МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО М

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

Произведение этих цифр равно $3^3 \cdot 7^3$ => цифры могут быть:

777 33311

77793111

$7 \cdot 7 > 9$

$9 \cdot 3 > 9$ значит только эти два набора цифр

Тогда кол-во чисел: $\frac{8!}{3!3!2!} + \frac{8!}{3!3!} = \frac{3}{2} \cdot \frac{8!}{3!3!} = \frac{3}{2} \cdot \frac{4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8}{6} =$

$= 3\cdot20\cdot7\cdot4 = 21\cdot4\cdot20 =$

$= 84\cdot20 = \underline{1680}$

перестановка 8 объектов, некоторые из них одинаковые

Ответ: 1680

Задача 3

Рассмотрим 1е уравнение: $(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)}$

$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x} = y^{\ln y} \cdot y^{-7\ln x}$

$e^{-2} \cdot y^{-4\ln x} = e \cdot y^{-7\ln x} \quad | \cdot y^{7\ln x} e^2$

$y^{3\ln x} = e^3$

$y^{\ln x} = e$

$y = x$

Тогда:

$$\begin{cases} y = x \\ y > 0 \\ x > 0 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x \\ x > 0 \\ x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x > 0 \\ -2x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x > 0 \\ 2x(2 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x > 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Ответ: $x = 2; y = 2$

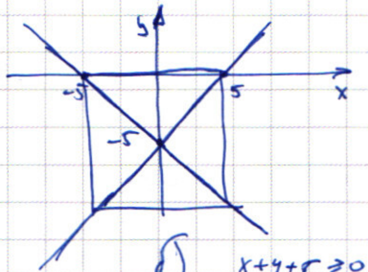
Задача 5

1) Рассмотрим 1е уравнение:

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

Ищем 4 варианта, определяющиеся положением относительно прямых $x+y+5=0$, $y-x+5=0$

Эти графики:



а) $x+y+5 \geq 0$
$y-x+5 \geq 0$
$x+y+5+y-x+5=10$
$y=0$

б) $x+y+5 \geq 0$
$y-x+5<0$
$x+y+5-y+x-5=10$
$x=5$

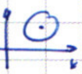
в) $x+y+5<0$
$y-x+5 \geq 0$
$x=-5$

г) $x+y+5<0$
$y-x+5<0$
$y=-10$

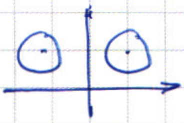
Тогда графиком первого уравнения: квадрат со стороной 10 и центром $(0;-5)$

2) Рассмотрим второе уравнение:

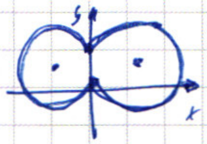
Для начала: $(x-12)^2+(y-5)^2=a$ – окр. с ц. $(12;5)$ и радиусом $\sqrt{a}$



Далее: $(|x|-12)^2+(y-5)^2=a$ – отражённый относительно Oy предыд. графика (часть $x<0$ убирается):



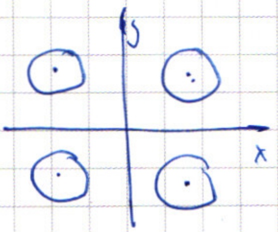
или



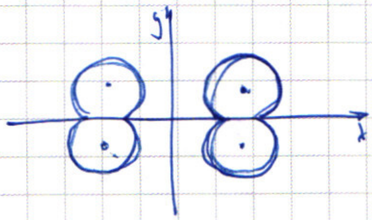
Далее: $(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$ –

отражённый предыдущий график (отн. OX)

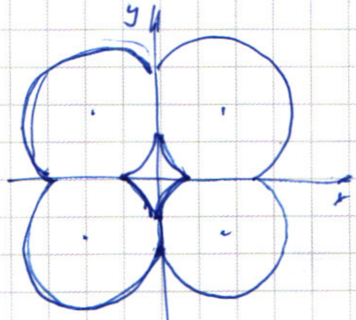
В итоге имеем графики:



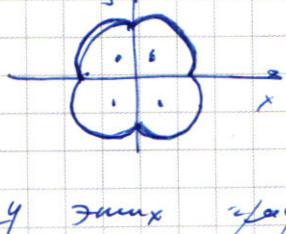
или



или



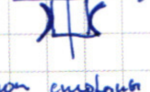
или

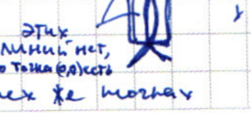


Заметим также, что центры нижних окружностей лежат на одной прямой с центром квадрата

3) Когда у этих графиков может быть ровно 2 точки пересечения:

а) Нижние окр. касаются квадрата





б) Левые и правые части графиков пересекают стороны в одних и тех же точках

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

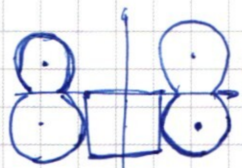
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Почему других нет: рассмотрим по мере увеличения a

$a<0$ окружностей вообще нет
$a=0$ – точки
$a>0$, но не касается } нет. корней

a такое, что окр. касаются, ровно 2 корня



a такое, что окр. пересекают бок. стор.

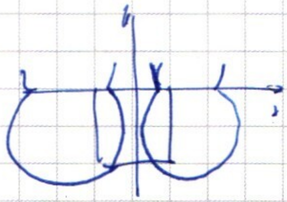
4 корня

a такое, что окр. перес. углы

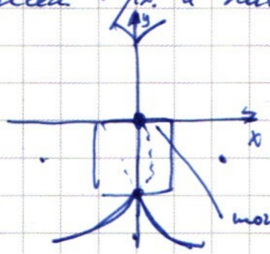
4 корня

a такое, что пересек. верх. и ниж. ст., но до середины

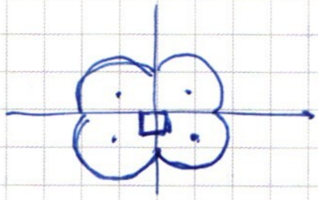
4 корня



дальше в середине



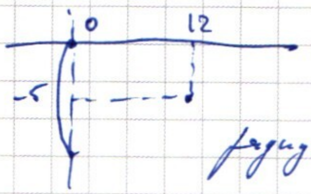
дальше нет корней!



а)

радиус равен $12-5=7 \Rightarrow a=49$

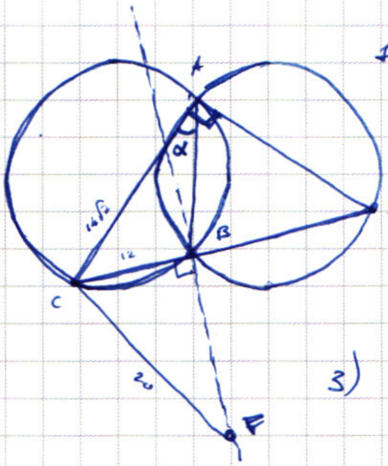
б)



радиус $\sqrt{5^2+12^2}=13 \Rightarrow a=13^2=169$

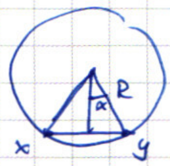
Ответ: при $a \in \{49; 169\}$

Задача 6



1) Пусть $\angle CAB = \alpha$, тогда $\angle DAB = \frac{\pi}{2} - \alpha$

2) для хорды, опирающейся на дугу 2α верно:



$XY = 2R\sin\alpha$

3) CB опир. на дугу $2\alpha \Rightarrow CB = 2R\sin\alpha$

BD опир. на дугу $2(\frac{\pi}{2}-\alpha) \Rightarrow BD = 2R\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha) =$
$= 2R\cos\alpha$

4) $\angle CBF = 90^\circ \Rightarrow CF^2 = CB^2 + BF^2 = CB^2 + BD^2 = (2R)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = (2R)^2$

Отсюда $CF = 2R = 20$

5) $BC = 2R\sin\alpha = 12$
$\sin\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow BD = 2R\cos\alpha = 16$, также заметим, что $\angle CFB = \alpha$

По т. синусов: $\frac{AC}{\sin ABC} = 2R = \frac{AD}{\sin ABD} = \frac{AD}{\sin(\pi - \angle ABC)} = \frac{AD}{\sin ABC}$

из других уже окружности

$\Downarrow$

$AC = AD \Rightarrow$
$\triangle ACD$ – р/б и прямоуг $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ACD = \frac{\pi}{4}$, $AC = \frac{CD}{\sqrt2} =$
$= \frac{28}{\sqrt2} = 14\sqrt2$

6) $S_{ACF} = \frac12 AC \cdot CF \cdot \sin ACF =$
$= \frac12 \cdot 14\sqrt2 \cdot 20 \cdot \sin(\angle ACB + \angle BCF) = 140\sqrt2 \cdot (\sin\frac{\pi}{4} + (\frac{\pi}{2} - \alpha)) =$
$= 140\sqrt2 \ \sin(\frac{3\pi}{4} - \alpha) = 140\sqrt2\,(\sin\frac{3\pi}{4}\cos\alpha - \cos\frac{3\pi}{4}\sin\alpha) =$
$= 140\sqrt2\,(\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac45 + \frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac35) = 140\sqrt2\,\frac{7}{5\sqrt2} = 28\cdot 7 =$
$= 140 + 56 = 196$

Ответ: $CF = 20$
$S_{ACF} = 196$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2 $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

1) $\cos(\alpha_1+\beta_1) = \cos\alpha_1\cos\beta_1 - \sin\alpha_1\sin\beta_1$

$\cos(\alpha_1-\beta_1) = \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\alpha_1\sin\beta_1$

$\cos(\alpha_1+\beta_1) - \cos(\alpha_1-\beta_1) = -2\sin\alpha_1\sin\beta_1$ заменим $\alpha = \alpha_1+\beta_1$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\beta = \alpha_1-\beta_1$

2) $\sin(\alpha_1+\beta_1) = \sin\alpha_1\cos\beta_1 + \sin\beta_1\cos\alpha_1$

$+$ $\sin(\alpha_1-\beta_1) = \sin\alpha_1\cos\beta_1 - \sin\beta_1\cos\alpha_1$

$\sin(\alpha_1+\beta_1) + \sin(\alpha_1-\beta_1) = 2\sin\alpha_1\cos\beta_1$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

3) $(\cos 9x - \cos 5x) + (\sin 9x + \sin 5x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$-2\sin 7x\sin 2x + 2\sin 7x\cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0 \quad \Big| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

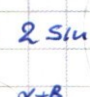
$\sqrt{2}\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2}\sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$$\left[a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\Big(\underbrace{\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\sin\varphi}\cos\alpha + \underbrace{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}}_{\cos\varphi}\sin\alpha\Big) = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi)\right]$$

$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2}\sin 7x - \sqrt{2}\sin(2x+\frac{\pi}{4})) = 0$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x = \sin 2x\\ \sin 7x = \sin(2x+\frac{\pi}{4})\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x = \frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 7x = (2x+\frac{\pi}{4})+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 7x = \pi-(2x+\frac{\pi}{4})+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z}\\ 5x = \frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ 9x = \frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$



$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}n, n\in\mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{20}+\frac{2}{5}\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{12}+\frac{2}{9}\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

Задача 4

При пересечении параллельными плоскостями трехгранного угла мы получим 2 подобных ок-ти: стороны прямо пропорциональны расстоянием от вершины S до сторон и расстоянию от S до плоскостей = длинам отрезков прямой SO, получающихся при пересечении с плоскостями (плоскости $\perp SO$)

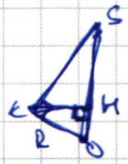
Рассмотрим проекцию, в которой плоскости $\to$ прямые

Тогда коэф. проп: $\frac{SO-R}{SO+R} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$

$4SO - 4R = SO + R$

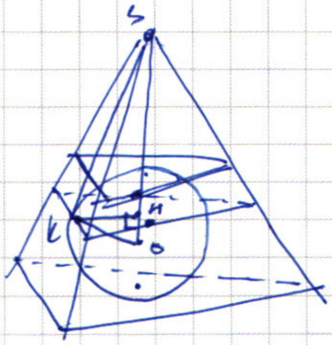
$SO = \frac{5}{3}R$

Тогда синус угла $\angle KSO$; $\sin \angle KSO = \frac{R}{SO} = \frac{3}{5}$



$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

Плоскость KML тоже перпендикулярна SO $\Rightarrow \frac{S}{1} = \left(\frac{SH}{SO-R}\right)^2$



$S = \left(\frac{SO-OH}{SO-R}\right)^2 = \left(\frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}-1}\right)^2 = \left(\frac{(25-9)\cdot 3}{15\cdot(5-3)}\right)^2 = \left(\frac{16}{5\cdot 2}\right)^2 = 1{,}6^2 = 2{,}56$

Ответ $\angle KSO = \arcsin\frac{3}{5}$

$S = 2{,}56$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9261	3
3087	3
1029	3
343	7
49	7
7	7
1	

$343 \,|\, 7$, 28, 63, 49

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

7 7 7 3 3 3 1 1

7 7 7 9 3 1 1 1

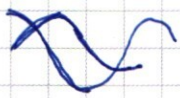
$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

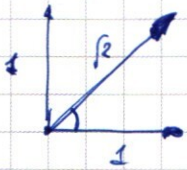
$\cos x + \sin x =$

$\cos 9x - \cos 5x =$

$= \frac{1}{2}$

$\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$





$x^{-2\ln x} \cdot y^{-5\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$

$= \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}}$

$\cos x - \cos\beta =$

$= -2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$e^{-2} \cdot y^{-4\ln x} = e \cdot y^{-7\ln x}$

$y^{3\ln x} = e^3$

$\ln 0$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta))$

$y^{\ln x} = e$

$y = x$ $\quad x(x$

$\sin(x + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}\left(\sin x \frac{1}{\sqrt{2}} + \cos x \frac{1}{\sqrt{2}}\right) =$

$y^2 - xy - 3x^2 + 8x - 4y = 0$

$x^2 - x^2 - 3x^2 + 8x - 4x = 0$

$3x^2 - 4x = 0$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$

$$\begin{cases} \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x =$

$-2\sin\frac{9+5}{2}x \cdot \sin\frac{9-5}{2}x = -2\sin 7x \sin 2x$

$\sin 4x = 2\sin 2x\cos 2x$

$\sin 9x + \sin 5x = 2\sin 7x\cos 2x$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

a

$\sin x - \frac{\pi}{4}$

$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(\sqrt{2}\sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0$

$a\cos\alpha + b\sin\alpha =$

$= \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{}\right.$

$7x$

$7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

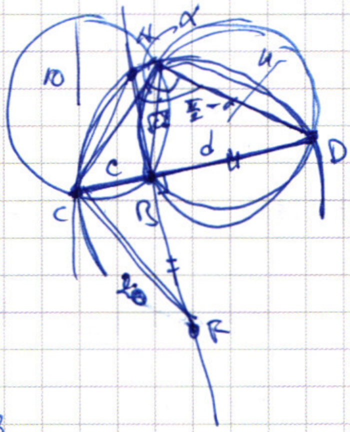
$7x = \pi - (2x + \frac{\pi}{4}) + 2\pi n$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



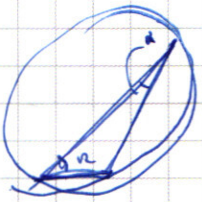
$\sqrt{c^2+d^2}$?

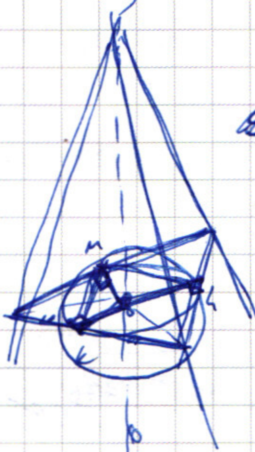
$c = 2\cdot R\sin\alpha = 12$

$d = 2R\cos\alpha$

$c^2+d^2 = 4R^2(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$

$\sqrt{c^2+d^2} = 2R$





$12+16=28$

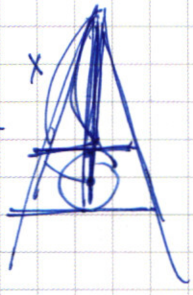
$tg\angle SO = \frac{R}{x}$

$\left(\frac{2}{3}+1\right)$

$\frac{x}{x+2R} = \frac{1}{4}$

$4x = x+2R$

$x = \frac{2}{3}R$



$20\sin x = 12$

$\sin\alpha = \frac{3}{5}$

$\cos\alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow BD = 16$

$140\cdot\frac{1}{5} = 140\cdot\frac{2}{10} = \frac{280}{10}$

$49\cdot 4$

$|x+y+5|+|y-x+5| = 10$

$\begin{cases} x+y+5 \geq 0 & y \geq -x-5 \\ y-x+5 \geq 0 & y \geq x-5 \\ \cancel{x+y+x+y-x+5=10} \\ y=0 \end{cases}$

$x+y+5+y-x+5 = -10$

$2y = -20$

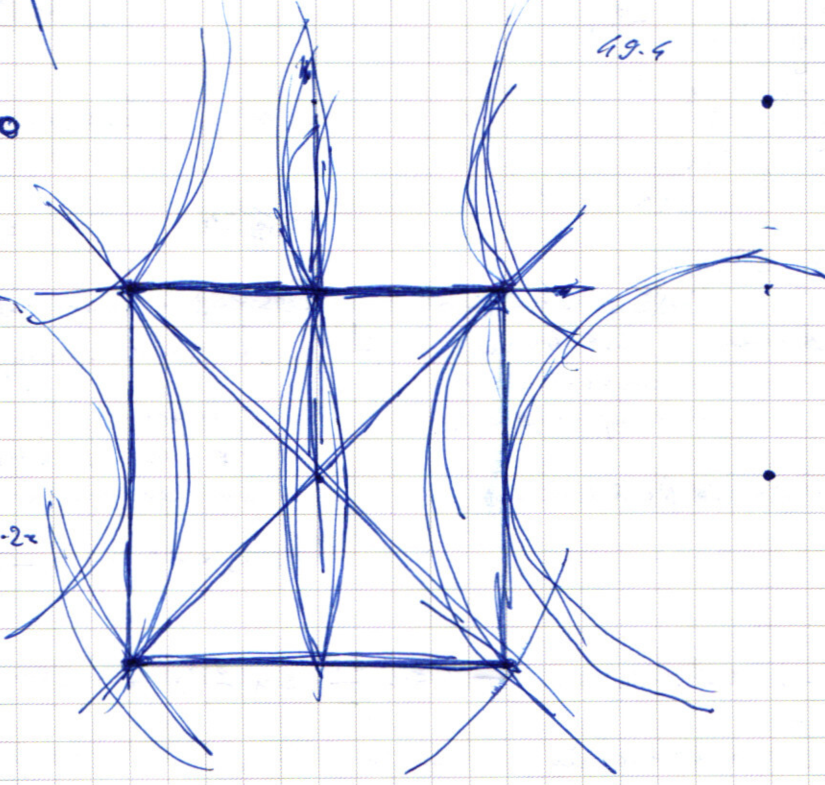
$y = -10$

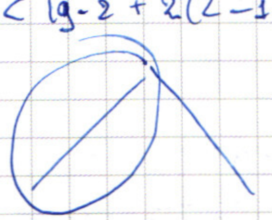
$76 = 28\cdot 2+$

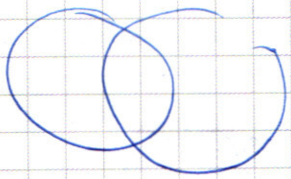
$= 19\cdot 4$

$y \geq 2^x + 3\,2^{34}$

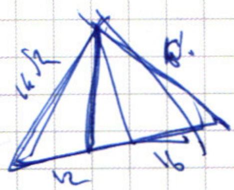
$y < 19\cdot 2^2 + 2(2^{32}-1)x$

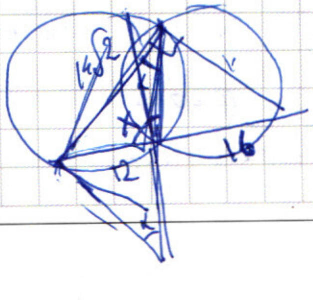






$\frac{28}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$



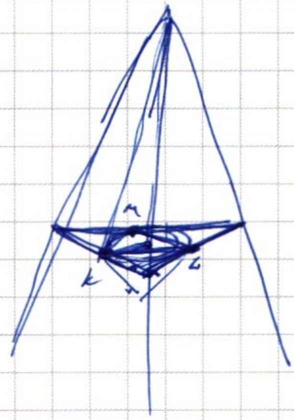


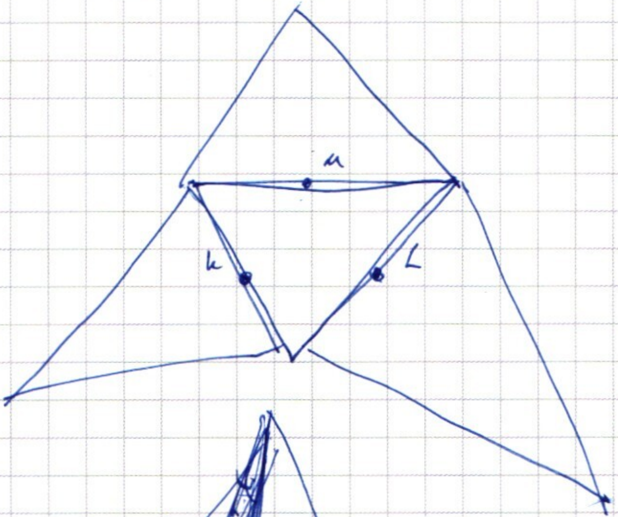
$\frac{AC}{\sin x} =$

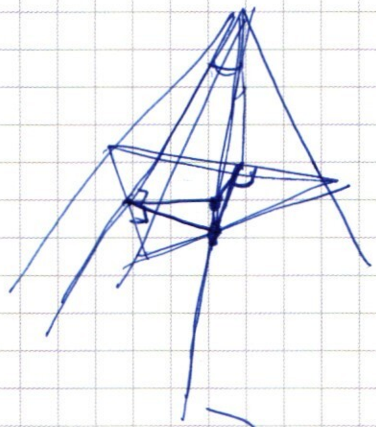
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

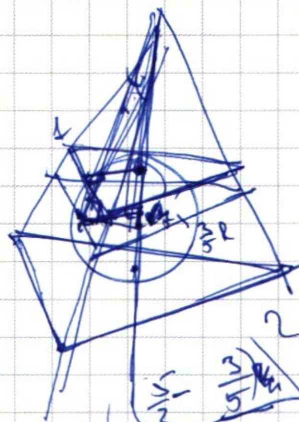
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





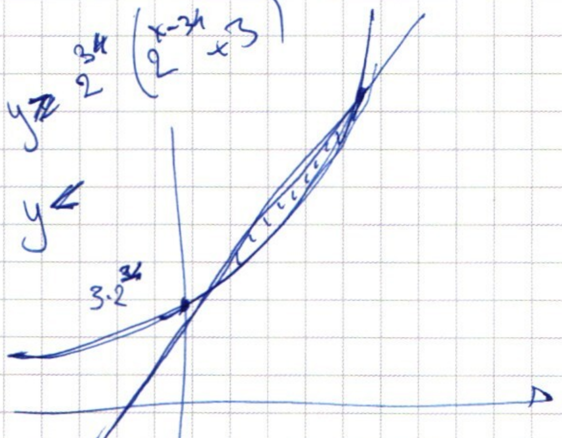




$$\left(\frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{5}{3}-1}\right)^2 = \left(\frac{\frac{25-9}{15}}{\frac{2}{3}}\right)^2 = \left(\frac{16\cdot 3}{15\cdot 2}\right)^2 = \left(\frac{8}{5}\right)^2 = (1,6)^2 = \frac{256}{1}$$

$y = 2^{34}\left(2^{x-34}+3\right)$

$y =$



$\frac{5}{3}$

$\frac{256}{1}$

$2^x + 3\cdot 2^{34} = 16 + 2^{33} \cdot 2x - 2x$