha = \sin 3\beta = 3 \sin \beta - 4 \sin^3 \beta$$

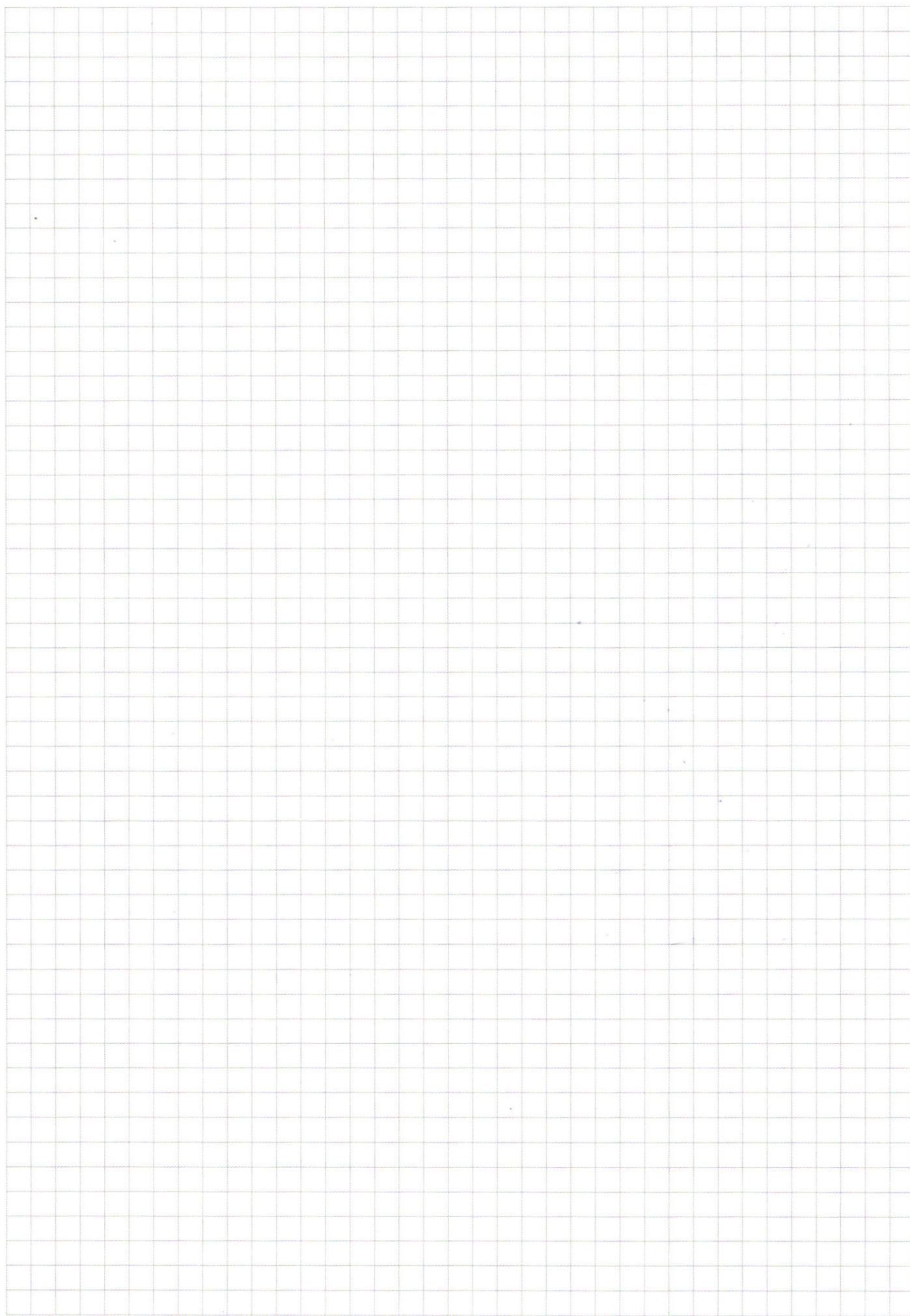
$$DK = 20 \cdot \sin \alpha;$$

$$BC = 20 \cdot \sin \beta; \quad CF = 20 \sqrt{\sin^2 \beta + 9 \sin^2 \beta - 4 \sin^4 \beta + 16 \sin^6 \beta}$$

$$CL \cdot CA = CB \cdot CD; \quad 400 = AL^2 + AD^2; \quad CD^2 = AD^2 + CL^2;$$

$$400 = AL^2 + CD^2 - CL^2.$$

$$CL^2 + LA \cdot CL = CB^2 + CB \cdot BD; \quad 400 = AL^2 + CB^2 + 2CBBD + BD^2 - CL^2;$$





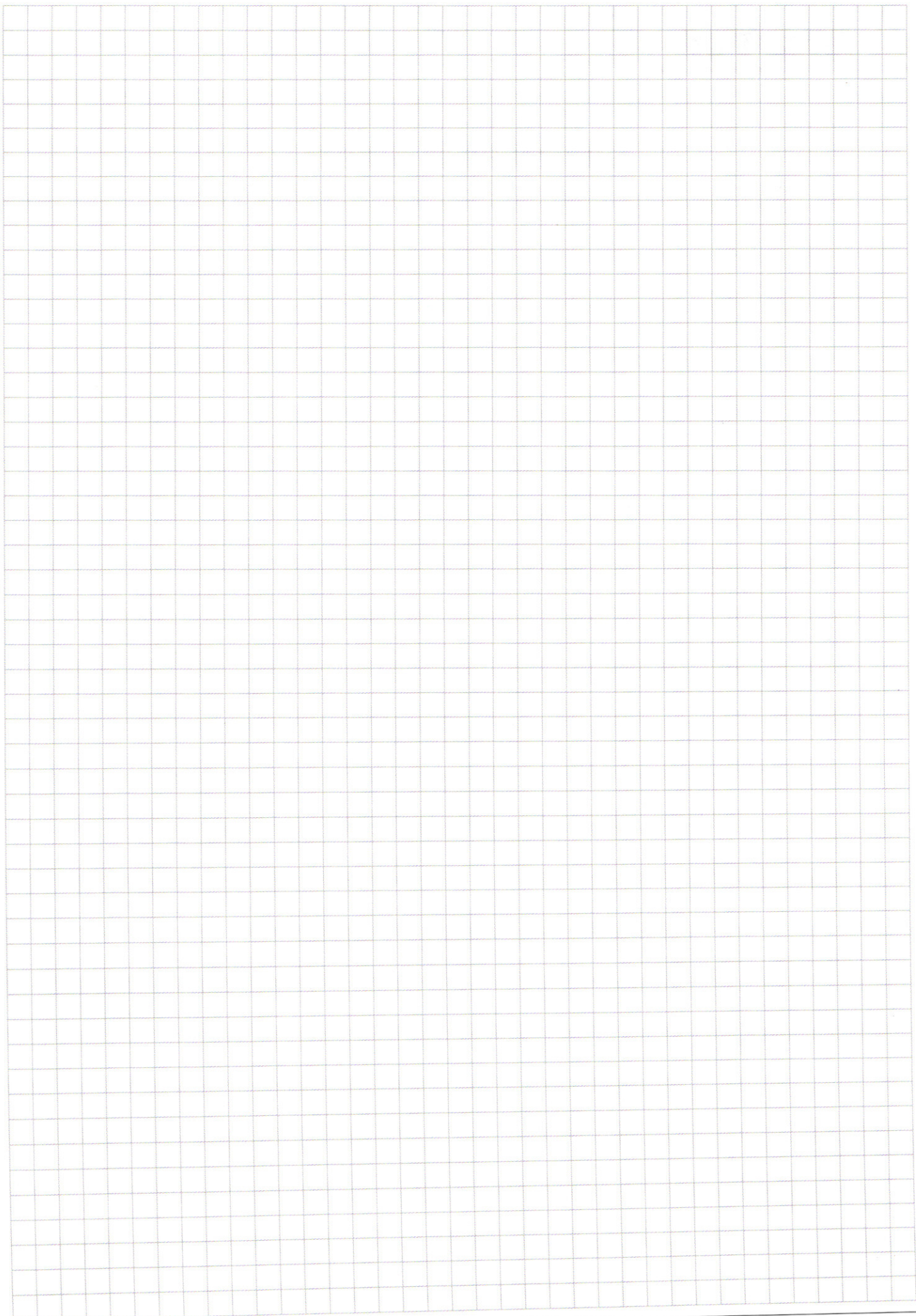
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)