МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

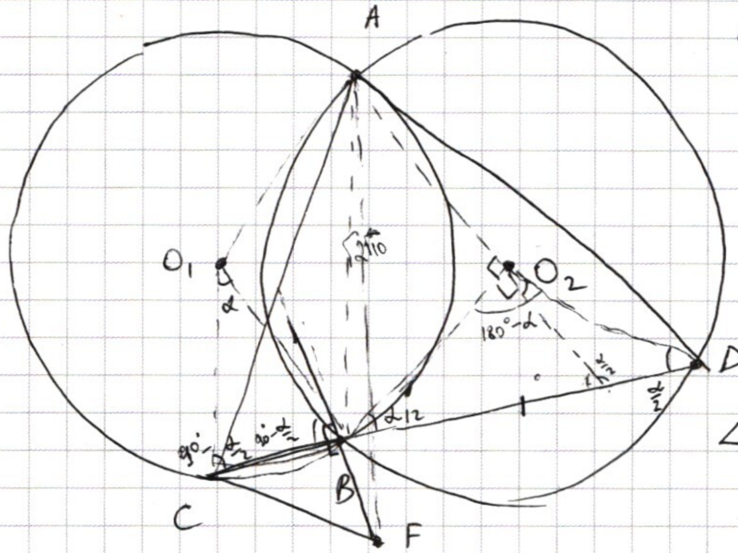
Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



а) O_1, O_2 – центры окр-тей

$AO_2 = AO_1 = BO_1 = BO_2$

AB – общая

$\Rightarrow \triangle O_1AB = \triangle O_2AB$

$\Rightarrow \angle AO_2B = \angle AO_1B$

$\angle ADB = \angle \frac{AO_2B}{2}$ (опираются на $\breve{AB}$)

$\angle ACB = \angle \frac{AO_1B}{2}$ (опираются на $\breve{AB}$)

$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \triangle ACD$ – равнобедр.

$\angle ACD = \angle ADC$

$\Rightarrow \angle AO_1B = \angle AO_2B = 90°$

$\Rightarrow AO_1BO_2$ – квадрат

~~пусть $\angle CO_1B = \alpha$~~ $\cancel{AB^2 = O_2A^2 + O_2B^2}$

$\cancel{AB = 10\sqrt{2}}$

пусть $\angle CO_1B = \alpha$, тогда $\angle O_1BC = 90° - \frac{\alpha}{2}$

$\angle O_2BD = \frac{\alpha}{2}$, $\triangle BO_2D$ – равнобедр.

$\Rightarrow \angle BO_2D = 180° - \alpha$

из т. косинусов

$BC^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos\alpha$ $\quad BD^2 = R^2 + R^2 - 2R^2\cos(180° - \alpha) = 2R^2 + 2R^2\cos\alpha$

$CF^2 = BC^2 + BF^2 = BC^2 + BD^2 = 4R^2$

$\Rightarrow CF = 2R = 20$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2\sin 7x \cos 2x = 0$

$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos 2x = \sin 2x \quad (1) \\ 2\sin 7x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\operatorname{tg} 2x = 1$

$2x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, \quad k \in Z$

(2) $2\sin 7x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)$

$\sin 7x = \cos\frac{\pi}{4}\sin 2x + \sin\frac{\pi}{4}\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 7x_2 = \frac{\pi}{4} + 2x_2 + 2\pi k \\ 7x_3 = \pi - \frac{\pi}{4} - 2x_3 + 2\pi k \end{array}\right.$$

$x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \quad k \in Z$

$x_3 = \frac{3\pi}{4\cdot 9} + \frac{2\pi k}{9} = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, \quad k \in Z$

Ответ: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$

$x_2 = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5} \qquad k \in Z$

$x_3 = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

всего цифр 8 $\Rightarrow$ либо 1) три 7, три 3, две 1;

либо 2) три 7, одна 9, одна 3, три 1

1) $\dfrac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!}$ — $8!$ – ~~число~~ кол-во цифр, если считать, что одинаковые цифры имеют индексы $7_1, 7_2, 7_3$ и т.д.

различность цифр 7; различ. цифры 3; различ. цифры 1

но одинаковые цифры не различимы, поэтому делим на кол-во одинаковых ~~слов~~ чисел

~~напри~~

2) $\dfrac{8!}{3! \cdot 3!}$ аналогично для второй ситуации

различность цифры 7; различность цифры 1

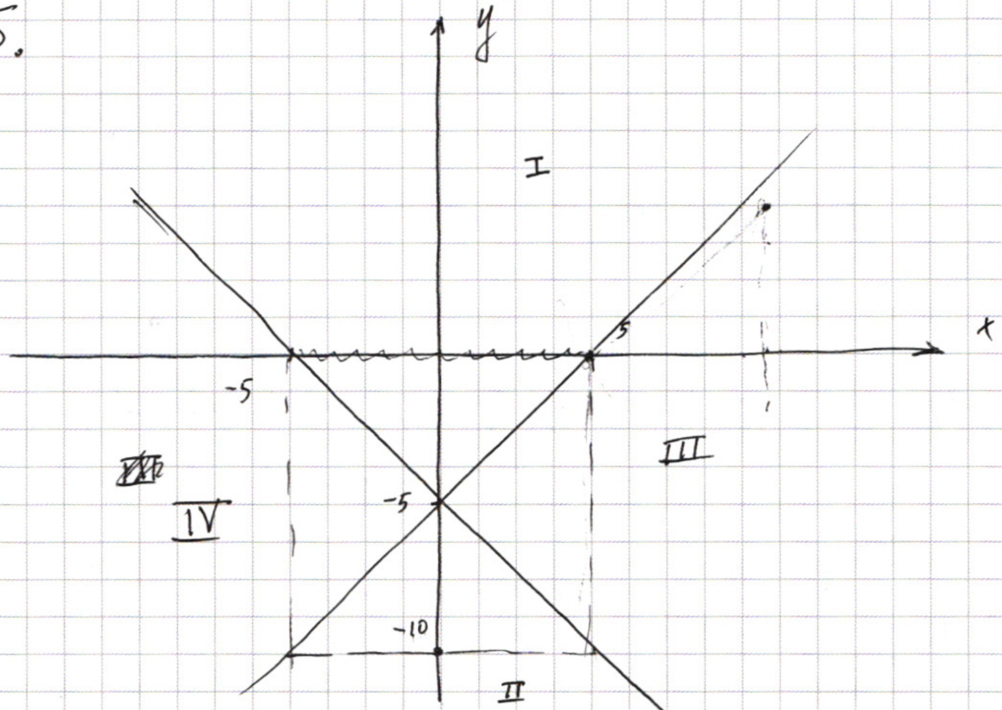
общее кол-во – сумма в двух разных ситуац.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8!}{3! \cdot 3!}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2}\right) = \frac{3 \cdot 8!}{2 \cdot 2! \cdot 3 \cdot 3!} = \frac{7!}{3!} =$$

$$= 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 20 \cdot 42 = 840$$

Ответ: 840

5.



$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2) \end{cases}$$

1) $y = -x-5$ 2) $y = x-5$

$49+25$

I. $x+y+5 \geq 0$, $-x+y+5 \geq 0$

$x+y+5+y-x+5=10$ $2y=0$ $\Rightarrow$ пересекаться могут только с $y=0$ + $x \in [-5;5]$ подставим в (2)

$(|x|-12)^2 = a-25$

$|x| = -\sqrt{a-25} + 12 \leq 5$

$\sqrt{a-25} \geq 7$

$a \geq 74$

II $x+y+5 \leq 0$, $-x+y+5 < 0$

$-x-y-5+x-y-5=10$ $y=-10$; $x \in (-5;5)$ подставим в (2)

$|x| = -\sqrt{a-25} + 12 \leq 5$

$a > 74$

III. $x+y+5 \geq 0$, $-x+y+5 < 0$ + ~~IV~~

$x+y+5-y+x-5=10$ $x=5$ подставим $y \in [-10;0)$ в (2)

$|y| = \sqrt{a-49} + 5$ $y<0$ $y = -\sqrt{a-49} - 5 \geq -10$

$a > 49$

$a-49 \leq 25$ $a \leq 74$

$a \in (49;74]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. б) $BC = 12$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора $\triangle BCF$

$BF^2 = CF^2 - BC^2 = 256$

$BF = 16 = BD$

$\Rightarrow CD = BD + BC = 28$

$AC = \dfrac{CD}{\sqrt{2}} = 14\sqrt{2}$

$\cos\angle BCF = \dfrac{BC}{CF} = \dfrac{6}{10}$

$\sin\angle BCF = \dfrac{BF}{CF} = \dfrac{8}{10}$

$\angle ACD = 45^\circ$

$S_{\triangle ACF} = \dfrac{AC \cdot CF}{2} \cdot \sin\angle ACF$

$\angle ACF = \angle ACD + \angle BCF$

$\Rightarrow \sin\angle ACF = \sin\angle ACD \cdot \cos\angle BCF + \sin\angle BCF \cdot \cos\angle ACD =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{6}{10} + \dfrac{1}{\sqrt{2}} \dfrac{8}{10} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{14}{10}$

$\Rightarrow S_{\triangle ACF} = \dfrac{14\sqrt{2} \cdot 20}{2} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \dfrac{14}{10} = 14^2 = 196$

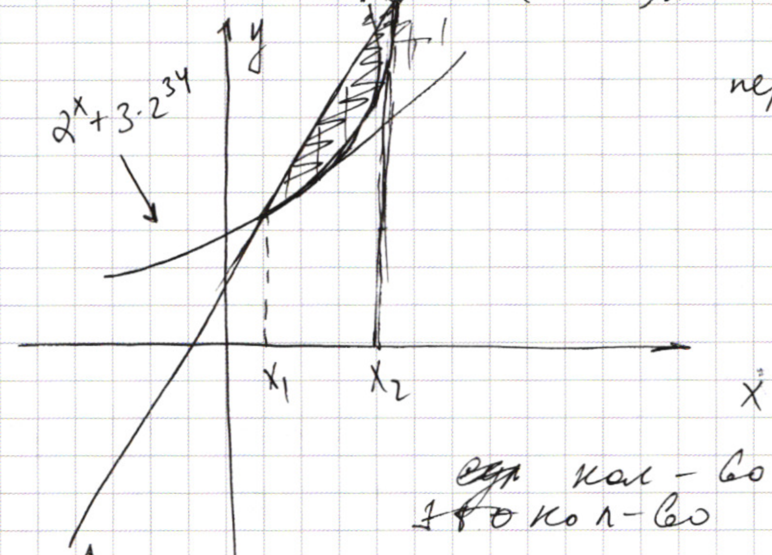
Ответ: а) $CF = 20$

б) $S_{\triangle ACF} = 196$

7 $\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$

$76 + 2(2^{32}-1)x > y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

$76 + 2(2^{32}-1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$



$y = 76 + 2(2^{32}-1)x$

пересекаются в $x_1 = 6$

~~сум~~ кол-во таких пар = кол-во точек

т.е площадь между графиками

$$N = \int_6^{+\infty} \left(76 + 2(2^{32}-1)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34}\right) dx =$$

$$= \left(76 - 3 \cdot 2^{34}\right) x \Big|_6^{+\infty} + \left((2^{32}-1)x^2 - \frac{2^x}{\ln 2} \right) \Big|_6^{+\infty} =$$

$$= +\infty$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$

$2\sin 2x \cdot \sin 7x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 4x = 0$

$2\sin 7x(\sin 2x + \cos 2x) = \sqrt{2}\cos 4x =$

$\sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$(2\sin 7x - \sqrt{2}\cos 2x) =$

$= \sin 2x(-2\sin 7x - \sqrt{2}\sin 2x) =$

$= \sin 2x(-2\sin 7x + \sqrt{2}\cos 2x)$

$-\sqrt{2}\sin 2x\cos 2x - \sqrt{2}\sin 2x =$

$= -\sqrt{2}(1 - \cos 2x) =$

$= 2\sqrt{2}\cos^2 x$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} = 2^{34}(3 + 2^{x-34}) \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

$76 + 2(2^{32}-1)x > y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34}$

$2^{33}(x-6) + 76 - 2x > 2^x$

$76 + 2^{33}\cdot x - 2x ? 2^x + 6\cdot 2^{33}$

$-5\cdot 2^{33} + 76 - 2 > 2$

$76 = 2\cdot 38 = 2\cdot 2\cdot 19$

$76 + 2(2^{32}-1)x > 2^x + 3\cdot 2^{34} = 2^x + 12(2^{32}-1) + 12$

$2(2^{32}-1)x > 2^x + 12(2^{32}-1) + 12 - 76$

$x > \frac{2^{x-1}}{2(2^{32}-1)} + 6 - \frac{2^5}{2(2^{32}-1)} =$

$= \frac{2^5(2^{x-6}-1)}{(2^{32}-1)} + 6$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$(y^2 - 4y + 4) - 4 - 2x^2 + 8x - xy = (y-2)^2 - 2(x^2 - 4x + 2) - xy$

6 2. $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x =$

$= \cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x =$

$= \cos 4x \cos 5x (1 - tg 4x \cdot tg 5x + tg 4x + tg 5x) + \sin 5x - \cos 5x$

$- \sqrt{2}\cos 4x$

$(\sin 5x - \cos 5x)(-\sin 4x + 1) + (\cos 5x + \sin 5x)(\cos 4x) - \sqrt{2}\cos 4x =$

$= (\sin 5x - \cos 5x)(1 - \sin 4x) + (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2})\cos 4x$

$2\cos 2x \cos 7x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2}\cos 2x =$

$= 2\sin 7x(\sin 2x + \cos 2x) - \sqrt{2}\cos 2x$

$4\sin x \cos x + 2\sin 7x($

$\cos^2 x + 2\sin x \cos x - \sin^2 x$

$343 \cdot 27$: 2401, 686, 9261

$49 \cdot 7 = 343$

$2\sin 7x \cos 2x(tg 2x + 1) - \sqrt{2}\cos 2x =$

$= \cos 2x(2\sin 7x(tg^2 x + 1) - \sqrt{2})$

$\cos 4x \cos 5x - \sin 4x \sin 5x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x \cos 4x + (\sin 5x - \cos 5x)$

$- \sqrt{2}\cos 4x = \sin 5x(\cos 4x - \sin 4x + 1) - \cos 5x(1 - \cos 4x - \sin 4x)$

$- \sqrt{2}\cos 4x$

нет 0, нет 2, 4, 6, 8, иначе бы было бы четным

$9261 : 3 = 3087$; $3087 : 3 = 1029$; $1029 : 3 = 343$

$343 = 7^3$

$\Rightarrow 9261 = 3^3 \cdot 7^3$ есть различные

7, 7, 7, 3, 3, 3, 1, 1

$\Rightarrow$ точно есть три 7ки

1) либо три 3 и две 1

2) либо 9 и 3 и три 1

$35 \cdot 24 = 140 + 70 = 840$

1) ~~8·7·6·5·4~~ $\frac{8!}{3!\cdot 3!\cdot 2!} +$

2) $\frac{8!}{3!\cdot 3!} + \frac{8!}{3!\cdot 3!}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\frac{8!}{3!\cdot 3!}$

7, 7, 7, 9, 3, 1, 1, 1

$= 3 \cdot \frac{7!}{3!} = 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

IV $\quad x+y+5<0, \quad -x+y+5 \geq 0$

$-x-y-5+x+y+5=10 \quad x=-5 \quad y \in [-10;0]$

подставим в (2)

$|y| = \sqrt{a-49}+5 \quad y<0$

т.е. аналогично III, но $a[49;74)$

$\Rightarrow$ объединим все

$a \in [49;74] \vee [74;+\infty)$

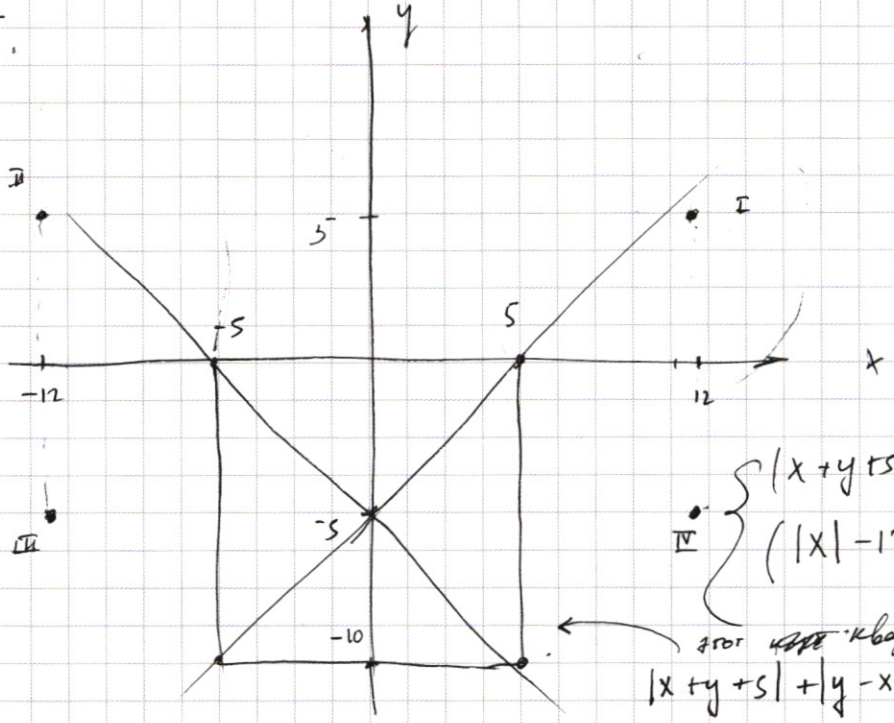
$a \in [49;+\infty)$

Ответ: $a \in$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5.



$$\begin{cases} |x+y+5|+|y-x+5|=10 \\ (|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a \end{cases}$$

этот ~~кв~~ квадрат
$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

I. $x>0 \quad y>0$

$(x-12)^2+(y-5)^2=a$ — окр-ть $(12;5)$ с радиусом $\sqrt{a}$

$a>0$

II. $x<0 \quad y>0$

$(x+12)^2+(y-5)^2=a$ окр-ть $(-12;5)$ с радиусом $\sqrt{a}$

III $x<0, \; y<0$

$(x+12)^2+(y+5)^2=a$ — окр-ть $(-12;-5)$

IV $x>0, \; y<0$

$(x-12)^2+(y+5)^2=a$ — окр-ть $(12;5)$

в зависимости от a разбег радиус окр-ей

2 решения только тогда, когда окр-ти III и IV касаются квадрата

т.к. $R=12-5=7$ — радиус окр-тей

$a=R^2=49$

Ответ: $a=49$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AC^2 = 200 + 200\sin\alpha$

$CD^2 = 400(1+\sin\alpha)$

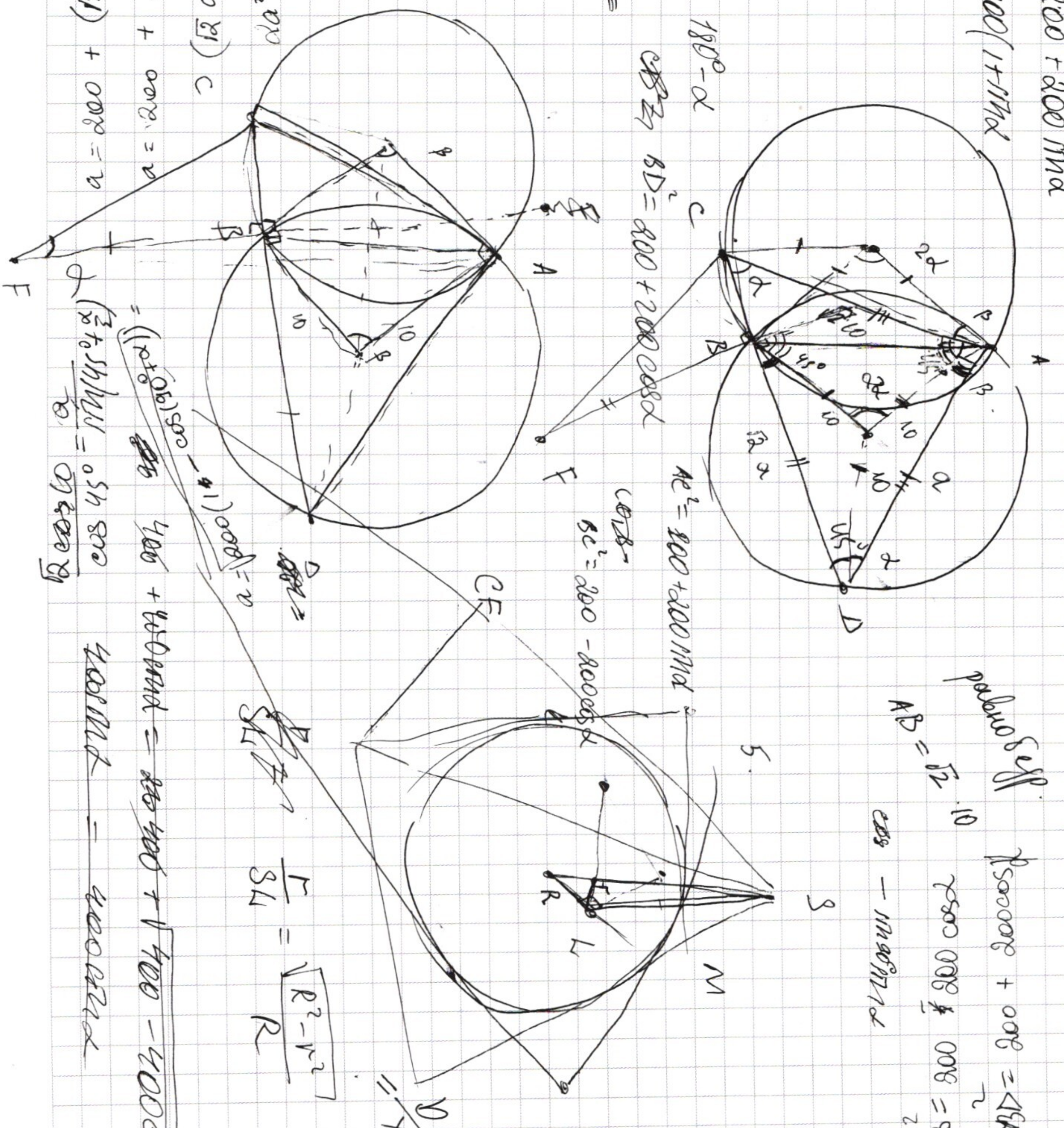
$a = 200 + (\sqrt{2}a - x)^2 - 2(\sqrt{2}a - x)\frac{\sqrt{2}\cdot 10}{\cos\alpha}$

$a = 200 + x^2 + 2x\cdot\sqrt{2}10\cdot\cos\alpha$

$BD^2 = 200 + 200\cos\alpha$

$AC^2 = 200 + 200\sin\alpha$

$BC^2 = 200 - 200\cos\alpha$



$\frac{r}{SL} = \frac{\sqrt{R^2-r^2}}{R}$

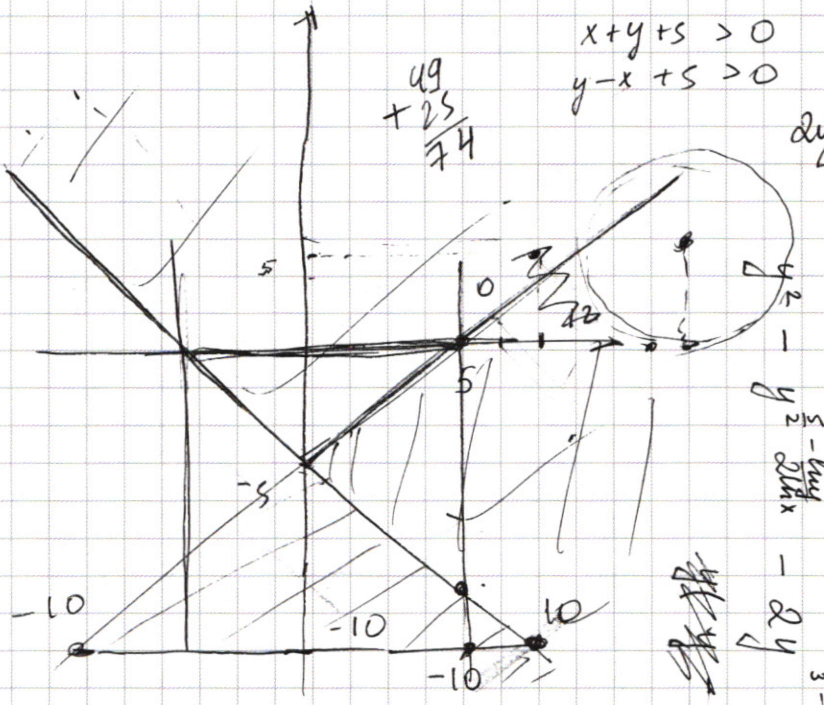
☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$(|x|-12)^2+(|y|-5)^2=a$



$x+y+5>0 \qquad y>-5-x$

$y-x+5>0$

$49+25=74$

$2y+10=10$

$y=0$

$(|x|-12)^2 = a-25$

$x\in[-5;5]$

$|x|=\sqrt{a-25}+12\le 5$

$\sqrt{a-25}\le -7$

$a\in\varnothing$

$-2y-10 \qquad y=-10$

$(|x|-12)^2=a-25$

$|x|=\sqrt{a-25}+12\le 10$

$a\in\varnothing$

$-x-y-5+y-x+5=10$

$x=-5$

$x+y+5-y+x-5=10$

$x=5$

$(|y|-5)^2=\sqrt{a-49}+5\le 5$

$a=49$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$76+2^{33}-2x=2^x+3\cdot2^{34}$

$\frac{-2}{\ln 2}=\frac{2^x}{\ln 2}$

$2^x=-2\ln 2$

$x=\log_2 2\ln 2=$

$=1+\log_2 \ln 2$

$y<64+2^{34}$

$3+5+6$

$y(y-4)-2x(x-4)=xy$

$y(y-4)-2x(x-4)=y^{\frac{5}{2}}-\frac{\ln y}{\ln x}$

$y\geq 2+3\cdot2^{34}$

$y<74+2^{33}$

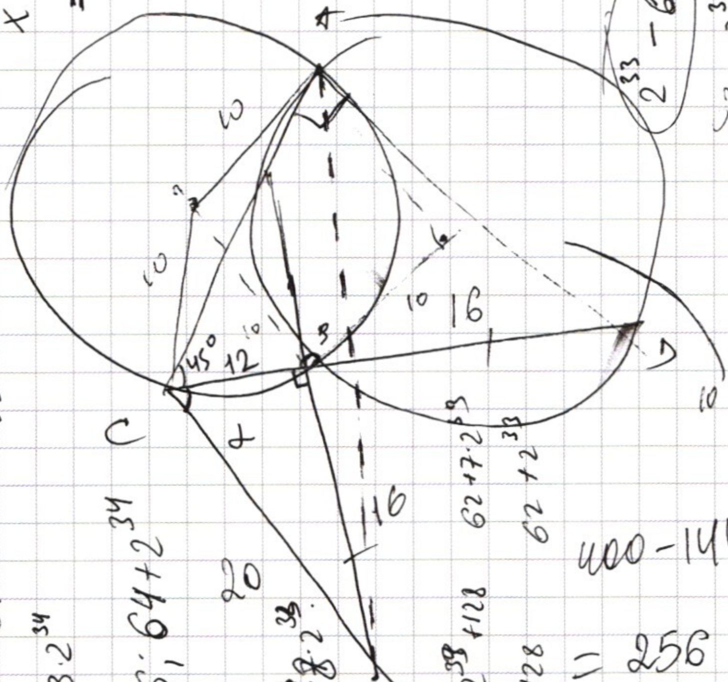
$y\geq 64+3\cdot2^{34}$

$6;\ 64+2^{34}$

$y\geq 128+3\cdot2^{34}$

$y<60+3\cdot2^{33}$

$e^{2x}=$



$6\cdot2^{33}+128$ $\quad 62+7\cdot2^{33}$

128 $\quad 62+2^{33}$

$=256$

$400-144$

16×16

$2^{33}-64=2^{33}-2^6$

$68+2\cdot2^{34}>66+3\cdot2^{34}$

$60+2\cdot2^{34}$

$3\cdot2^{24}$

$76+2(2^{32}-1)x>76+2(2^{32}-1)x$

$x=0$ неправда

$x=1$

$2^x+3\cdot2^{34}$

$(-\infty;6]$ — неудовлетв.

$66+5\cdot3^{33}>32+6\cdot2^{34}+2^{33}>2+3\cdot2^{34}$

$64+3\cdot2^{34}>32+3\cdot2^{34}$ $\quad 72+2^{34}>4+3\cdot2^{34}$

$70+3\cdot2^{33}>8+3\cdot2^{34}$

$x\geq6$

$[7;+\infty)$ $\quad 64+6\cdot2^{33}>64+$

$2(2^{32}-1)=\frac{2^x\ln 2}{\ln 2}$ $\quad 2^x=\frac{2(2^{32}-1)}{\ln 2}$ $\quad 2^x=\frac{2^{33}-2}{\ln 2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)