

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

Заметим, что $9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Тогда восьмизначные числа, произведение цифр которых равно 9261 , в своей десятичной записи могут содержать:

9	2	6	1	3
3	0	8	7	3
1	0	2	9	3
3	4	3	7	
	4	9	7	
		7	7	
			7	

а) три семерки, три тройки и две единицы;

б) три семерки, одну девятку, одну тройку и три единицы.

Посчитаем, сколько ^{имеется} чисел каждого вида:

$$а) \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 10 \cdot 56 = 560$$

$$б) \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 2 \cdot 560 = 1120$$

Следовательно, количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261 , $560 + 1120 = 1680$

Ответ: 1680

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \sin \frac{9x-5x}{2} = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin \frac{9x+5x}{2} \cdot \cos \frac{9x-5x}{2} = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos 2x - 2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\tan 2x = 1$$

$$(\sqrt{2} \sin 7x)^2 = (\sin 2x + \cos 2x)^2 \Rightarrow 2 \sin^2 7x = 1 + \sin 4x$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = -\cos 4x$$

$$\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) = -\cos \alpha$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$1 + x = x - \frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2}$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $x = \frac{3\pi}{2}$

$$\begin{cases} x^2 y^4 = y^{\ln x} \ln(y/x^3) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ \frac{y}{x^3} > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0, y > 0$$

Логарифмируем первое уравнение по основанию e:

$$\ln(x^2 y^4) = \ln y^{\ln(y/x^3)} \Leftrightarrow -\ln x \cdot \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^3) \cdot \ln y$$

$$-\ln x \cdot (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 3 \ln x) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln^2 y - \ln x \cdot \ln y - 2 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln y) \cdot (\ln y - \ln x) - 2 \ln x (\ln y - \ln x) = 0$$

$$(\ln y - \ln x)(\ln y - 2 \ln x) = 0$$

$$\begin{cases} \ln y = \ln x \\ \ln y = 2 \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ y = x^2 \end{cases}$$

1) Подставим $x = y$ во второе уравнение:

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, y_1 = 0 - \text{не удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\boxed{x_2 = 2, y_2 = 2}$$

2) Подставим $y = x^2$ во второе уравнение:

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \Leftrightarrow x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x_3 = 0, y_3 = 0 - \text{не удовлетворяет ОДЗ}$$

$$\text{Заметим, что } x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0 \text{ при } x = 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 6x + 8 & x - 2 \\ x^3 - 2x^2 & \\ \hline x^2 - 6x + 8 & \\ -x^2 + 2x & \\ \hline -4x + 8 & \\ -4x + 8 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$x_4 = 2 \quad y_4 = 4$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 4 = 17$$

$$x_5 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$

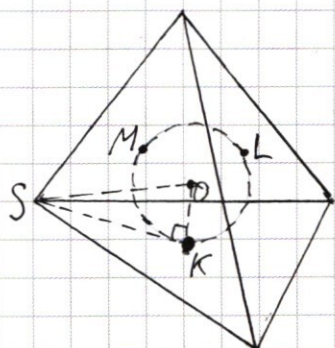
$$y_5 = -\frac{(1 + \sqrt{17})^2}{2^2}$$

$$\boxed{x_6 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}} \\ \boxed{y_6 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}}$$

не удовлетворяет ОДЗ

Ответ: $(2; 2); (2; 4); \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2}\right)$

✓ 4



Сечения трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , представляют собой подобные треугольники с коэффициентом подобия:

$k = \sqrt{\frac{7}{16}} = \frac{1}{4}$. Центр сферы O лежит на биссек-

торах трёхгранного угла S , а $\angle OKS = 90^\circ$, т.е. $\triangle OKS$ — прямоугольный. Обозначим точку пересечения SO и сечения площадью πA , а с площадью πB . Так как $AB = 2R$, где R — радиус сферы, а $\frac{SA}{SB} = \frac{SA}{SA + 2R} = \frac{1}{4} \Rightarrow SA = \frac{2R}{3}$. Тогда $\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SA + R} = R : \frac{5R}{3} = \frac{3}{5}$. Значит, $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$.

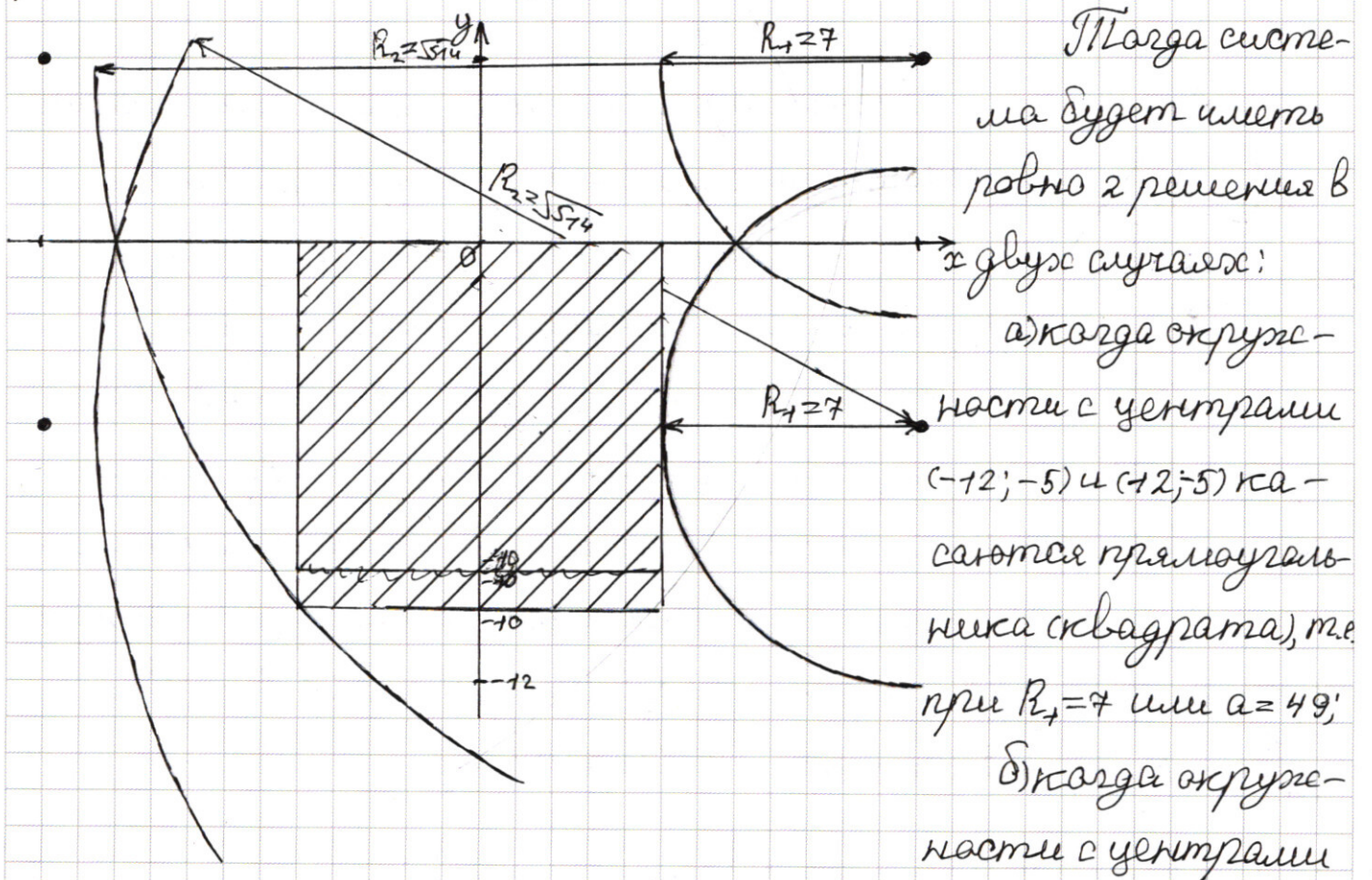
Ответ: $\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$

✓ 5

$$\begin{cases} |2x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 \\ (|x| - 1)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

Заметим, что первое уравнение на координатной плоскости означает множество точек, заключённых в прямоугольнике с вершинами, имеющими координаты $(-5; -10)$, $(5; 0)$, $(5; 0)$, $(-5; -10)$.

Второе уравнение на координатной плоскости представляет множество окружностей с радиусом $\sqrt{a}$ (откуда $\forall a: a \geq 0$) и центрами в точках $(-12; -5)$, $(-12; 5)$, $(12; -5)$, $(12; 5)$. При $a = 0$ решения второго уравнения $(-12; -5)$, $(-12; 5)$, $(12; -5)$, $(12; 5)$ не являются решениями первого, т.е. при $a = 0$ решений нет. Рассмотрим $a > 0$



Ответ; $a = 49$ и $a = 5 + 4$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓ 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \end{cases} \Rightarrow 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

Заметим, что при $x=6$ и при $x=38$ достигается равенство:

$$1) 76 + 2^{33} \cdot 6 - 2 \cdot 6 = 2^6 + 3 \cdot 2^{34} \Leftrightarrow 3 \cdot 2^{34} + 64 = 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2) 76 + 2^{33} \cdot 38 - 2 \cdot 38 = 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} \Leftrightarrow 2^{34} \cdot 19 = 2^{34} (16 + 3).$$

Следовательно, $6 < x < 38$, т.е. x принимает всего 31 значение.

Тогда каждому значению x соответствует:

$$2^{33}x - 2x + 76 - 2^x - 3 \cdot 2^{34} \text{ значений } y.$$

$$2^{33}x - 2x + 76 - 2^x - 3 \cdot 2^{34} = 2^{33}(x-6) - 64 \cdot 2^{x-6} + 64 - 2(x-6)$$

$$\sum_{6 < x < 38} 2^{33}(x-6) = 2^{33} \cdot \frac{31 \cdot 32}{2} = 2^{37} \cdot 31$$

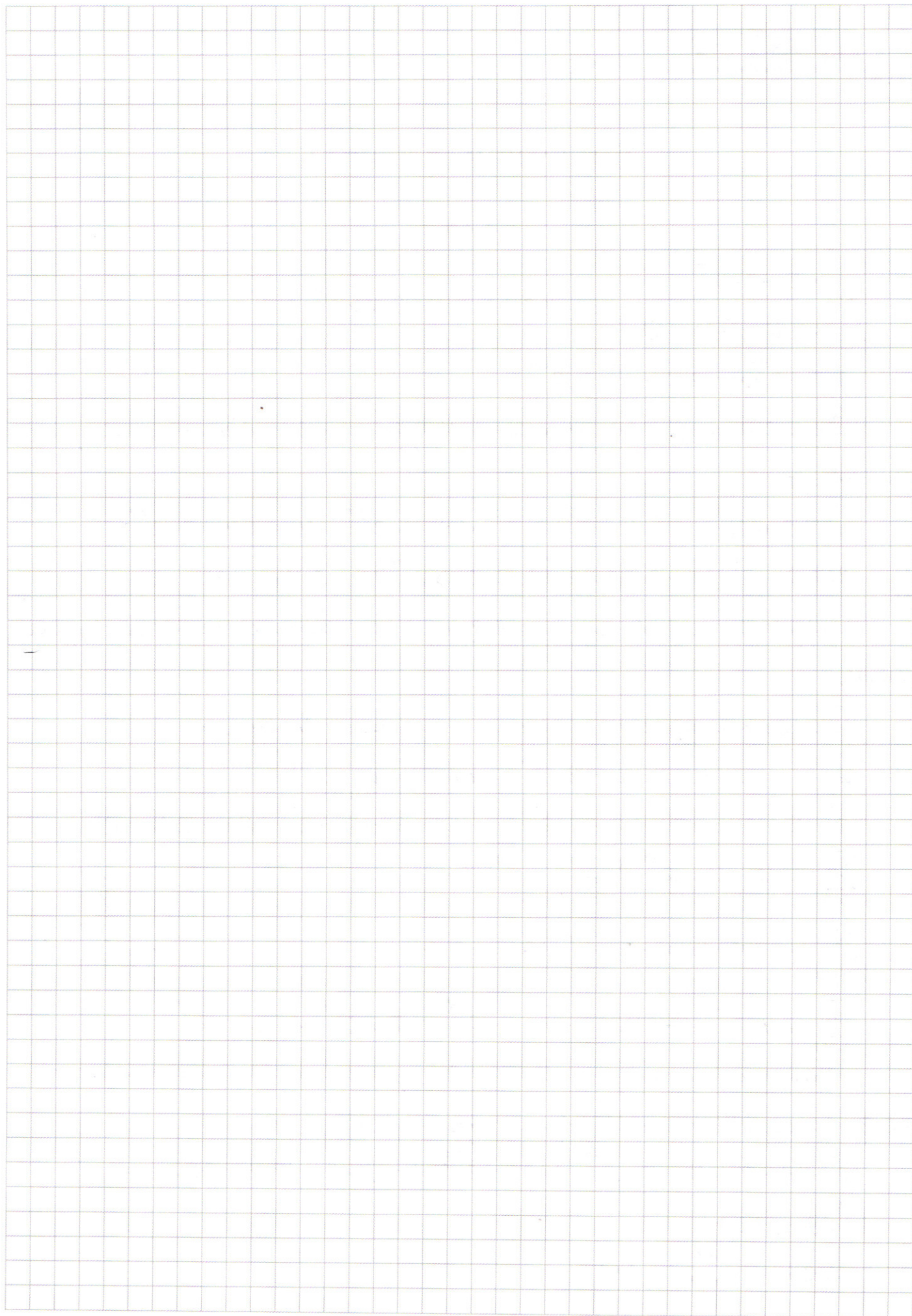
$$\sum_{6 < x < 38} (-2(x-6)) = -2 \cdot \frac{31 \cdot 32}{2} = -31 \cdot 2^5$$

$$\sum_{6 < x < 38} -64 \cdot 2^{x-6} = -64(2 + 4 + \dots + 2^{31}) = -64 \cdot (2^{32} - 2) = 2^7 - 2^{38}$$

(Так как $x-6$ при $6 < x < 38$ принимает значения от 1 до 31). Следовательно, всего пар целых чисел (x, y) :

$$\begin{aligned} & 2^{37} \cdot 31 - 31 \cdot 2^5 + 2^7 - 2 + 1984 = 2^{37} (31 - 2) + 2^7 + 1984 - 31 \cdot 32 = \\ & = 2^{37} \cdot 29 + 1120 \end{aligned}$$

Ответ: $2^{37} \cdot 29 + 1120$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$2 \cdot 3 \cdot 2^4$$

$$1+2+4$$

$$2 \cdot 2^3 - 2 \cdot 2 + 76 - 2 - 3 \cdot 2^4 = 2 \cdot (64 - 88)$$

$$2 \cdot 2^3 (x-6) - 2^x - 2(x+38) - 2 \cdot 76 - 2x =$$

$$2 \cdot 31 \cdot 16 = 2 \cdot 37$$

$$64 \cdot (2^{22} - 2) = 2^{28} - 2^7$$

$$2 \cdot 37 \cdot 1$$

$$2^3 \cdot 21 \cdot 11$$

$$64 \cdot (2^{22} - 2)$$

$$21 \cdot 22$$

$$21 \cdot (2^{33} - 11 - 22) = 21 \cdot 11 \cdot (2^{33} - 2) -$$

$$- 64 \cdot (2^{22} - 2)$$

$$2^{37} - 29 + 128 - 32 \cdot 37 + 1984 \cdot 76 \cdot 21$$

$$\begin{array}{r} \times 37 \\ 96 \\ + 32 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1984 + 128 = 2112 \\ - 2112 \\ \hline 992 \\ \hline 1120 \end{array}$$

$$\begin{aligned} & 2(x-6) = \\ & = 12 - \frac{21 \cdot 22}{2} = \\ & = -21 \cdot 22. \end{aligned}$$

$$= -2^{x-6} 64 + 64 + 12 - 2x =$$

$$= -2^{x-6} 64(2 - 1) + 2(6 - x)$$

$$1 \neq 1$$

$$1 + 2 = 3$$

$$1 + 2 + 4 = 7$$

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

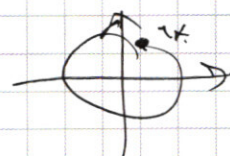
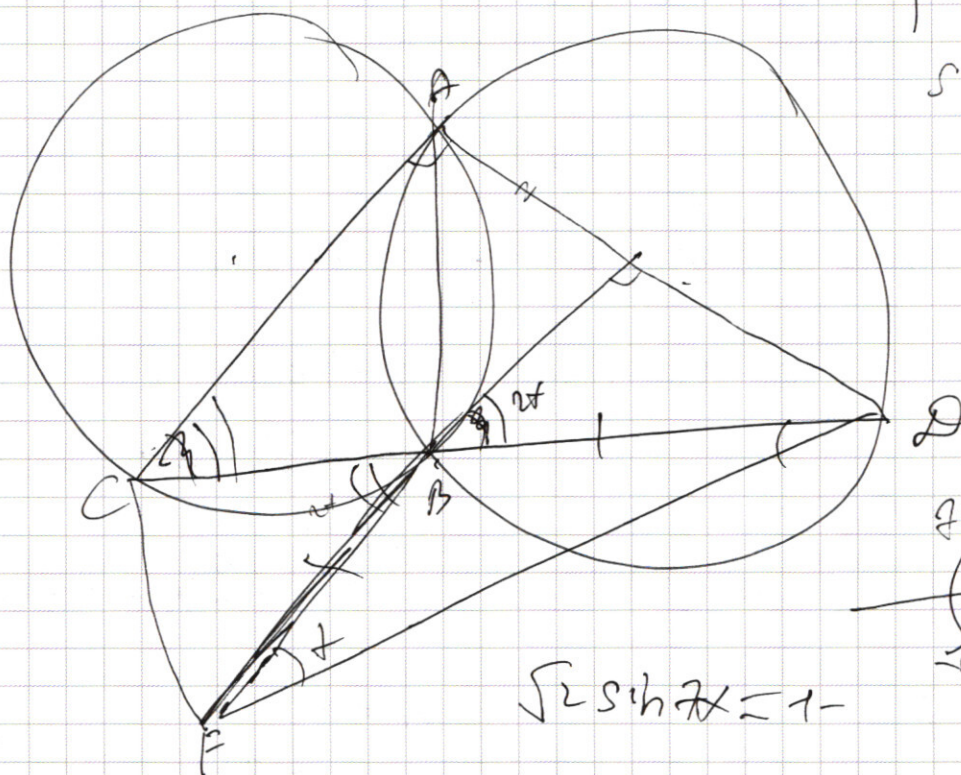
$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$$

$$2 \geq 2$$

$$2 + 4 = 6 \quad 2^1 - 2$$

$$2 + 4 + 8 = 14$$

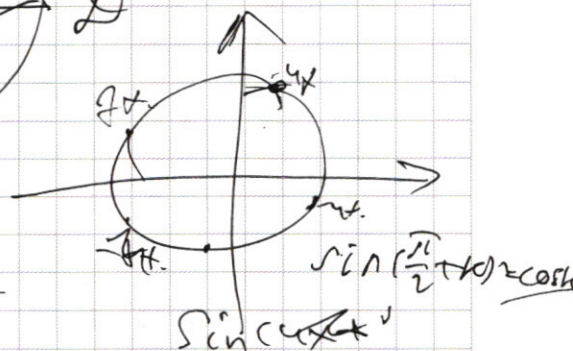
$$2^1 + 2^2 + \dots + 2^{22} = 2^{22} - 2$$



$$\sin 4x = \cos 7x$$

$$7x = \pi - 4x$$

$$11x = \pi$$



$$\sqrt{2} \sin 7x = 1$$

$$2 \sin^2 7x = 1 + \sin 4x$$

$$-\cos 7x = \sin 4x$$

$$\cos(\frac{\pi}{2} + 4x) = -\sin 4x$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + k$$

$$\sin k - \frac{\pi}{2} = \cos k$$

$$4x = k - \frac{\pi}{2} = k$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \sin 2x + \cos 2x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = 1 - 2 \sin 2x \cdot \cos 2x =$$

$$2 - \sin 4x$$

$$\sqrt{2} (\sin 4x \cdot \cos 3x + \sin 3x \cdot \cos 4x) = 2 - \sin 4x$$

$$\sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 3x + \sqrt{2} \sin 3x \cdot \cos 4x = 2 - \sin 4x$$

$$\sin 3x \cdot \cos 4x = 1 - \sin 4x - \sqrt{2} \sin 4x \cdot \cos 3x$$

$$\sin 3x \cdot \cos 4x = 1 - \sin 4x (1 + \sqrt{2} \cos 3x)$$

$$\sin 4x = -\cos 7x$$

$$4x - \frac{3\pi}{2} = 7x$$

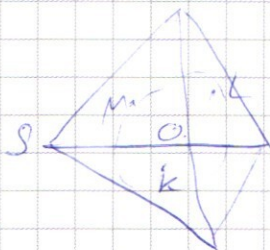
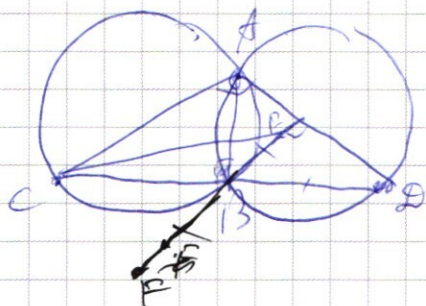
$$-3x = -\frac{3\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$4x - \pi = 7x$$

$$-3x = -\pi \quad x = \frac{\pi}{3}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin x + \cos x = \min$$

$$\sin^2 x + 2 \sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \min$$

$$\cos 2x + \sin 2x \leq \frac{2}{\sqrt{2}}$$

$$k = \frac{1}{4}$$



$$2 \sin^2 x + 2 \cos^2 x - 1 + 2 \sin x \cos x = \frac{2}{\sqrt{2}} \Rightarrow$$

$$2 \cos x (\cos x - \sin x) \leq \frac{2}{\sqrt{2}} + 1$$

$$2 + 3 \cdot 2 < 76 + 2 - 2x$$

$$2 - 2x < 76 + 2 - 3 \cdot 2 \Rightarrow 76 + 2 - 3 \cdot 2 - 2 = 76 - 5 \cdot 2$$

$$76 + 2 - 2x > 2 + 3 \cdot 2$$

$$76 - 3 \cdot 2 > 2 + 2x - 2x$$

$$1) x + y > -5 \quad y - x > -5$$

$$x + y + 5 + y - x + 5 = 10 \quad y > 0 \quad x > -5 \quad x < 5$$

$$2) x + y > -5 \quad y - x < -5$$

$$x + y + 5 + x - y - 5 = 10 \quad 2x = 10 \quad x = 5 \quad y > -10 \quad y < 0$$

$$3) x + y < -5 \quad y - x > -5$$

$$-5 - x - y + y - x + 5 = 10 \quad x = -5 \quad y < 0 \quad y > -10$$

$$4) x + y < -5 \quad y - x < -5$$

$$-5 - x - y + x - y - 5 = 10 \quad y = -10 \quad x < 5 \quad x > -5$$

$$4SA \geq SA + 2R \quad SA \geq \frac{2R}{3}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$y < 76 + 2^{33}x - 2x$$

$$2^{34}x - 2x + 76 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$x \geq 2$$

$$2^{34} - 4 + 76 > 2 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$-68 > 2^{35}$$

$$2^{33} \cdot 3 - 6 + 76 > 2^{34} + 3 \cdot 2^{34}$$

$$KLM.$$

$$3 \cdot 2^{33} \cdot 62 > 3 \cdot 2^{34}$$

$$x \geq 6$$

$$3 \cdot 2^{34} - 12 + 76 > 64 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$64 > 64.$$

$$x > 6$$

$$x \geq 34$$

$$2^{33} \cdot 34 - 68 + 76 > 2^{34} \cdot 4 = 2^{36}$$

$$x \geq 32$$

$$2^{33}$$

$$x \geq 36 = 9 \cdot 2^2$$

$$2^{35} \cdot 9 - 72 + 76 > 2^{36} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{34} \cdot 7$$

$$2^{35} \cdot 9 - 4 > 2^{34} \cdot 7 \quad x \geq 38$$

$$2^{34} \cdot 9 > 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 2^{34} \cdot 19$$

$$x \in (6, 38)$$

$$x \geq 9$$

$$2^{33} \cdot x - 2x + 76 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{33} \cdot x - 3 \cdot 2^{34} - 2^x - 2x + 76 >$$

$$7 \cdot 2^{33} + 62 - 128 - 3 \cdot 2^{34} = 2^{33} (7 - 6) - 66 = 2^{33} - 66$$

$$2^{36} + 60 - 256 - 3 \cdot 2^{34} = 2^{34} \cdot 7 - 452 = 2^{34} - 452$$

$$x \geq 9$$

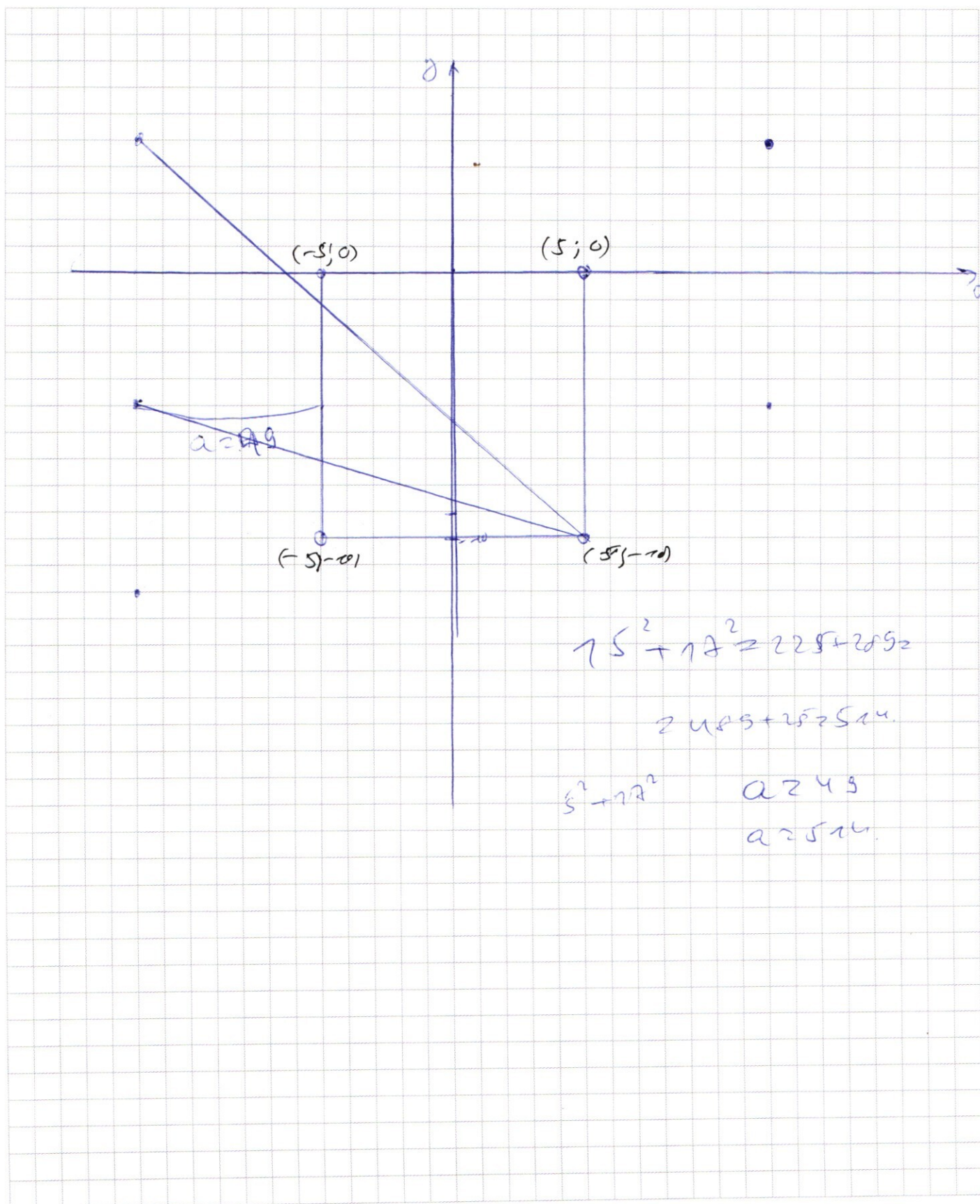
$$9 \cdot 2^{33} + 58 - 512 - 3 \cdot 2^{34} > 2^{35} \cdot 3 - 454$$

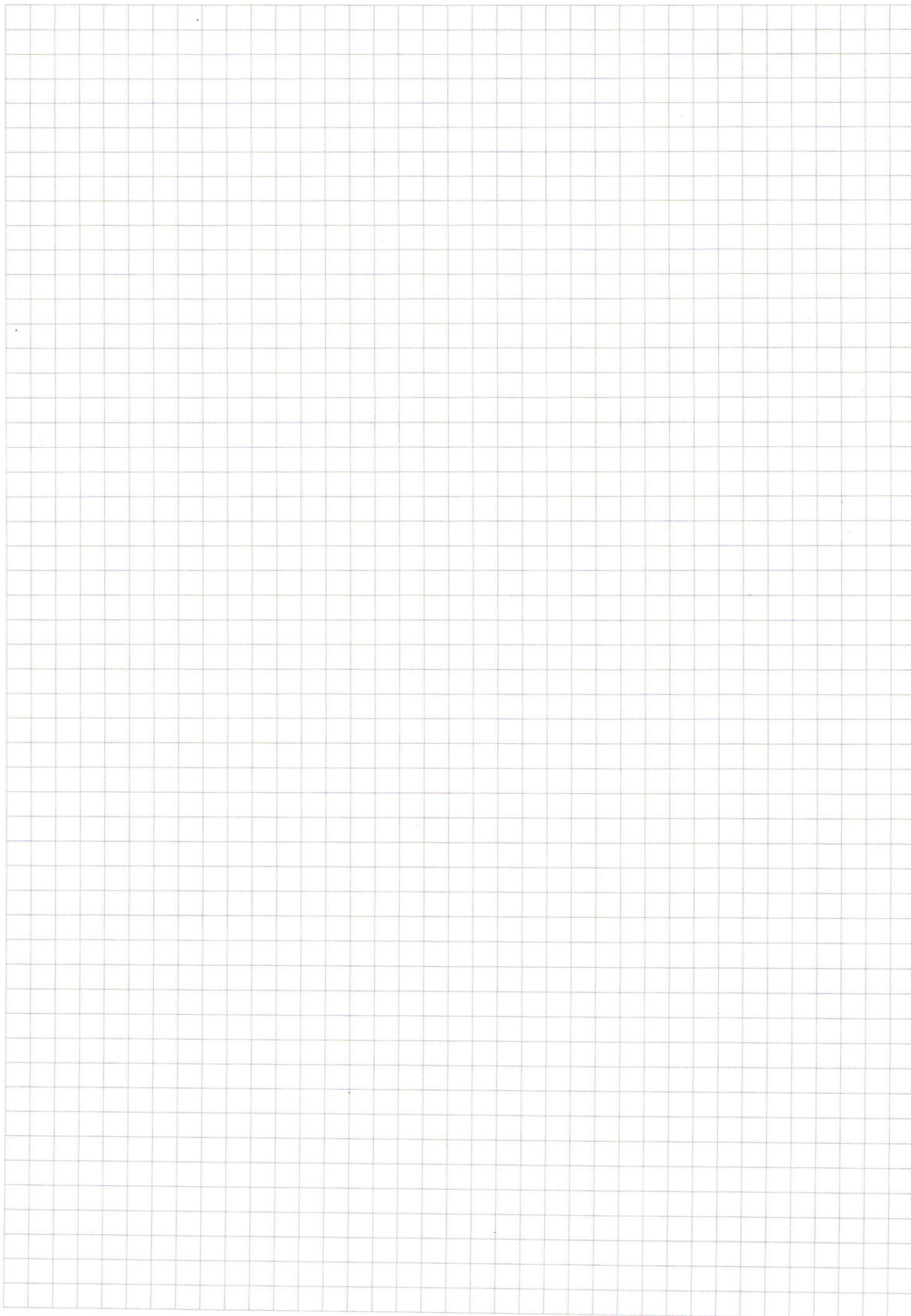
$$2^{33} \cdot (7 + 8 + \dots + 37)$$

$$2^x + 2x - 76$$

$$(2^7 + 2^8 + \dots + 2^{37}) \cdot 2 - (7 + 8 + \dots + 37) - 76$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$9764 \approx 3 \cdot 3087 \approx 3^2 \cdot 1029 \approx 3^3 \cdot 343 \approx 3^3 \cdot 7^3$$

три семерки три тройки и 2 единицы

три семерки одна девятка одна тройка 3 единицы

$$123 \quad 1122 \quad 1212 \quad 2112 \quad 1221 \quad 2121 \quad 2211 \quad (6)$$

$$\frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{24}{4} = 6$$

$$11222 \quad 12122 \quad 12212 \quad 21212 \quad 22112 \quad 22211$$

$$12212 \quad 12221 \quad 11222 \quad 21122 \quad 21212 \quad 21221$$

$$\frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{120}{6} = 20$$

$$11222 \quad 12122 \quad 12212 \quad 12221 \quad 21122 \quad 21212$$

$$21221 \quad 22112 \quad 22121 \quad 22211$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{40320}{72} = 560$$

$$2 \sin \theta + \int 2 \sin 2x - \int 2 \cos 2x dx$$

$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = 4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 1120$$

$$1120 + 560 = 1680$$

$$2 \sin \theta$$

$$76 + 2 \cdot (2^3 - 1) \times 2^3 + 3 \cdot 2^3$$

$$76 + 2 \cdot 2^3 - 2 \times 2^3 + 3 \cdot 2^3 = 76 + 2 \cdot 8 - 2 \cdot 8 + 3 \cdot 8 = 76 + 16 = 92$$

$$\frac{5\pi}{4}$$

$$\sin^2 x + \int 1 - \sin^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + 2 \sin \frac{\pi}{4} - \int 2 \sin \frac{\pi}{2} - \int \cos \frac{\pi}{2}$$

$$\sin^2 x + 1 - 2 \sin x = 1 - \sin^2 x$$

$$x = \frac{\pi}{4} \quad 2 \sin \frac{\pi}{4} - \int 2 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$2 \sin^2 x - 2 \sin x = 0$$

$$\sin x$$

$$2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} - \int 2 = -\frac{2\sqrt{2}}{2} - \int$$

$$\sin \theta + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin 2x + \cos 2x)$$

$$\cancel{\ln x} \cdot \ln x^2 y^4 = \ln \frac{y}{x} \cdot \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - \ln x) \cdot \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \cdot \ln y = \ln^2 y - \ln x \cdot \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\ln^2 y - \ln x \cdot \ln y - 2 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$\lg \ln y (\ln y - \ln x) - 2 \ln x (\ln y - \ln x) = \ln x \cdot \ln x = 0$$

$$(\ln y) \neq (\ln y - \ln x) (\ln y - 2 \ln x) = 0$$

$$y = x$$

$$y = x^2$$

$$1) y = x$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \quad -2x^2 + 4x = 0 \quad 2x^2 - 4x = 0 \quad 2x(x-2) = 0$$

$$2) x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0 \quad x = 2$$

$$x > 0 \quad y > 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \quad | \quad x - 2 \\ \underline{x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 6x + 8 \\ \underline{x^2 - 2x} \\ -4x + 8 \end{array}$$

$$x(x^2 + x - 4) = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2} = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = x^3+x^2-4x-2x^2-2x+8$$

$$y = \frac{(\sqrt{17}-1)}{2} \cdot \frac{x^3-x^2-6x+8}{x^2+x-4} = \frac{8-\sqrt{17}}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x = 2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\sin 5x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$2 \sin 7x \cdot \cos 2x - 2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x \quad \sin 7x = \frac{\sqrt{2} \cos 2x + \sin 2x}{2}$$

$$\begin{aligned} \tan 2x &= 1 \quad 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2} \end{aligned}$$

ОДЗ:

$$x > 0$$

$$x \neq 1$$

$$\frac{y}{x} > 0$$

$$x > 0$$

$$\cos \frac{9\pi}{8} - \cos \frac{5\pi}{8} + \sin \frac{9\pi}{8} + \sin \frac{5\pi}{8} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\begin{array}{|l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \quad \begin{array}{|l} x > 2 \\ y = 2 \end{array}$$

$$x = 2 \quad y = 4$$