

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sqrt{2}$

$$(\cos 9x - \cos 5x) - \sqrt{2} \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 7x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2\sqrt{2} \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0 \quad | : \sqrt{2}$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$2 \sin 7x \cos(2x + \frac{\pi}{4}) - 2 \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) (\sin 7x - \sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$2 \cos(2x + \frac{\pi}{4}) \cdot (+2 \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2}) = 0$$

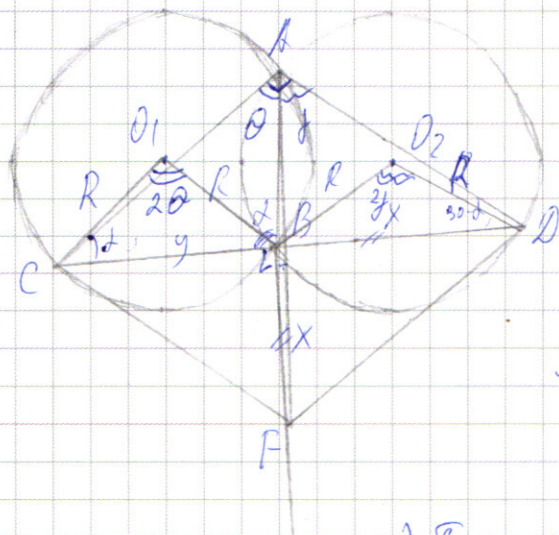
$$\begin{cases} \cos(2x + \frac{\pi}{4}) = 0 \\ \sin \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \\ \cos \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi h, h \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi h, h \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi h}{2}, h \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Answer: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi h}{2}, h \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi m}{9}, m \in \mathbb{Z}$

~6



а) 1) Пусть $\angle CAB = \theta$; $\angle BAD = \varphi$, тогда,
 $\angle COB = 2\theta$; $\angle BO_2D = 2\varphi$, т.к.
 $\angle C_1B_1$ и C_2B_2 - впис. и уг. - углы, опр.
 на одну дугу; аналог., $\angle B_1A_1D_1$ и $\angle B_2A_2D_2$.
 Притом, $\theta + \varphi = 90^\circ$; $\theta = 90^\circ - \varphi$
 $2\theta = 180^\circ - 2\varphi$

2) Пусть $BD = BF = x$; $CB = y$. Тогда, по т. Пифагора,

из $\triangle CBF$, имеем: $CF = \sqrt{x^2 + y^2}$

3) из $\triangle CAB$ и $\triangle BO_2D$, по т. кос., имеем:

$$y^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\theta; x^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\varphi$$

$$y^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos (180^\circ - 2\varphi) = 2R^2 + 2R^2 \cos 2\varphi$$

$$\text{Итого, } CF = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos 2\varphi + 2R^2 + 2R^2 \cos 2\varphi} = \sqrt{4R^2} = 2R = 20$$

Ответ: а) 20

б) 1) По условию, $BC = 12$, тогда из (а), т.к. $x^2 + y^2 = CF^2$, имеем

$$BF = BD = x = 16, \text{ т.к. } CD = 16 + 12 = 28$$

2) из $\triangle ACD$ - н.у., имеем:

$$AB = \sqrt{CB \cdot BD} = 4\sqrt{3}$$

$$3) \text{ Итого, } S_{ACF} = \frac{1}{2} BC \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot (4\sqrt{3} + 16) = 48(\sqrt{3} + 2)$$

Ответ: б) $48(\sqrt{3} + 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~1

$$1) 9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

2) Ответ, могут быть следующие 8-значные числа:

а) Составы из набора: 3, 3, 3, 7, 7, 7, 1, 1

б) Составы из набора: 9, 3, 7, 7, 7, 1, 1, 1

3) Из набора (а) можно составить ~~различные~~ различные числа

4) Из набора (б) можно составить: $4! \cdot 3! \cdot \frac{8!}{3! \cdot 3!} = 1080$ разл. чисел

5) Ответ, всего таких чисел: 1620

Ответ: 1620

~5

$$1) |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$2) (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \quad (2)$$

1) Рассм. первое ур. системы: ~~выражение~~ ~~выражение~~

выражение квадрат со сторонами 10, вершинами в Т. (0; -5)

2) Ур. (2) системы задает на координатной 4 части окружностей:

а) $x > 0, y > 0: (x-12)^2 + (y-5)^2 = a$

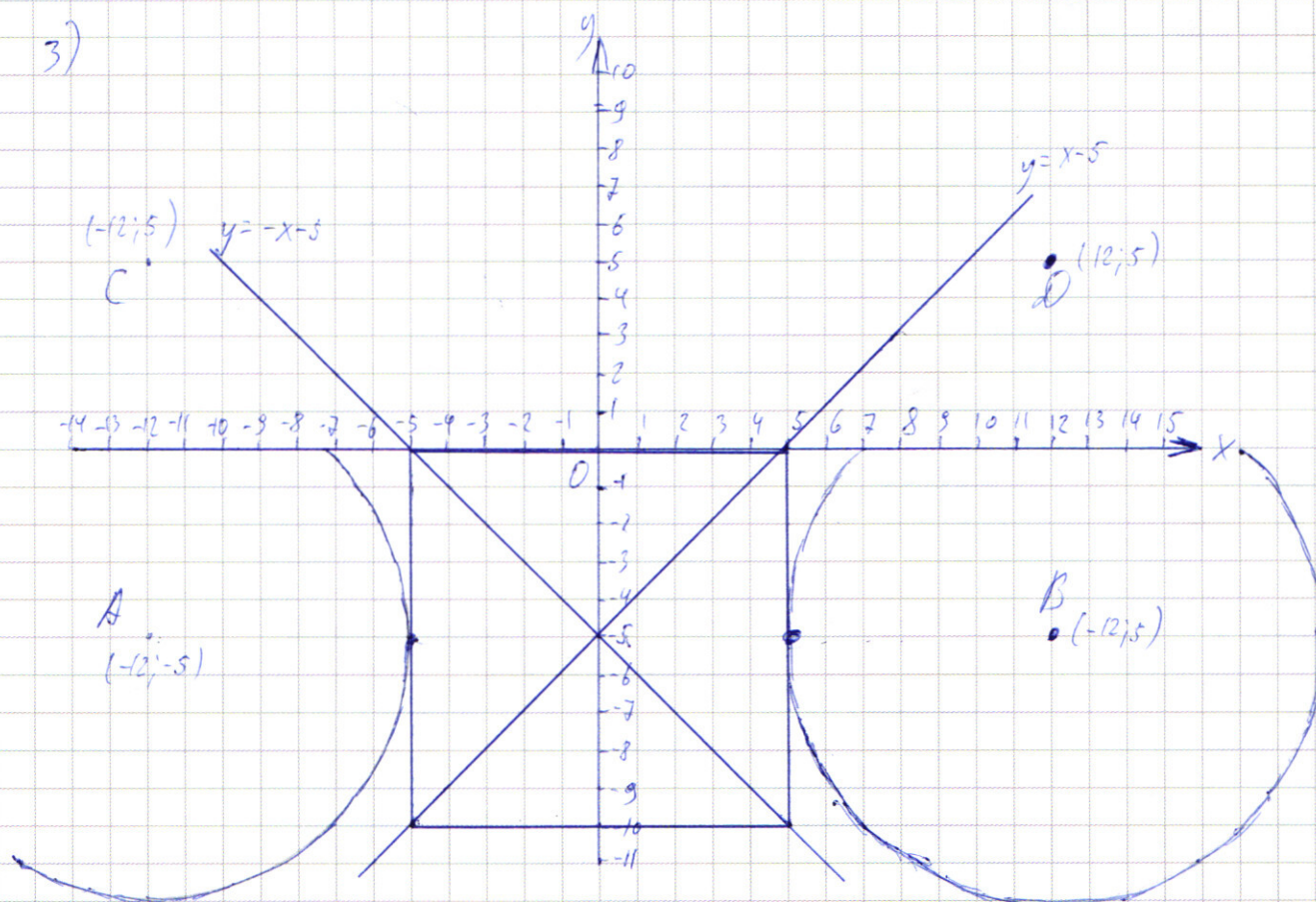
б) $x < 0, y > 0: (x+12)^2 + (y-5)^2 = a$

в) $x > 0, y < 0: (x-12)^2 + (y+5)^2 = a$

г) $x < 0, y < 0: (x+12)^2 + (y+5)^2 = a$

Все эти ур. задает части окружностей с вершинами в Т. (12; 5); (12; -5); (-12; 5); (-12; -5), радиусами $\sqrt{a}$, заданные на своих промежутках.

3)



4) Из-за симметрии имеет равно два решения или в том же, когда
 радиус окружности $r_0 = 7$, т.е. $\alpha = 49$. При других α , реш. либо не будет,
 либо будет более двух.
 Ответ: $\alpha = 49$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9261 = 9 \cdot 1020 = 3^3 \cdot 343 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$1) 3 \cdot 3 \cdot 2 = 32 \cdot 9 = 270 + 18 = 288$$

$$9 : 3 = 3, 2 : 2 = 1, 1 : 1 = 1, 1 : 1 = 1$$

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \sim 4$$

$$x > 0, \frac{y}{x^2} > 0 \Rightarrow y > 0$$

$$x^2 \frac{y}{x^2} = y \ln\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

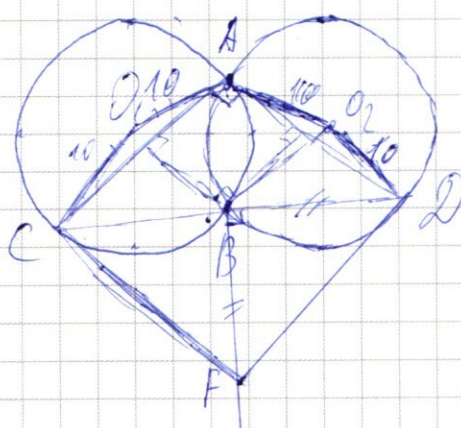
$$4x^2 y$$

~ 6

$$AB = \sqrt{12 \cdot 18} = 6\sqrt{3}$$

$$(8\sqrt{3} \cdot 16) \cdot 12$$

$$= 48\sqrt{3} \cdot 96 = 48(\sqrt{3} + 2)$$



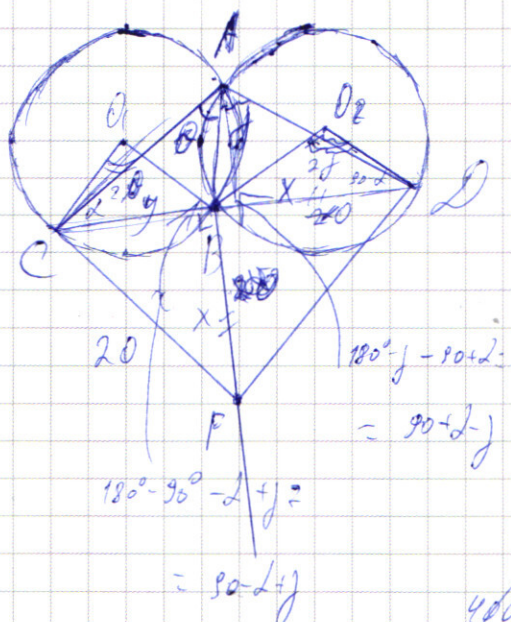
$$2^x + 3 \cdot 2^{39} = 26 + 2^{33} - 2x$$

$$2^{26} + 2^{34}$$

$$4 \cdot 2^{33} + 2 \cdot 2^{33} = 6 \cdot 2^{33}$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{33} = 26 + 2^{33} - 2x$$

$$2^x + 5 \cdot 2^{33} = 26 - 2x$$



$$j + \theta = 10^\circ; \theta = 90^\circ - j; \theta = 180^\circ - 2j$$

$$CB^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2\theta; BO^2 = BF^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos 2j$$

$$y^2 = R^2 \sqrt{2 - 2\cos 2\theta}; x = R \sqrt{2 - 2\cos 2j}$$

$$CF = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{2R^2 - 2R^2 \cos 2\theta \cos(180 - 2j) + 2R^2 - 2R^2 \cos 2j} = \sqrt{4R^2} = 2R = 20$$

$$400 = 200 - 200 \cos 2j$$

$$200 \cos 2j = -200$$

$$\cos 2j = -1$$

$$y = 12 \Rightarrow x = 16$$

$$S_{ACF} = ?$$

$$\sin \theta = \cos j$$

2R

$\cos 2x =$

$$\sin 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 5x$$

$$\cos 7x + \cos 3x - \sqrt{2} \cos 10x = \sin 7x + \sin 3x$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \sin 2x$$

$$\cos 5x \sin 2x + \cos 3x \sin 5x - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$\sqrt{2} \cos(7x + \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(3x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 5x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 10x = 2 \sin 5x \cos 2x$$

$$2 \cos 2x (\cos 5x - \sin 5x) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x \cdot \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 10x = 0$$

$$2 \cos 2x \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sin(10x + \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$2 \cos 2x \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - 2 \sin(5x + \frac{\pi}{4}) \cos(5x + \frac{\pi}{4}) = 0$$

$$\cos(5x + \frac{\pi}{4}) (\cos 2x - \sin(5x + \frac{\pi}{4})) = 0$$

$$\sin(2x + \frac{\pi}{2}) - \sin(5x + \frac{\pi}{4}) = \dots$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = 12$$

$$x = 16$$

$$S_{KBC} = S_{CBK} + S_{KBC} = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96 + S_{KBC}$$

$$\frac{y}{\sin \theta} = 2R$$

$$\sin \theta = \frac{y}{2R} = \frac{12}{20} = 0.6 = \frac{3}{5}$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \gamma = \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{3}{5}$$

$$44 = 16^2 + 12^2 = 2R \cdot AC$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \sin \theta$$

$$\sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3} \cdot 4}{3} \right)$$

$$\frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 = 1120$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

или

$$\begin{cases} (x^2+y^2) - \ln x = y \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-x)^2 - x^2 + 4x - 4 + 4 + 2y(x-y)$$

$$(x-y)(y-x)$$

$$(y-x)(y-x) =$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |x-y-5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$\sin 2 - \sin 3 = 2 \sin \frac{2-3}{2} \cos \frac{2+3}{2}$$

$$2x(x-4) - y(x+4)$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$y^2 - 2xy + x^2 - 3x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$(y-x)^2 - (x-2)^2 = x^2$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) - 4 + 8x - 4y = 0$$

$$(y^2 - 2xy + x^2) - 3x^2 + 8x + 8x - 4y = 0$$

$$(y-x)^2 = x^2 + 16x$$

$$-3x^2 + 8x - \frac{16}{3} + \frac{16}{3} + xy - 4y$$

$$4x^2 + 8x - 4 + 4 + xy - 4y = 0$$

$$(y-x)^2 = (2x -$$

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$\ln x = y^{\ln \frac{y}{x^2}}$$

$$\sqrt{12-18} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot 2^2} = 8\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{x} = 1 - \frac{2x}{y} + \frac{8}{y} - \frac{4}{x}$$

$$-2\ln x = y^{\ln \frac{y-4x^2}{x^2}}$$

logac

$$y^{\ln x - 2\ln x} = \ln y \cdot \ln \frac{y-4x^2}{x^2}$$

$$x-5 = -10$$

$$x = 5$$

$$x-5 = -10$$

$$x = -5$$

$$y = 5-5$$

$$(-a-b)^2 = (a-b)^2 - 2\ln^2 x = \ln y \cdot \ln \frac{y-4x^2}{x^2} = \ln y \cdot \ln \frac{y}{x^2} - 4$$

~5

$$y > x-5$$

$$y > x-5$$

$$x = 5$$

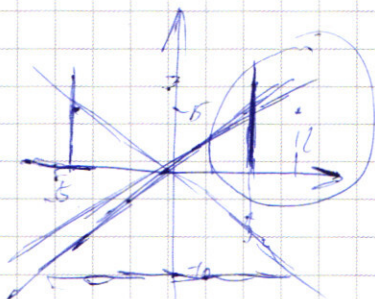
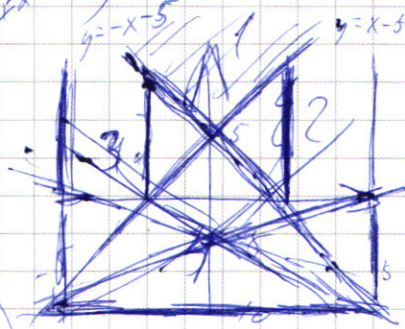
$$y >$$

$$1) x+y+5+y-x+5 = 2y+10$$

$$2) x+y+5-y+x-5 = 2x=10; x=5$$

$$3) -x-y-5+y-x+5 = -2x=10; x=-5$$

$$4) -x-y-5-y+x-5 = -2y-10=10; y=-10$$

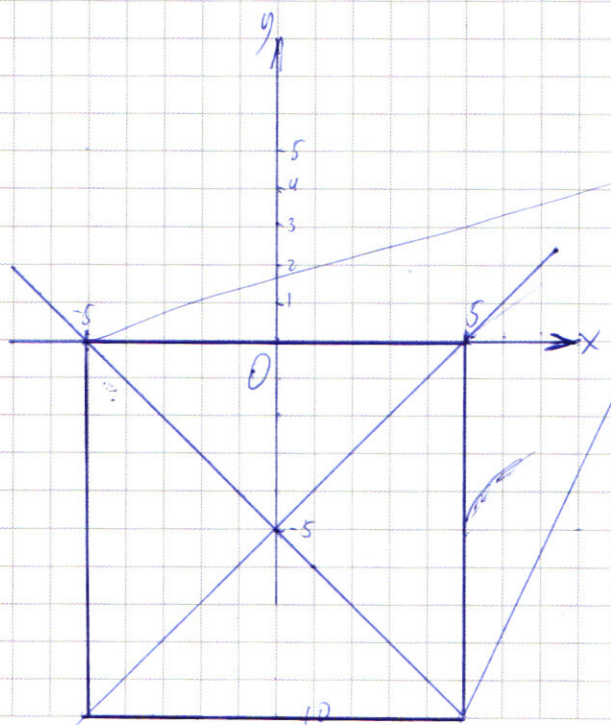


$$1) x > 0, y > 0: (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$2) x > 0, y < 0: (x-12)^2 + (y+5)^2 = 9$$

$$3) x < 0, y > 0: (x+12)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$4) x < 0, y < 0: (x+12)^2 + (y+5)^2 = 9$$



0.57

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~ 2

$$\cos 3x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

$$-2 \sin 2x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 4x \cos 2x = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 5x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x - \cos 4x$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 4x \cos 2x - 2 \sin 4x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 4x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = \sqrt{2} (\cos 2x \cos 45^\circ - \sin 2x \sin 45^\circ) = \sqrt{2} \cos(2x + 45^\circ)$$

$$2 \sqrt{2} \sin 4x \cos(2x + 45^\circ) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 4x \cos 2x$$

$$\cos 2x + 45^\circ \cos(4x + 90^\circ) =$$

$$2 \sin 4x \cos(2x + 45^\circ) - \cos 4x = 0$$

$$-2 \cos^2(2x + 45^\circ) - 1$$

$$2 \sin 4x \cdot \sin(7x + 2x + 45^\circ) + \sin(2x - 2x - 45^\circ) - \cos 4x = 0$$

$$\cos(2x + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2} \sin 4x - 1}{2}$$

$$\sin(4x + 45^\circ) + \sin(5x - 45^\circ) - \cos 4x = 0$$

$$\cos 3x + \sin 3x + \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\sin 2x - \sin(2x + 45^\circ)$$

$$\sqrt{2} \cos(3x + 45^\circ) + \sqrt{2} \cos(5x + 45^\circ) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \frac{2x - 7x - 45^\circ}{2} \cos \frac{9x + 45^\circ}{2}$$

$$\cos(3x + 45^\circ) - \cos(5x + 45^\circ) - \cos 4x = 0$$

$$\cos 4x = \sin(4x + 90^\circ)$$

$$\cos(3x + 45^\circ) - (\cos(5x + 45^\circ) + \cos 4x) = 0$$

$$\sin(4x + 90^\circ) = 2 \sin(2x + 45^\circ) \sin(2x + 45^\circ)$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{2}) =$$

$$= \cos 4x$$

$$\cos(3x + 45^\circ) - 2 \cos \frac{9x + 45^\circ}{2} \cos \frac{x - 45^\circ}{2} = 0$$

$$\sin(4x + \frac{\pi}{2}) = \cos 4x$$

$$2 \sin \frac{9x + 45^\circ + 5x + 45^\circ}{2} \sin \frac{9x + 45^\circ - 5x + 45^\circ}{2} - \cos 4x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$-2 \sin(2x + 45^\circ) \sin 2x - \cos 4x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} n$$

$$-2 \sin(2x + 45^\circ) \sin 2x - 1 + 2 \sin^2 2x = 0$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$2 \sin 2x (\sin 2x + \sin(2x + 45^\circ)) - 1 = 0$$

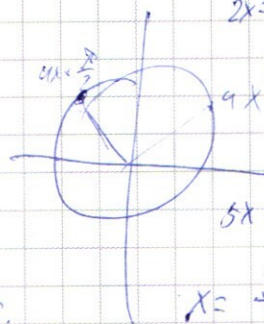
$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} m$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi}{5} n$$

$$3x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$



$$\cos 8x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 4x + \sin 5x = 0$$

$$2 \sin 7x \cos(2x+45^\circ) - \cos 4x = 0$$

$$\ast \cos 4x = -\sin(4x+90^\circ)$$

$$2 \sin 7x \cos(2x+45^\circ) + 2 \sin(2x+45^\circ) \cos(2x+45^\circ) = 0$$

$$\cos(2x+45^\circ) (\sin 7x + \sin(2x+45^\circ)) = 0$$

$$\cos(2x+45^\circ) = 0$$

$$2 \sin \frac{9x+45^\circ}{2} \cos \frac{5x-45^\circ}{2} = 0$$

$$\cos 2 - \sin 2 = \sqrt{2} \left(\cos 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \sin 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \sqrt{2} \left(\cos 2 \cdot \cos \frac{\pi}{4} - \sin 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$2 \cdot 1 = 2 \sqrt{2} \sqrt{2}$$

$$= \sqrt{2} \cos \left(2 + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$2x+45^\circ = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{9x+45^\circ}{2} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5x-45^\circ}{2} = \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{cases} (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x} z)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

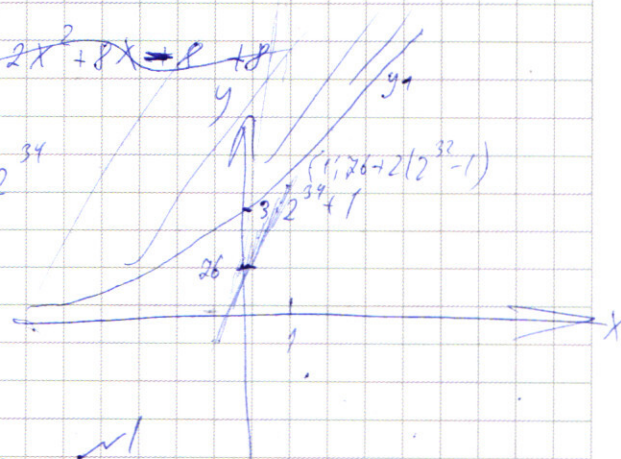
$$\begin{cases} (x^2 y)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x} z)} \\ (y-2)^2 - 2x^2 + 8x = 8 + 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 26 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x$$

$$2 \cdot 2 + 26$$



$$\vec{d} = 1, 1, 3, 3, 3, 2, 2, 7$$

