

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Т.е. в этом числе дано присутствовать три цифры 7 и три цифры 3 или 3 и 9, а остальные цифры - 1.

Кол-во способов поставить 3 семерки на 8 мест:

$$C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = 7 \cdot 8 = 56.$$

Кол-во способов поставить на 5 оставшихся мест 3 тройки:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$$

А кол-во способов поставить на 5 мест 9 и 3:

$$5 \cdot 4 = 20$$

Кол-во восьмизначных чисел, произведение <sup>цифр</sup> которых равно 9261:  $C_8^3 \cdot C_5^3 + C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 30 = 1680$

Ответ: 1680.

~23

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$OДЗ: \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

Т.к.  $(x^2 y^4)^{-\ln x} > 0$  и  $y^{\ln(\frac{y}{x^2})} > 0$ , то перепишем систему ур-ий в виде:

$$\begin{cases} e^{\ln((x^2 y^4)^{-\ln x})} = e^{\ln(y^{\ln(\frac{y}{x^2})})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$1. -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln\left(\frac{y}{x^2}\right) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \cdot \ln y$$

$$2\ln^3 x - 3\ln x \cdot \ln y + \ln^2 y = 0$$

$$\Delta_{\ln x} = 9\ln^2 y - 8\ln^2 y = \ln^2 y$$

$$(\ln x)_{1,2} = \frac{3\ln y \pm \ln y}{4} = \left[ \begin{array}{l} \ln y \\ \frac{1}{2} \ln y \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} \ln x = \ln y \\ \ln x = \frac{1}{2} \ln y \end{array} \right. \Rightarrow \left[ \begin{array}{l} x = y \\ x = \sqrt{y} \end{array} \right.$$

a)  $x = y$

$$y^2 - y \cdot y - 2y^2 + 8y - 4y = 0$$

$$2y^2 - 4y = 0$$

$$2y(y-2) = 0$$

$$y = 2 \quad y = 0 \text{ (не ур. ДАЗ)}$$

$$\downarrow$$

$$x = 2$$

b)  $x = \sqrt{y}$

$$x^2 = y$$

$$\cancel{x^4} - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x = 0$$

$$\text{не ур. ДАЗ}$$

$$\text{или}$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$1 \quad -1 \quad -6 \quad 8$$

$$2 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$x = 2 \quad \text{или} \quad x^2 + x - 4 = 0$$

$$\Delta = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = -\frac{1+\sqrt{17}}{2} \text{ - не ур. ДАЗ.}$$

$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ x = 2 \end{array} \right.$$

$$\left[ \begin{array}{l} y = x^2 = 4 \end{array} \right.$$

$$y = \left( \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right)^2 = \frac{18-2\sqrt{17}}{4} = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 4); \left( \frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sim 5 \quad \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

Решение

Если  $(x_0; y_0)$  — л-се решение системы, то и  $(-x_0; y_0)$  тоже будет л-се решением этой системы.

Т.е. при  $x \geq 0$  до системы тоже имеет 1 решение  
при  $x \geq 0$   $(x-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$  — 2 окр-ти с центрами в  
точках  $(12; 5)$  и  $(12; -5)$  и радиусами  $\sqrt{a}$   $a \geq 0$

Рассмотрим первое ур-ие системы:

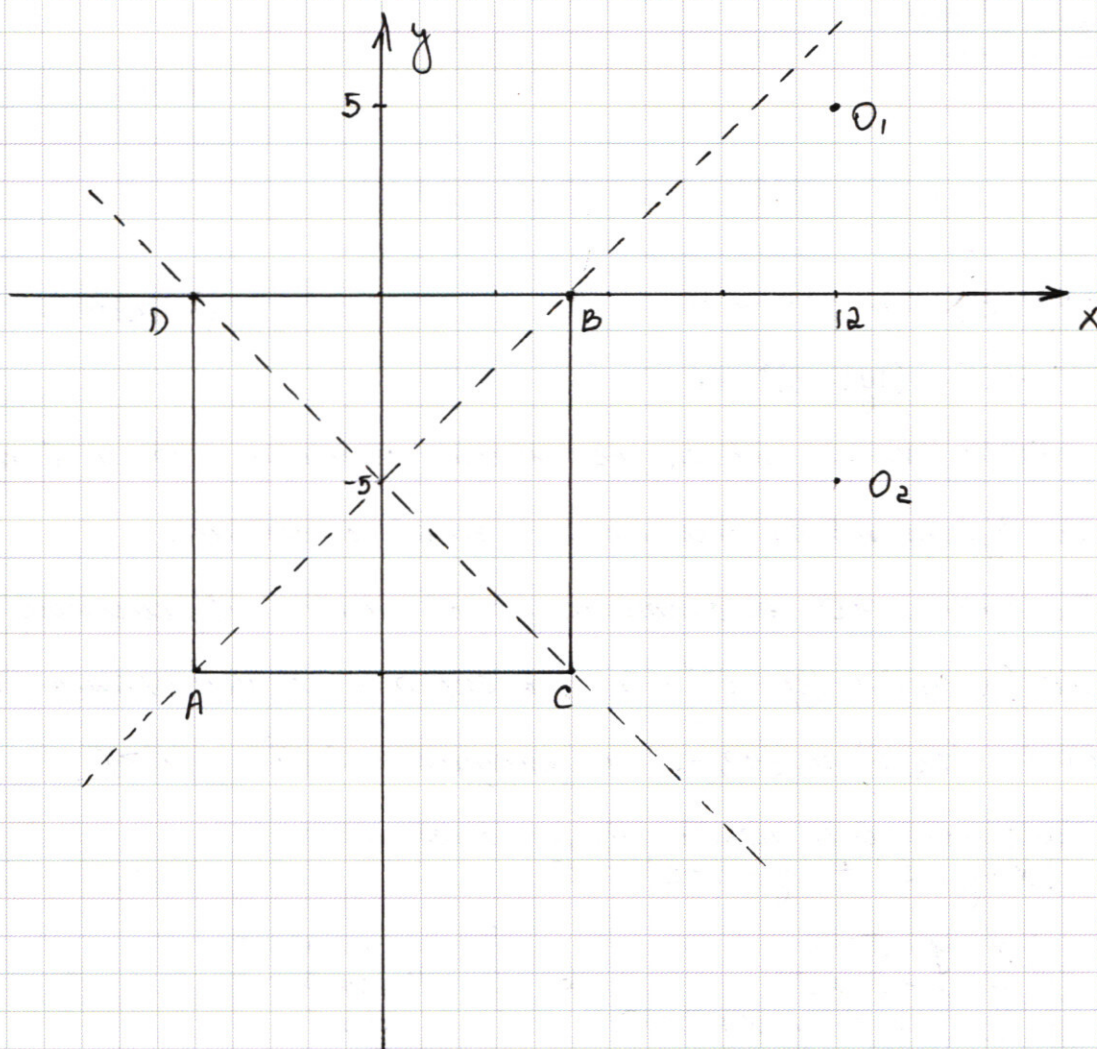
$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$1. \quad \begin{cases} x+y+5 \geq 0 \\ y-x+5 \geq 0 \\ x+y+5+y-x+5=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -x-5 \\ y \geq x-5 \\ y=0 \end{cases}$$

$$2. \quad \begin{cases} x+y < -5 \\ y-x+5 \geq 0 \\ -x-y-5+y-x+5=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -5-x \\ y \geq x-5 \\ x=-5 \end{cases}$$

$$3. \quad \begin{cases} x+y \geq 0-5 \\ y-x+5 < 0 \\ x+y+5-y+x-5=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq -5-x \\ y < x-5 \\ x=5 \end{cases}$$

$$4. \quad \begin{cases} x+y < -5 \\ y-x < -5 \\ -x-y-5-y+x-5=+10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y < -5-x \\ y < -5+x \\ y=-10 \end{cases}$$



Чтобы при  $x \geq 0$  система имела <sup>единственное</sup> решение, нужно, чтобы квадрат и окружности имели 1 общую точку.

1. случай.

Окр-ть с центром  $O_2$  касается стороны  $BC$  квадрата, тогда радиус окр-ти равен 7.  $\Rightarrow a = 49$ .

$$BO_1 = \sqrt{5^2 + 7^2} = \sqrt{25 + 49} = \sqrt{74} > 7 \Rightarrow \text{окр-ть с}$$

центром  $O_1$  не будет пересекать сторону квадрата,

т.е. решение — единственное.

2. случай.

окр-ть с центром  $O_1$  пересекает квадрат в т. А.

$$O_1A = \sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514} - \text{радиус окр-ти}$$

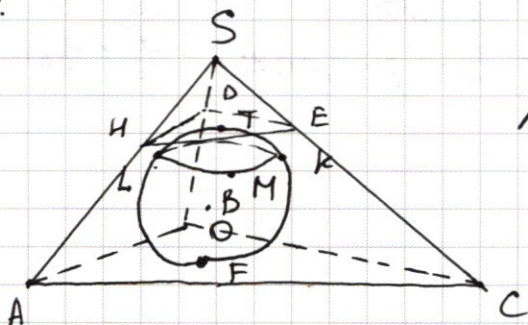
$$a = 514$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D_2 A = \sqrt{17^2 + 5^2} = \sqrt{314} < 0,1A$  - окръг с център в  $\Gamma$ .  $O_2$  не пресича квадрата, а значи решението е единствено.

Dmbern:  $a = 514$ ;  $a = 49$ .

~4.



Т.к плоскость  $HED \perp SO$  и

плоскость  $ABC \perp SO$ , то  $(HED) \parallel (ABC)$

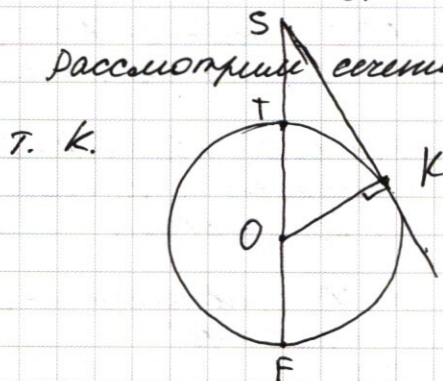
Ступень HEI) касается сферы  
в  $T.T$ , а ABC в  $T.F$ .

точки  $T, O$  и  $F$  - лежат на одной прямой - диаметр.

$$\triangle ABC \sim \triangle HED \quad k - \text{коэф. подобия} \quad k = \frac{1}{4}$$

$$\frac{ST}{SF} = k = \frac{1}{4}$$

$$4ST = SF = ST + 2R$$
$$ST = \frac{2}{3}R$$



Рассмотрим ~~сечение~~ ~~фактора~~, ~~прохождение~~ через SF и

T. K.

$OK \perp SK$  (как радиус, провер в т. касание)

$$SO = \frac{3}{2}R \quad \frac{2}{3}R + R \quad OK \leq R$$

$$\sin(\angle KSO) = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = 0,6$$

$$\angle KSO = \arcsin(0,6)$$

Ombem, arcsin(0,6)

~2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \cdot \sin^4 x - \sin 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \cdot \sin^4 x \cdot \cos 2x = 0 \quad | :2$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \left( \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos 2x + \sin 2x) \right) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \text{или}$$

$$\sqrt{2}(\cos 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin 2x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cdot \sin\left(\frac{7x - (2x + \frac{\pi}{4})}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\sin\left(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi n$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

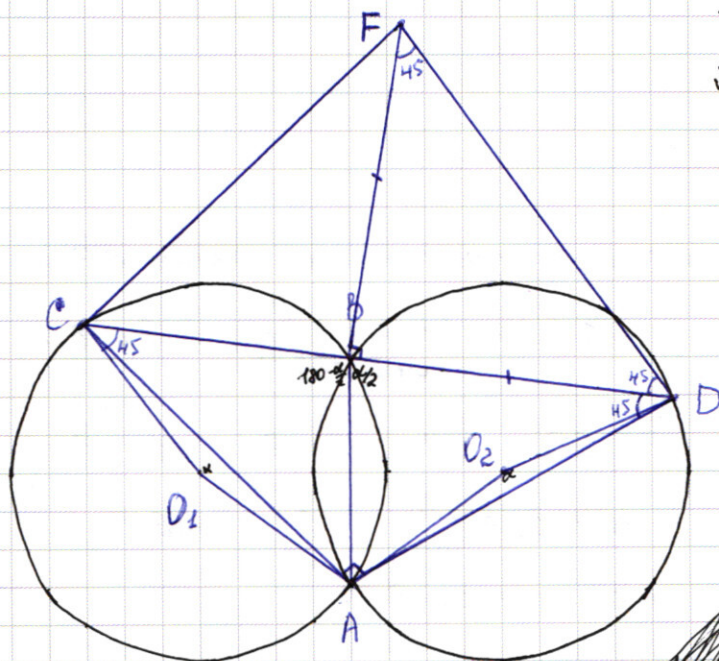
$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{3\pi}{36} + \frac{2}{9}\pi n =$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z} = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

№6



Т.к.  $FB \perp CD$  и  $FB = BD$ , то  $\angle BFD = \angle FDB = 45^\circ$

Пусть  $\angle AO_2D = \alpha$ , то  $\angle ABD = 2\alpha$   
 $\angle ABC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$

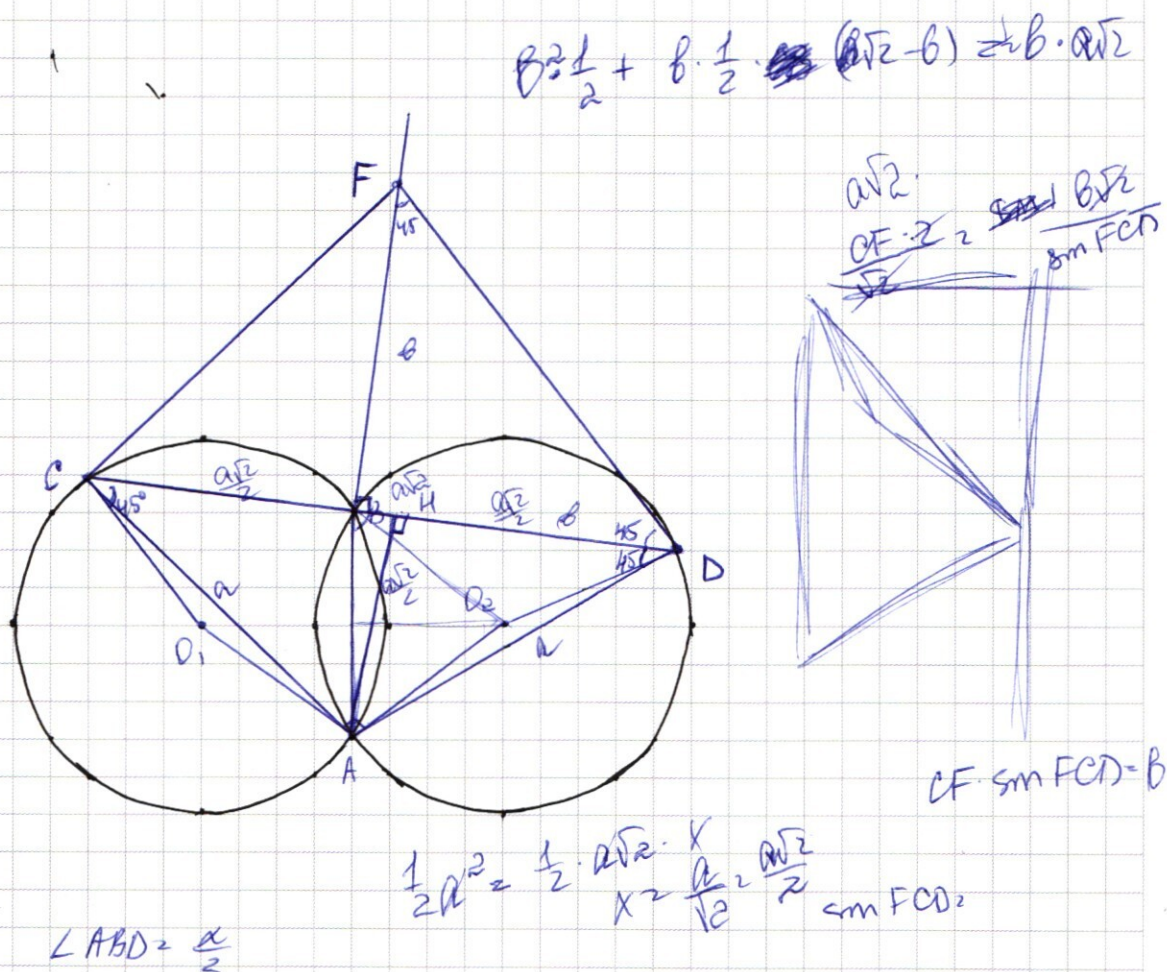
$\angle AOC = 360^\circ - 2 \cdot \angle ABC = 360^\circ - 180^\circ \cdot 2 + \frac{\alpha}{2} \cdot 2 = \alpha$

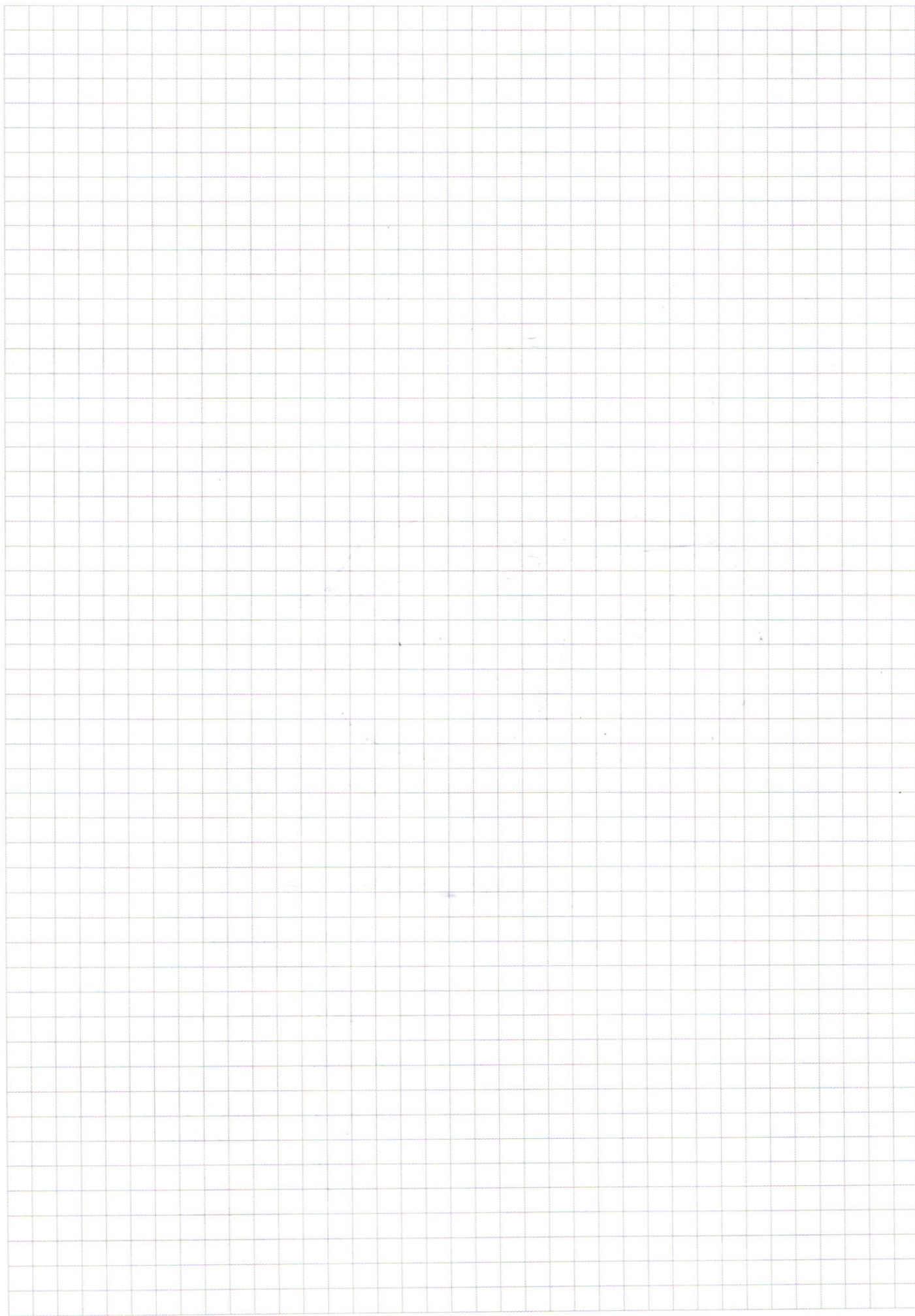
Т.к.  $O_2D = AO_2 = O_1A = O_1C$  (как радиусы) и  $\angle AO_2D = \angle AOC$ , то  $\triangle AOC = \triangle AO_2D \Rightarrow AD = AC$

$\triangle ADC$  — равнобедр.  $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$

~~Т.к.  $FB \perp CD$  и  $FB = BD$ , то  $\angle BFD = \angle FDB = 45^\circ$ . Пусть  $\angle AO_2D = \alpha$ , то  $\angle ABD = 2\alpha$ .  $\angle ABC = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$ .  $\angle AOC = 360^\circ - 2 \cdot \angle ABC = 360^\circ - 180^\circ \cdot 2 + \frac{\alpha}{2} \cdot 2 = \alpha$ . Т.к.  $O_2D = AO_2 = O_1A = O_1C$  (как радиусы) и  $\angle AO_2D = \angle AOC$ , то  $\triangle AOC = \triangle AO_2D \Rightarrow AD = AC$ .  $\triangle ADC$  — равнобедр.  $\Rightarrow \angle ACD = \angle ADC = 45^\circ$ .~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$\begin{array}{r} 9261/3 \\ 3087/3 \\ 1029/3 \\ 343/7^3 \end{array}$$

~~9261~~

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\frac{7}{3!} \frac{7}{5!} \frac{7}{7!}$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 56 - \text{способов раск. 7.}$$

$$3 \text{ и } 9 \text{ мм } 3, 3, 3.$$

$$C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

$$3 \text{ и } 9. \quad 5 \cdot 4 = 20$$

$$56 \cdot 20 + 56 \cdot 10 = 56 \cdot 30 = 1680$$

~2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = 2 \left( \frac{\cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin} \right)$$

$$\cos(9/20) - \cos(60) = 2 \cdot 0.$$

$$-2 \cos 60$$

$$-2 \cdot \sin 2x \cdot \sin 7x$$

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln(y/x^2) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx} (x^2 y^4)^{-\ln x} = \frac{d}{dx} y \ln(y/x^2)$$

$$y^2 - y \sqrt{y} - 2y + 6 \sqrt{y} - 4y = 0$$

$$\frac{y^2 - y}{y} = 0$$

$$y(y - \sqrt{y} - 6 + \frac{6}{\sqrt{y}}) = 0$$

$$y = 0 \quad y \sqrt{y} - y - 6 \sqrt{y} + 6 = 0$$

$$y + \sqrt{y}(6 - y) - 6 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x = 0 \quad x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$\begin{array}{r} 1 - 1 - 6 \quad 8 \\ 2 \quad 1 \quad 1 \quad -4 \quad 0 \end{array}$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{4} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\ln x^2 y^4 \cdot (-\ln x) = \ln \frac{y}{x^2} \cdot \ln y$$

$$-(\ln x^2 + \ln y^4) \cdot \ln x = \frac{\ln y}{\ln x}$$

$$(\ln y - \ln x^2) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln x - 4 \ln x \ln y^2 = \ln y^2 -$$

$$-7 \ln y \cdot \ln x$$

$$2 \ln x - 3 \ln y \cdot \ln x + \ln y^2 = 0.$$

$$D = 9 \ln y^2 - 8 \ln y^2 = \ln y^2$$

$$\ln x = \frac{3 \ln y \pm \ln y}{4} = \frac{1}{2} \ln y$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

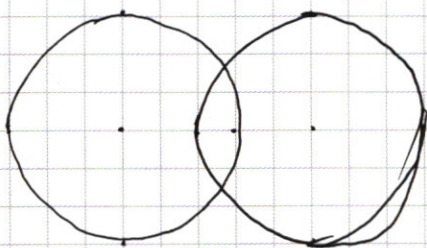
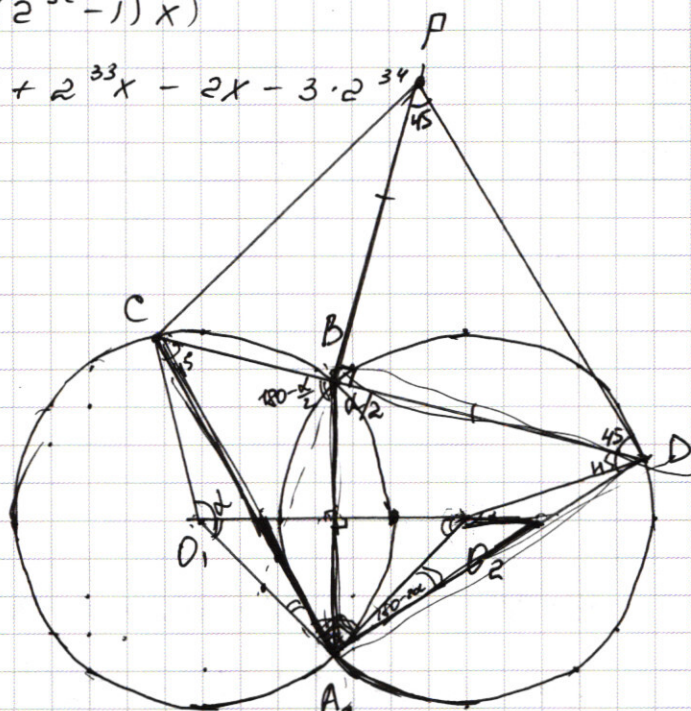
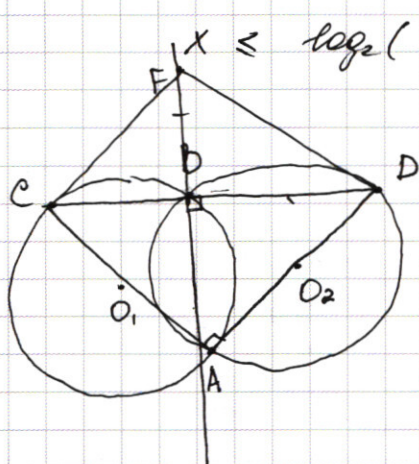
(Нумеровать только чистовики)

$$(y^2 - 4y + 4) - 4 - 2(x^2 - 4x + 4) + 8 - xy = 0$$

$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 - xy = -4$$

$$(x-2)^2 - 2 + xy = (y-2)^2 + 4$$

$$\log_2(2^x + 3 \cdot 2^{34}) \leq \log_2(46 + 2(2^{32} - 1)x)$$



$$AC = \sqrt{100 + 200 \cdot \cos \alpha}$$

$$a^2 AC^2 = 10^2 + 20^2 + 2 \cdot 10 \cdot 20 \cdot \cos \alpha$$

$$\angle O_2AD = 180 - 2\alpha$$

$$\angle CAD_2 = 90 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha - 90$$

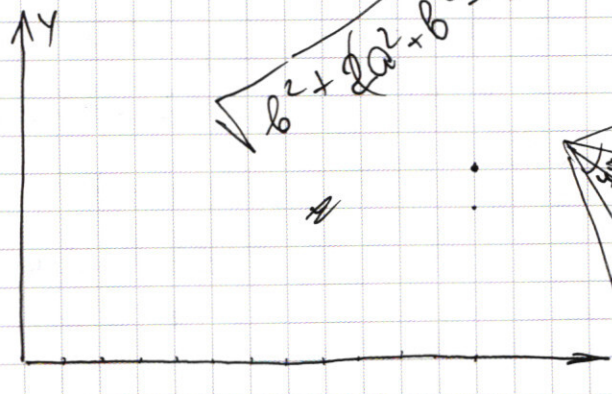
$$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\cos 2x =$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$$

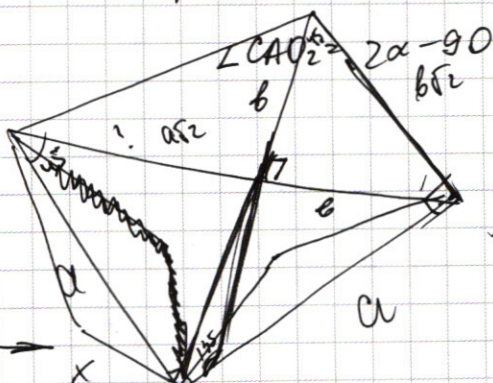
если  $(x, y)$  - верш, то  $(-x_0, y)$



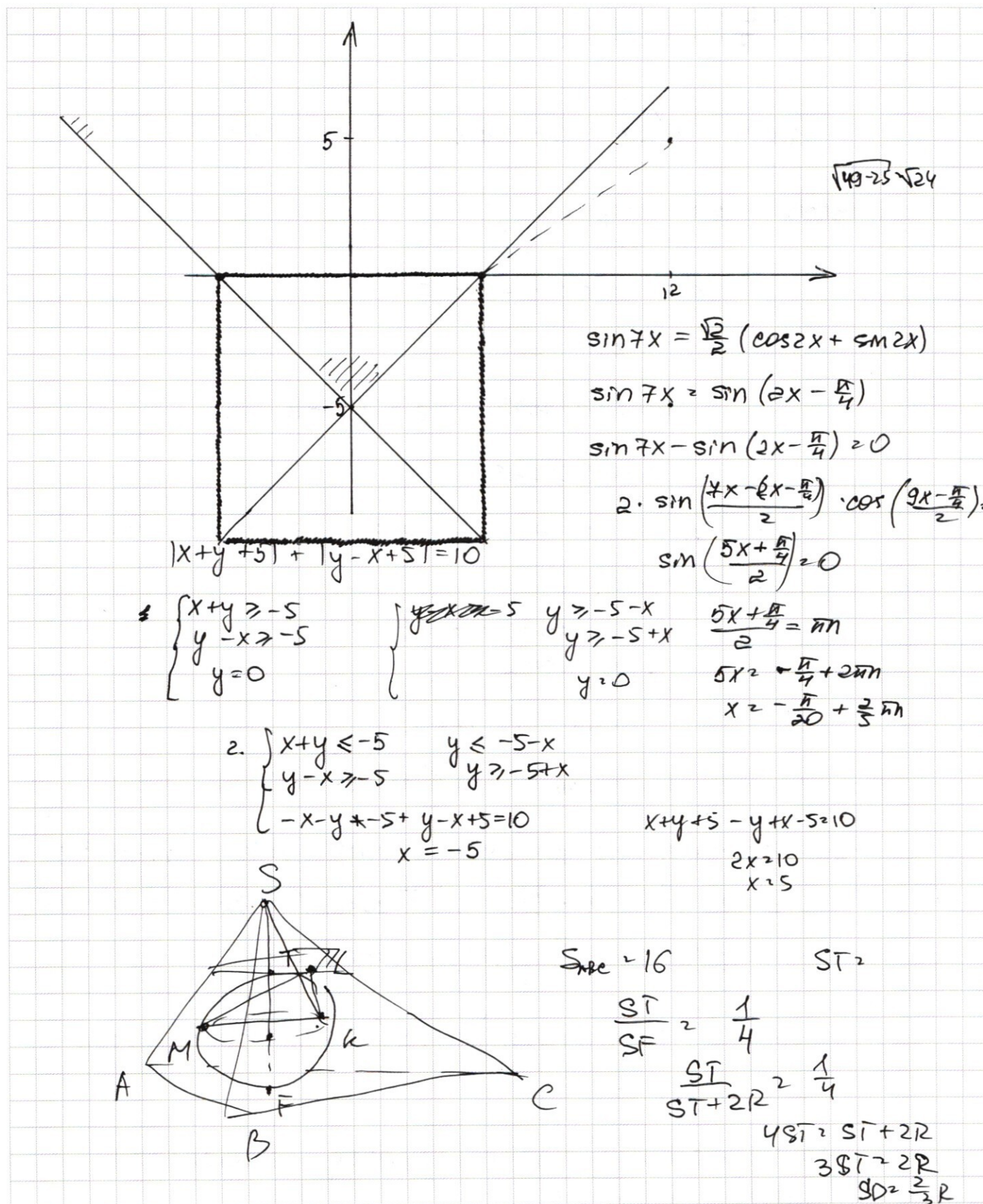
$$\sqrt{b^2 + 2a^2 + b^2 - 2\sqrt{2}ab}$$

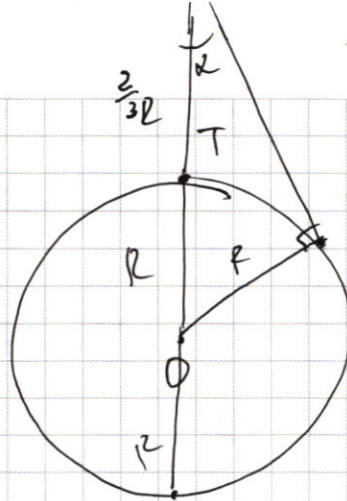
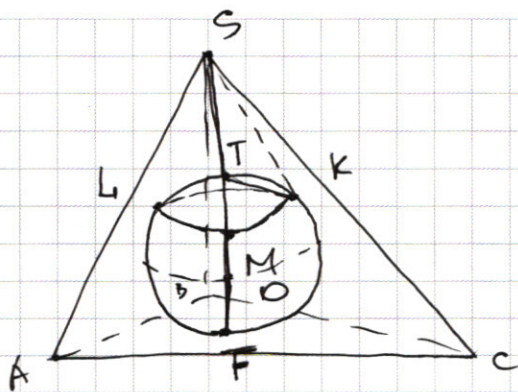
$$360 - \alpha$$

$$AD = AC$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$\sin \alpha = \frac{R}{R + \frac{2}{3}R} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0.$$

~~cos 90~~  $\cos \alpha - \cos \beta$   
 $90 \quad 30$

$$\cos 90 - \cos 30 = -\cos 30.$$

$$2 \cdot 60 \cdot 30$$

~~2 \cos 120~~  $\cos 120 - \cos 60 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$

$$-2 \sin(90) \sin 30$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x$$

$$\sin 90 + \sin 30 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$2 \cdot \sin 60 \cdot \cos 30$$

$$2 \cdot \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

~~sin~~  $-\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x + \sqrt{2} \cdot \sin^2 2x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} \cdot \cos^2 2x = 0$$

$$\sin 2x \left( \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) + \cos 2x \left( \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x \right) = 0$$

$$\sin 2x \left( \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) - \cos 2x \left( \sin 7x - \right.$$

$$\left. 2 \sin 7x \left( -\sin 2x + \cos 2x \right) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) \right) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

~~cos 2x~~  $\cos \left( 2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$