

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 51

$$9261 = 4^3 \cdot 3^3$$

Так как произведение цифр равно 9261, то ни одна из цифр не равна 0, т.к. произведение равнялось бы 0. Также исключены в качестве цифр не могут быть цифры: 2, 4, 5, 6, 8, т.к. 9261 не делится ни на одну из этих чисел. У нас могут быть цифры 1, 3, 4, 9.

$9261 = 4^3 \cdot 3^3$, значит у нас обязательно в числе должно быть ровно три цифры 4. И еще либо три цифры 3, либо цифра 3 и цифра 9, т.к. число 9261 делится в полном разложении на простые множители ровно три тройки. ~~После этого мы должны для себя решить, какие цифры мы поставим~~ обязательно цифры, все остальные цифры в числе должны будут равняться 1, т.к. произведение цифр, которые обязательно будут в числе, уже равно 9261. После рассуждений получается.

Случай: Число состоит из трех цифр 4, трех цифр 3 и двух цифр 9.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4^2}{1 \cdot 3 \cdot 2} = 560$$

8! количество способов расставить в ряд 8 различных чисел. Делим на $3! \cdot 3! \cdot 2!$, чтобы исключить повторяющиеся перестановки, т.к. есть одинаковые цифры.

Получай: Число составлено из трех цифр 4, из одной цифры 3, из одной цифры 2 и из трех цифр 1.

$$\frac{8!}{3! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3} = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680$$

Общее количество возможных чисел с указанным количеством цифр равно 1680.

Ответ: 1680.

Задача 52

$$(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$$

$$-2 \sin 2x \cdot \sin 4x - \sqrt{2} (\cos 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x) = 0$$

$$2 \cdot \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\sqrt{2} \sin 4x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad \vee \quad \sqrt{2} \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2} \sin(2x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sqrt{2} \cdot (\sin 4x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot \sin(\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2}) \cdot \cos(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \sin\left(\frac{5x - \pi}{2}\right) = 0 \quad \text{или} \quad \cos\left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\frac{5x - \pi}{2} = \pi n$$

$$\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi n$$

$$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

$n \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$; $\frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$; $n \in \mathbb{Z}$

Задача 53

$$(x^3 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x} \cdot y^{\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$y = 2x$$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln(2x) - 3\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^2}}$$

$$2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln x^2} = 1$$

$$2^{\ln \frac{2}{x^2}} \cdot x^{\ln 2} = 1$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y \cdot (y - 2x) + x \cdot (y - 2x) - 4 \cdot (y - 2x) = 0$$

$$(y + x - 4) \cdot (y - 2x) = 0$$

$$y = -x + 4 \quad \text{или} \quad y = 2x$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}x^2} \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 1$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}x} \cdot 2^{\frac{1}{2}x} = 1$$

$$2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{-\frac{1}{2}x} = 1$$

$$\ln 2 = \ln x$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$2^{\ln x} = x^{\ln 2}$$

$$2) \begin{cases} x^{-2 \ln x} = y^{\ln y} - 3 \ln x \\ y = 4 - x \end{cases}$$

$$x^{-2 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)} - 3 \ln x$$

$$\text{при } x = 2$$

$$2^{\ln \frac{1}{4}} = 2^{\ln 2} - 3 \ln 2$$

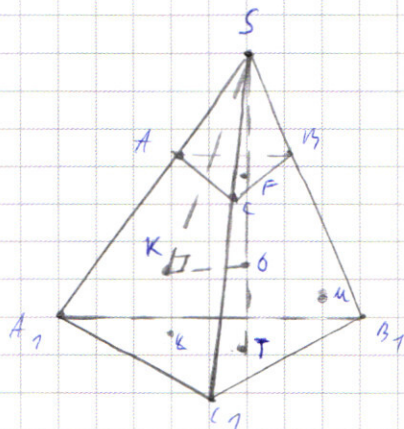
$$2^{\ln \frac{1}{4}} = 2^{\ln \frac{1}{4}}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

ответ: $(2; 4); (2; 2)$

Задача 54



$$(ABC) \perp SO$$

$$(A_1B_1C_1) \perp SO$$

и они касаются
сферы

$$(ABC) \parallel (A_1B_1C_1)$$

Эти плоскости делят стороны SA_1, SB_1, SC_1 в равные соотношения

т.е. $AC \parallel A_1C_1, BC \parallel B_1C_1, AB \parallel A_1B_1$. Пусть $\frac{SA}{SA_1} = k$, тогда

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A_1B_1C_1}} = k^2 \quad k^2 = \frac{7}{16} \quad ; \quad k = \frac{1}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$SO \cap (ABC) = m.F$$

$$SO \cap (A_1B_1C_1) = m.T$$

$$\frac{SF}{ST} = \frac{1}{4}, \text{ значит } \frac{SF}{FT} = \frac{1}{3}$$

$$KO = \frac{1}{2} FT \text{ т.к. } KO - \text{ радиус, } FT - \text{ диаметр.}$$

$$FT = 2KO$$

$$\frac{SF}{2KO} = \frac{1}{3}$$

$$SF = \frac{2}{3} KO$$

$$SO = SF + FO$$

$$SO = \frac{2}{3} KO + KO = \frac{5}{3} KO$$

$$OK \perp A_1SB_1$$

$$OK \perp KS$$

т.к. OK - радиус. в плоскости
массовых

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{SO}$$

$$\sin \angle KSO = \frac{KO}{\frac{5}{3} KO} = \frac{3}{5}$$

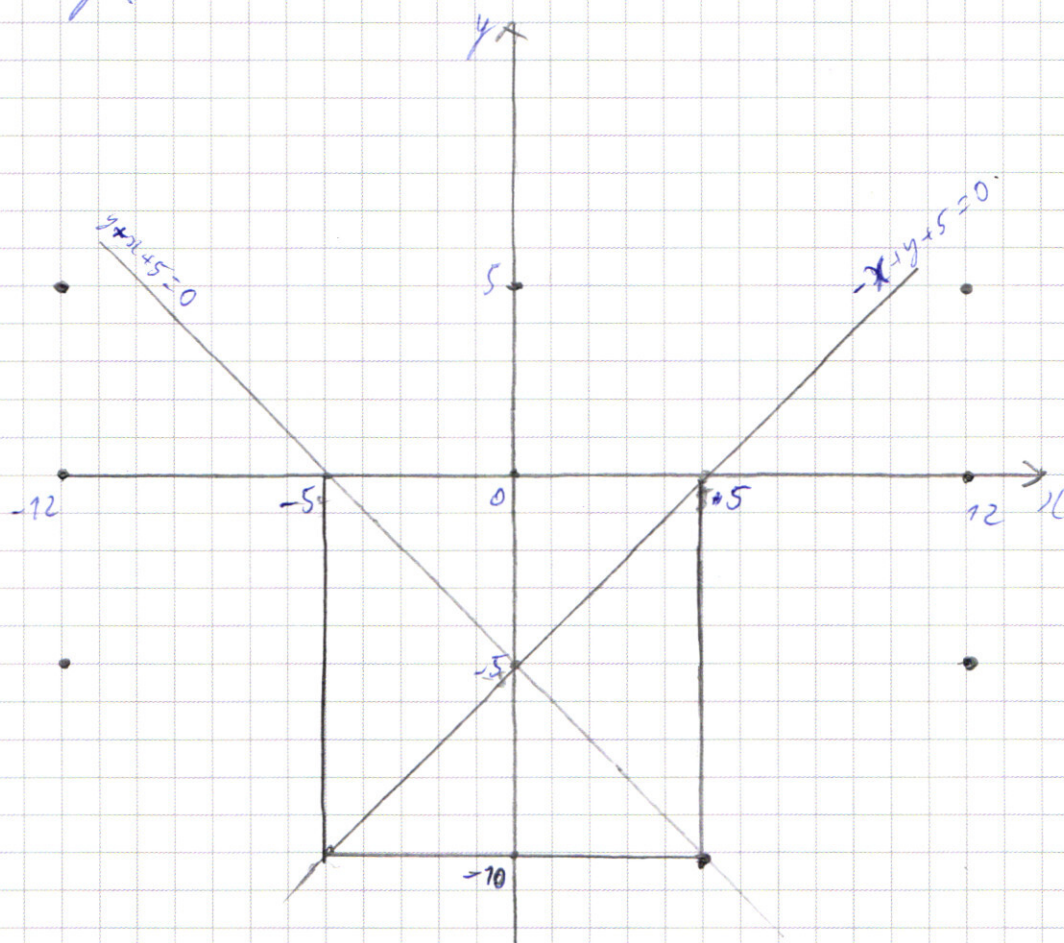
$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

Задача 55

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (14-12)^2 + (41-5)^2 \end{cases}$$

Нужно изобразить систему на плоскости Oxy .



Выберем сначала первое равенство:

$$1) \quad x + y + 5 \geq 0 ; \quad y - x + 5 \geq 0$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$y = 0$$

Получим, что это отрезок от точки $(-5; 0)$ до точки $(5; 0)$.

$$2) \quad x + y + 5 \geq 0 ; \quad y - x + 5 < 0$$

$$x + y + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$x = 5$$

Получим отрезок от точки $(5; 0)$ до точки $(5; 10)$.

$$3) \quad x + y + 5 < 0 ; \quad y - x + 5 < 0$$

$$-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = -10$$

получили отрезок от $(5; -10)$ до $(-5; -10)$

$$y) \quad x + y + 5 < 0; \quad y - x + 5 \geq 0$$

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$x = -5$$

получили отрезок от $(-5; 0)$ до $(-5; -10)$

Из второго уравнения получим, что
это четыре части окружности симметричные относительно $(0; 0)$, т.е.
и x по y симметричны. Запишем эти
четыре части $(12; 5)$ $(12; -5)$
 $(-12; -5)$ $(-12; 5)$.

Записав эти части равны ± 5

Итак окружности в четвертях III и IV
будут иметь симметричные точки
пересечения с первым уравнением, т.е.
являться квадратами. Значит у каждой
из этих двух частей ровно по одной
точке пересечения с квадратом.

Т.е. части из четвертей I и II не
могут прилежать к квадрату т.е. его
нет в этих четвертях. Значит
части второго равенства в четвертях
III и IV его касаются, ~~и~~ и значит
их радиус равен 4, т.е. $a = 40$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

8-знач. чисел

9261

3087

1029

343

49

$$4^3 \cdot 3^3 = 21^3$$

x 343

24

+ 2401

686

9261

$$\frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{4}{10}$$

8

10 10 10

3 6 9

3 3 3 9 3

3 3 3 9 3

105

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x - \cos 4x - \sin 5x - \cos 4x - \cos 5x - \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sqrt{2} \left(\sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sin \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$- \cos 4x$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$$

$$2 \cdot \sin \left(4x + \frac{\pi}{4} \right) \cdot \cos 2x - \cos 4x$$

$$2 \cdot \sin 4x \cdot \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x$$

$$2 \sin 2x \cdot \cos 5x + \sin^2 2x$$

$$1 \cdot \cos 2x \cdot \sin 5x - \cos^2 2x$$

$$\sin 2x - \cos 5x$$

$$\sin 5x - \cos 2x$$

$$-2 \sin 2x \cdot \sin 4x + 2 \sin 4x \cdot \cos 2x$$

$$2 \cdot \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 4x + \sin 4x)$$

$$\cos 2x \cdot (2 \sin 4x - \cos 2x)$$

$$\sin 2x \cdot (2 \sin 4x - \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cdot (\sqrt{2} \sin 4x - \cos 2x - \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \left(\sin 4x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$2 \cdot \left(\sin \left(\frac{5x + \pi}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{6x + \pi}{2} \right) \right)$$



черновик



чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$$\cos\left(\frac{2x+\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{5x+\pi}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{8x+\pi}{2}\right) = 0$$

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$5x + \frac{\pi}{2} = 2\pi n$$

$$8x + \frac{\pi}{2} = \pi + 2\pi n$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$5x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$8x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi n}{2}$$

$$x = -\frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

$$\left((x^2 y^4)^{-\ln x}\right) = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}$$

$$y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x^2}$$

$$\frac{3}{2}x = 4$$

$$x = \frac{8}{3}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x = 2$$

$$x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x^2}$$

$$\left(\frac{1}{4}y^2 - xy - x^2\right) + \left(\frac{3}{4}y^2 - 4y + \frac{16}{3}\right) - (x^2 - 8x + 16) - \frac{16}{3} - 16 = 0$$

$$\left(\frac{1}{2}y - x\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}y - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 - (x - 4)^2 =$$

$$\frac{x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x}}{y^{-2\ln x}} = \frac{x^{-2\ln x}}{1} \cdot y^{3\ln x} = y^{\ln y}$$

$$\frac{x^{-2\ln x}}{1} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)}$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\cos 90^\circ - \cos 0^\circ = -1$$

$$-2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$y \cdot (y - 2x) + x \cdot (y - 2x) - 4 \cdot (y - 2x) = 0$$

$$(y + x - 4) \cdot (y - 2x) = 0$$

$$x^{\ln y} = y^{\ln x}$$

$$y = 4 - x$$

$$y = 2x$$

$$2^{\ln 3} = 3^{\ln 2}$$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2x}{x^2}\right)}$$

$$\ln 2 \neq \ln x^2$$

$$x^{-2\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x}}$$

$$2 \cdot 2^{-\ln x^2}$$

$$2^{\ln \frac{2}{x}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x}} \cdot x^{\ln x^2} = 1$$

$$x^{-\ln 2} = 2^{-\ln 2}$$

$$x = 2$$

$$2^{\ln \frac{2}{x}} \cdot x^{\ln 2}$$

$$\ln \ln 2$$

$$2 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{-\ln 2} = 2x$$

$$2 \cdot x^{-\ln 2} = 1$$

$$x^{-\ln 2} = \frac{1}{2}$$

$$x^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 4 - x$$

$$x > 0$$

$$x^{-2} \ln x = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$x^{\ln \frac{4}{x^2}} = (4-x)^{\ln \frac{4-x}{x^3}}$$

$$x^{-\ln x^2} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot (4-x)^{-\ln x^2}$$

$$x^{-2 \ln x}$$

$$2^{\ln \frac{2}{4}} = 2^{\ln 2} \cdot 2^{\ln \frac{1}{8}}$$

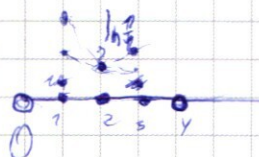
$$2^{\ln \frac{1}{4}} = 2^{-\ln 4}$$

$$x > 0$$

$$y = 4 - x$$

$$y > 0$$

$$x < 4$$



$$\frac{1}{4^{\ln 2}} \cdot \frac{1}{4^{\ln 3}} = 4^{\ln \frac{1}{12}}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)^{\ln x}$$

$$(1-\Delta x)^{\ln(4-\Delta x)} \cdot (3+\Delta x)^{-3 \ln x}$$

$$(4-x)^{\ln(4-x)} \cdot (4-x)^{-3 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = (4-x)^{\ln(4-x)} \cdot x^{-3 \ln(4-x)}$$

$$x^{\ln \frac{(4-x)^3}{x^2}} = (4-x)^{\ln(4-x)}$$

$$\begin{aligned} 1 & \quad \ln 3 < 3^{\ln 3} \\ 2 & \quad \ln 2 = 2^{\ln 2} \\ 3 & \quad \ln \frac{1}{9} < \ln 1 \\ 4 & \quad \ln 1 < 1^{\ln 1} \end{aligned}$$



76

$$k = 4$$

$$SF = y$$

$$2R = 3g$$

$$y = \frac{2}{3}R$$

$$\sin \alpha = R : \frac{5}{3} R = \frac{3}{5}$$

$$\begin{array}{r} + 1500 \\ 180 \\ \hline 1680 \end{array}$$

$$9261 = 4^3 \cdot 3^3$$

444 333

3 9

3 3 3

$${}^3C_3 \cdot {}^3C_5 = \frac{8 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 2} = 560$$

$$C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 4 = 720$$

C₆

$$\begin{array}{r} 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \\ \hline 2 \cdot 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} + 7720 \\ 560 \\ \hline 7680 \end{array}$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$24 = 0$$

$$-x + \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{1}{4} \cdot x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

4

49

