

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓ 2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
- ✓ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓ 4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- ✓ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $9261 = 3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2$. Если цифра кроме 3 и 7, не 1, то их произведение не равно 9261.
т.к. произведение цифр искомого числа $9261 = 3^3 \cdot 7^3$, то числа должны состоять из трех 3, трех 7 и двух 1. Число перестановок 8 цифр — $8!$, но т.к. в перестановке учитываются три 3, три 7 и две 1, то количество чисел меньше найти, разделив исходное число перестановок, на 3 перестановки 3 и 7 и 2 перестановки 1. $\frac{8!}{3!3!2!} = 560$

Ответ: 560

$$\begin{aligned} N2 \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x &= 0 \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \\ 2 (\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x \right) &= 0 \\ 2 (\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x - \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \right) &= 0 \\ 2 (\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right) &= 0 \\ 2 (\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin \left(\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cdot \cos \left(\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \right) \cdot 2 &= 0 \\ 4 (\cos 2x - \sin 2x) \cdot \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cdot \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 \\ \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 \\ \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \text{т.к. } \cos 2x = \sin 2x \text{ т.к. } \cos^2 2x + \sin^2 2x = 1; \\ 2 \cos^2 2x = 1; \text{ преобразование} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{9} + \frac{\pi n}{2}, \\ x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{4}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, \end{cases} \quad \text{Ответ: } \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{20} + \frac{\pi n}{5}; \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}; n \in \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{5} \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(1) а) $x+y+5 \geq 0$; $y \geq x-5$; $x+y+5+y-x+5=10$; $y=0$

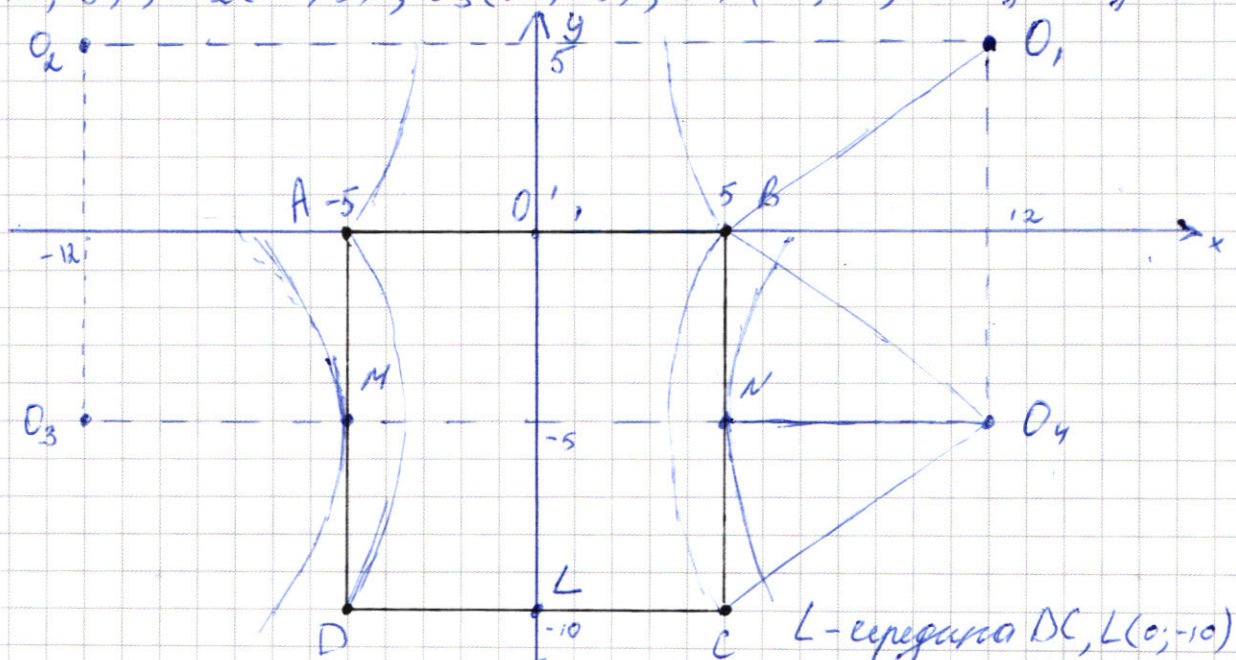
б) $y \geq -x-5$; $y \leq x-5$; $x+y+5-y+x-5=10$; $x=5$

в) $y \leq -x-5$; $y \geq x-5$; $-x-y-5+y-x+5=10$; $x=-5$

г) $y \leq -x-5$; $y \leq x-5$; $-x-y-5-y+x-5=10$; $y=-10$

Данное уравнение на плоскости Oxy задает квадрат, центр которого находится в т. $O'(-5; -5)$, вершины $A(-5; 0)$, $B(5; 0)$, $C(5; -10)$, $D(-5; -10)$

(2) Уравнение задает множество точек, расположенных в I, II, III, IV четвертях, равноудаленных от т. $O_1(12; 5)$, $O_2(-12; 5)$, $O_3(-12; -5)$, $O_4(12; -5)$ при $a < 0$ они существуют

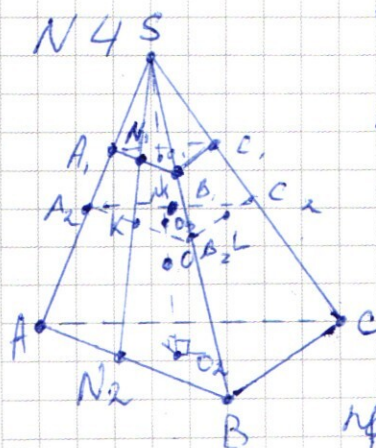


За т. O обозначу начало координат, $M(-5; -5)$ - середина AD , $N(5; -5)$ - середина BC . И окружности, и квадрат симметричны относительно Oy . Значит пересечение окр-тей O_1 и O_4 со сторонами квадрата в I и IV четвертях будет равно в 2 раза меньше чем пересечение всего.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Значит рассмотрим I и IV четверти. $O_4 N = 7$; $O_4 C = O_4 B =$
 $= O_4 V = \sqrt{(12-5)^2 + (12-7)^2} = \sqrt{74}$ (по формуле нахождения расстояния
 между точками) $O_4 L = O_4 O = O_4 O = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$ (по формуле
 нахождения расстояния между точками) Радиус данной
 окр.-ти $\sqrt{a}$. При $\sqrt{a} \in [0; 7)$ ни одна окр.-ть не касается
 $ABCD$. При $\sqrt{a} \in \{7\}$, $a = 49$ окр.-ть O_4 касается BC , $\sqrt{a} \in (7; 74]$
 O_4 пересекает BC дважды, $\sqrt{a} \in [\sqrt{74}; 13]$ O_4 пересекает
 квадрат дважды, а O_4 — единичный. Тогда всего
 касаний: При $\sqrt{a} \in [0; 7)$ — 0; $\sqrt{a} \in \{7\}$ — 2; $\sqrt{a} \in (7; 13)$ —
 4 решения, $\sqrt{a} \in \{13\}$ 2 решения (т.к. O_4 и O_2 пересекаются в
 O , O_4 и O_3 пересекаются в L); $\sqrt{a} > 13$ пересечений нет.
 Следовательно условия задачи удовлетворяют $\sqrt{a} \in \{7; 13\}$
 $a \in \{49; 169\}$

Ответ: 49; 169



Пусть первая площадь 16 — треугольник
 ABC , а вторая площадь 1 — треугольник
 $A_1 B_1 C_1$, O — центр сферы, O_1, O_2 — точки
 пересечения SO и плоскостей $A_1 B_1 C_1$ и ABC соот-
 ветственно. Т.к. у плоскостей $A_1 B_1 C_1$ и ABC общий
 перпендикуляр SO , то они параллельны, а

$\triangle ABC \sim \triangle A_1 B_1 C_1$. Т.к. $\frac{S_{ABC}}{S_{A_1 B_1 C_1}} = k^2$, k — коэф. подобия, $k = 4$.

Пусть SK пересекает AB в N_1 , а $A_1 B_1$ в N_2 , тогда $\frac{O_1 N_1}{O_2 N_2} = \frac{1}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1): $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$ Рассмотрим как уравнение от y .

$$D_y = (4-x)^2 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$\begin{cases} y = \frac{4+x+3x-4}{2} \\ y = \frac{4+x-3x+4}{2} \end{cases} \begin{cases} y = 2x \\ y = 4-x \end{cases}$$

(2) рассмотрим $y = 2x$

$$(16x^6)^{-\ln x} = 2x^{\ln \frac{2x}{x^2}}; \quad 16^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^6}} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$16^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^6}} = 2^{\ln 2} \cdot 2^{\ln \frac{1}{x^6}} \cdot x^{\ln 2} \cdot x^{\ln \frac{1}{x^6}} \quad | : x^{\ln \frac{1}{x^6}} \text{ согласно ОДЗ}$$

$$16^{\ln \frac{1}{x}} = 64^{\ln \frac{1}{x}} \cdot 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$$

$$4^{\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$$

$$\ln 4 \cdot \ln x = \ln 2x \cdot \ln 2$$

$$2 \ln x = \ln 2x$$

$$x^2 = 2x \quad | : x \neq 0$$

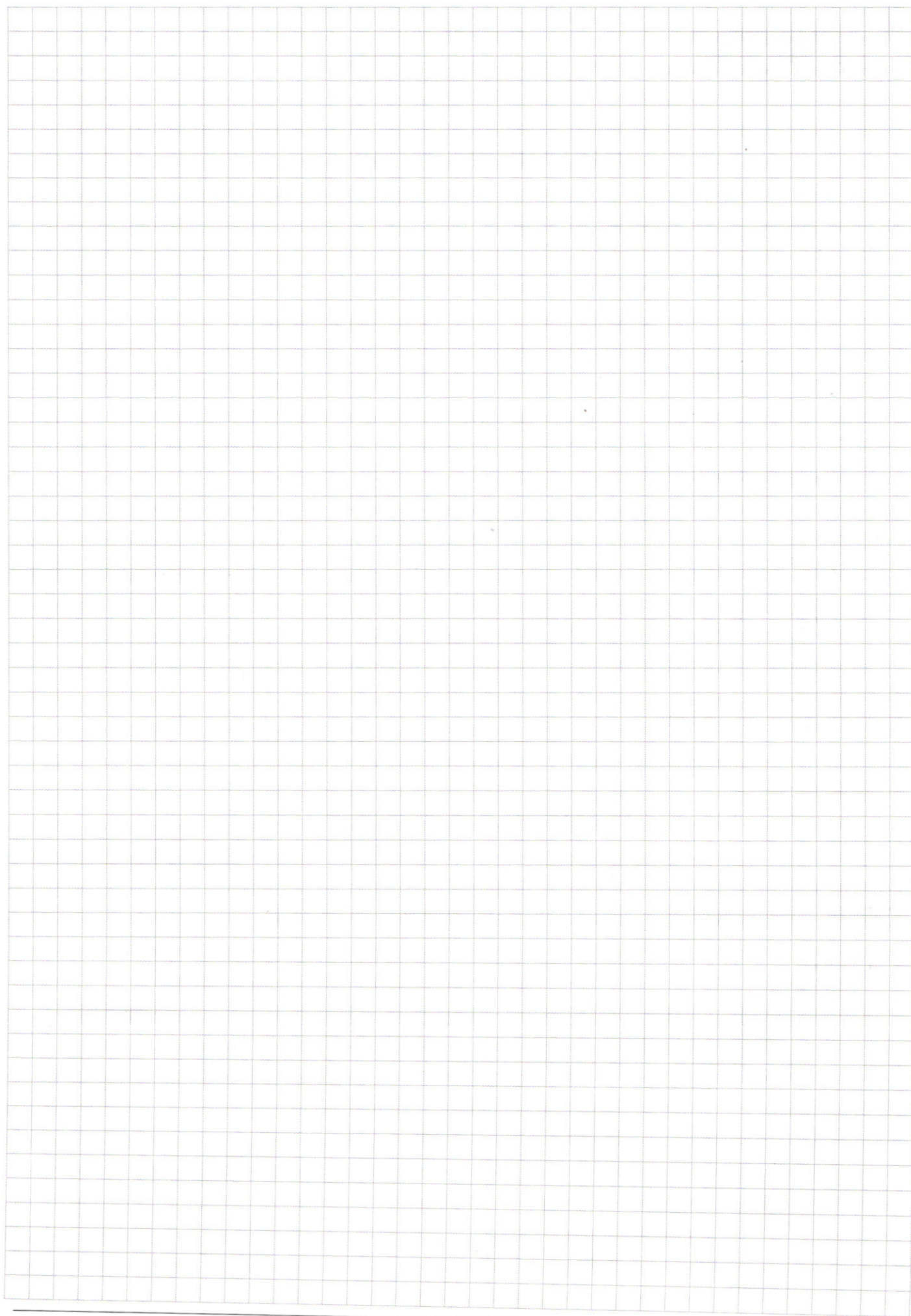
$$x = 2, \quad y = 2. \quad (2; 2) - \text{первое решение.}$$

ОДЗ. данной системы $x > 0; \quad \frac{y}{x^2} > 0;$

$$x > 0; \quad y > 0.$$

б) $y = 4 - x$; $x = 4 - y$ ~~$y + x = 4$~~ , значит ~~$y < 2, x < 2$~~ .

~~$x^2(4-x)^2$~~ Ответ: $(2; 2)$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 1) \quad 9261 \overline{) 3087} \\ \underline{9} \\ 20 \\ \underline{18} \\ 20 \\ \underline{21} \end{array} \quad \begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{3} \\ 0 \\ \underline{0} \\ 0 \\ \underline{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \overline{) 7} \\ \underline{21} \\ 13 \\ \underline{14} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 28 \overline{) 224} \\ \underline{168} \\ 56 \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

$$C_8 = \frac{7 \cdot 8}{2} = 28 \cdot 9 \cdot 9 = 2268$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0. \quad t = \alpha + \beta \quad \alpha = \frac{t+y}{2} \\ y &= \alpha - \beta \quad \beta = \frac{t-y}{2} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \cos t - \cos y &= -2 \sin \frac{t+y}{2} \sin \frac{t-y}{2} \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha \\ \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \sin \beta \cos \alpha \\ \sin t + \sin y &= 2 \sin \frac{t+y}{2} \cos \frac{t-y}{2} \\ \sin t - \sin y &= 2 \sin \frac{t-y}{2} \cos \frac{t+y}{2} \\ \cos 9x - \cos 5x &= -2 \sin 7x \cdot \sin 2x \\ \sin 9x + \sin 5x &= 2 \sin 7x \cos 2x \\ -2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin^2 2x) &= 0. \\ 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin^2 2x) &= 0. \\ (\cos 2x - \sin^2 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) &= 0. \\ 2 (\cos 2x - \sin^2 2x) (\sin 7x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x) &= 0 \\ \cos 2x = \sin^2 2x & \quad \sin 7x - (\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2x) = 0. \\ \tan 2x = 1 & \quad \sin 7x - (\sin(2x + \frac{\pi}{4})) = 0. \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} & \quad 2 \sin \frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \cos \frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0. \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} & \quad \sin(\frac{5x - \pi}{4}) = 0. \\ \frac{5x - \pi}{4} = \pi n, n \in \mathbb{Z} & \quad \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} & \quad \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z} & \quad \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} & \quad \frac{5x}{4} = \frac{\pi}{4} + \pi n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N3. \quad \begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases} \\ x^{2-\ln x} \cdot y^{4-\ln y} = x^{\ln \frac{1}{x^2}} = e^{\ln x \cdot \ln \frac{1}{x^2}} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \quad y^2 - (4+x)y - 2x^2 + 8x = 0. \quad (3x-4)^2 \\ D_y = (4+x)^2 - 32x + 8x^2 = 16 + 8x + x^2 - 32x + 8x^2 = 9x^2 - 24x + 16. \\ y = \frac{4+x \pm (3x-4)}{2} = \\ \text{т. } y_1 = \frac{4x}{2} = 2x; \quad y_2 = \frac{-2x+8}{2} = -x+4. \end{aligned}$$

$$y = 2x$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2x}{x^2}} \quad \ln \frac{2}{x^6} = \ln 2 + \ln \frac{1}{x^6} \quad 2 \ln \frac{1}{x^6} = 2 \ln x^{-6} = -12 \ln x$$

$$16^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$16^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}} = 2^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln \frac{2}{x^6}} \cdot x^{\ln 2}$$

$$16^{\ln \frac{1}{x}} = 64^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln 2}$$

$$8^{\ln \frac{1}{x}} = 64 \cdot x^{\ln 2}$$

$$8^{\ln \frac{1}{x}} = x^{\ln 2}$$

$$1 = 4^{\ln \frac{1}{x}} \cdot x^{\ln 2} \quad | : 4^{\ln \frac{1}{x}}$$

$$4^{-\ln \frac{1}{x}} = x^{\ln 2}$$

$$4^{\ln x} = x^{\ln 2}$$

$$\ln 4^x \cdot \ln x = \ln x \cdot \ln 2$$

$$\ln 4^x \cdot \ln x = \ln x \cdot \ln 2$$

$$y = -x + 4$$

$$(x^2(-x+4)^4)^{-\ln x} = (-x+4)^{\ln \frac{-x+4}{x^2}}$$

$$x = 4 - y$$

$$(4-y)^2 y^4)^{\ln \frac{1}{4-y}} = y^{\ln \frac{4}{(4-y)^2}}$$

$$y = -x + 4 \quad \ln t \cdot \ln \frac{1}{4-y} = \ln y \cdot \ln \frac{4}{4-y^2}$$

$$\log_y t \cdot \ln \frac{1}{4-y} = \ln y - \ln \frac{1}{(4-y)^2}$$

$$\log_y((4-y)^2 y^4) = \log_y y^4 + \log_y (4-y)^2$$

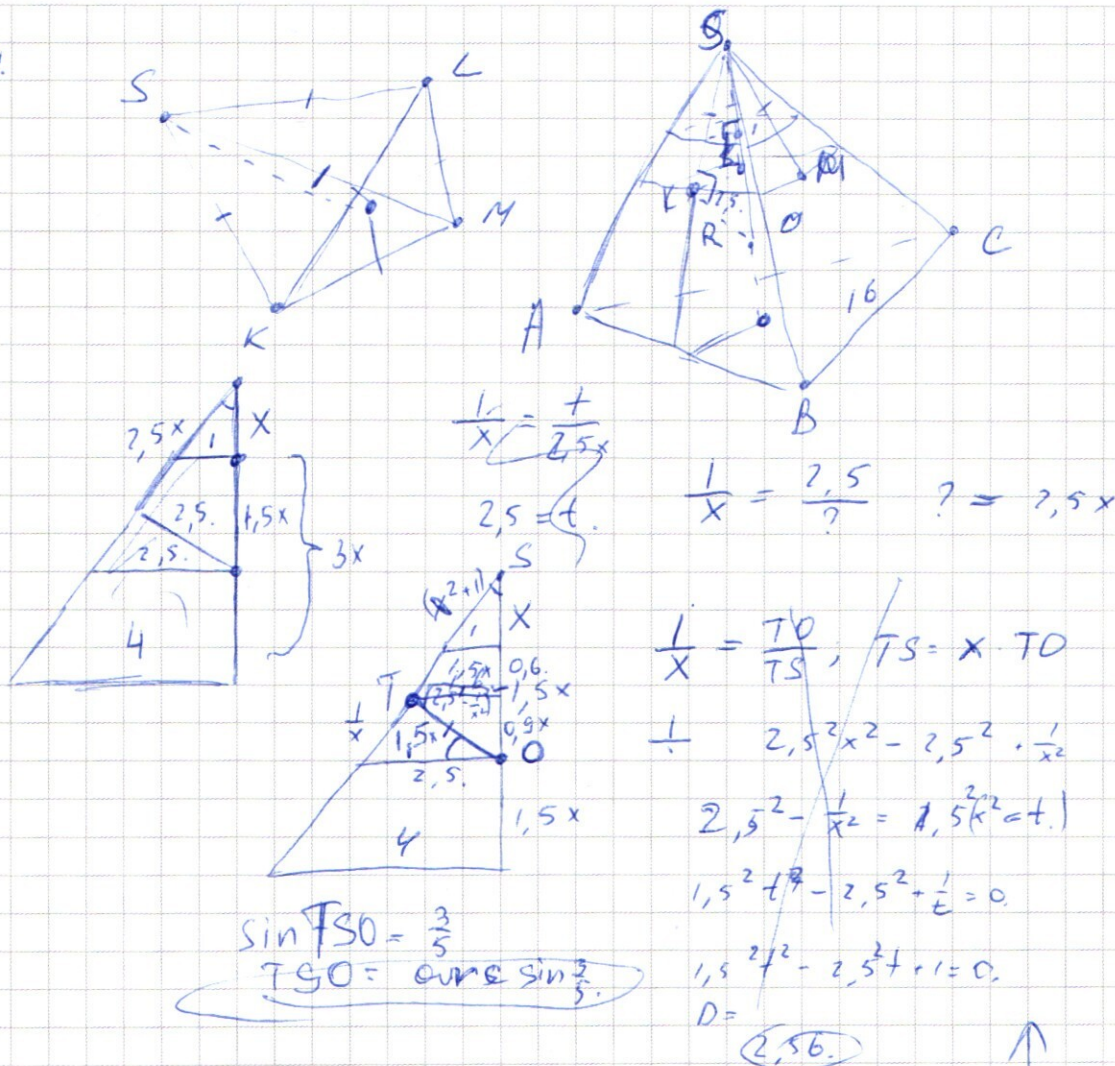
$$(4 + 2 \log_y x) \ln \frac{1}{4-y} = \ln y - 7 \ln \frac{1}{4-y}$$

$$\ln \frac{1}{4-y} (11 + 2 \log_y x) = \ln y$$

$$\left(\frac{1}{4-y}\right)^{11+2 \log_y x} = y$$

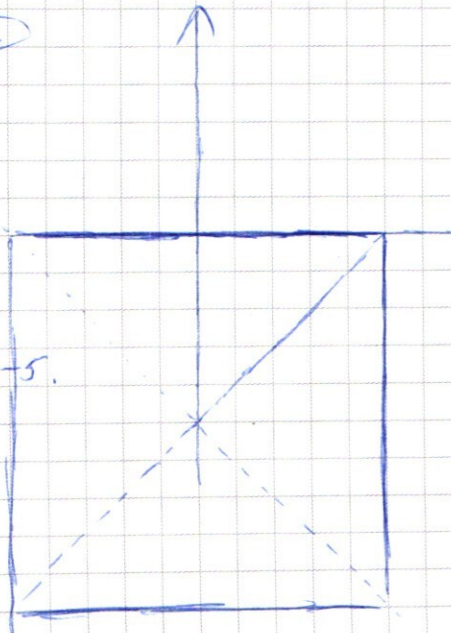
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



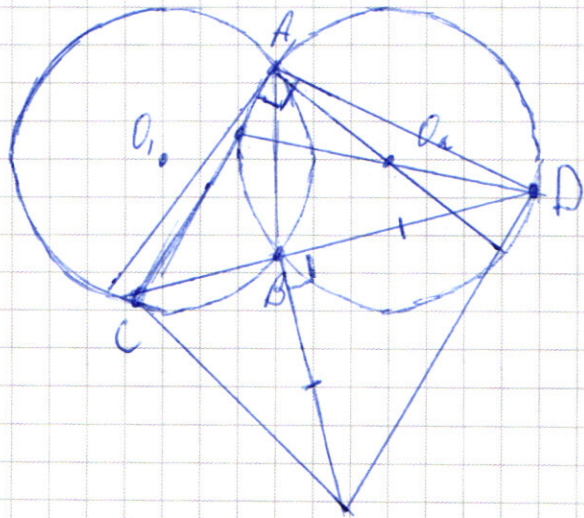
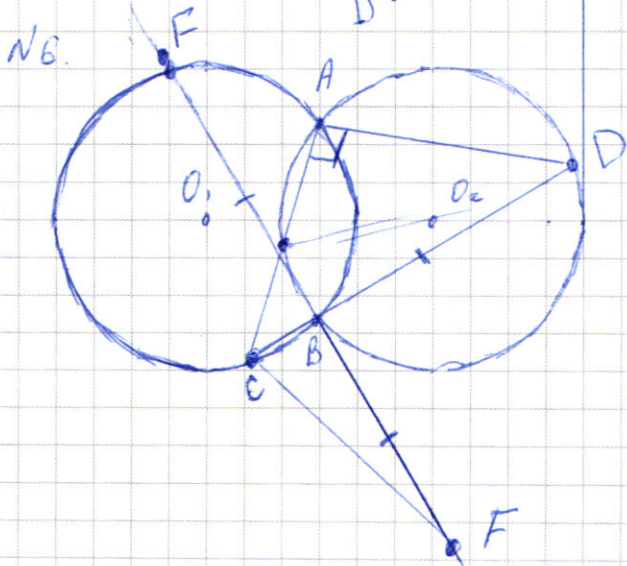
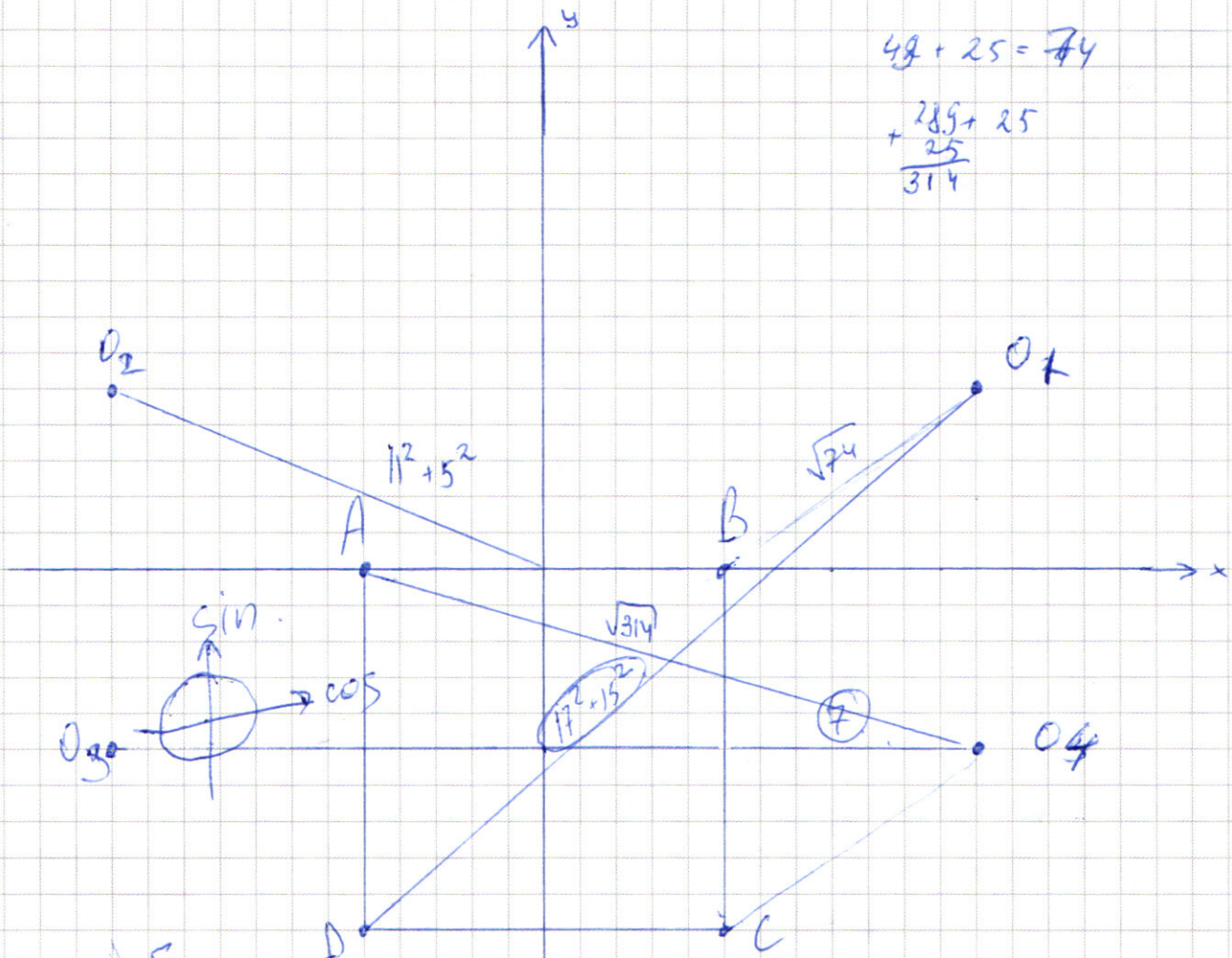
$N5. \begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (x-1)^2 + (y-5)^2 = a \end{cases}$

$(1) \quad x+y+5 \geq 0; \quad y-x+5 \geq 0; \quad y \geq -x-5; \quad y \geq x-5.$
 $x+y+5 + y-x+5 = 10.$
 $y = 0.$
 $x+y+5 \geq 0; \quad y-x+5 \leq 0; \quad y \geq -x-5; \quad y \leq x-5.$
 $x+y+5 - y + x-5 = 10$
 $2x = 10$
 $x = 5$



$$49 + 25 = 74$$

$$\begin{array}{r} 28.9 + 25 \\ \hline 31.4 \end{array}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$y \geq$$

$$\begin{array}{r} 76/4 \\ 19 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 35 \\ 16 \\ \hline 210 \\ 35 \\ \hline 560 \end{array}$$

$$1) y = 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$(2^x)' = \ln 2 \cdot \frac{1}{x}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$76 = 4 \cdot 19$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} = 76 + (2^{33} - 2)x$$

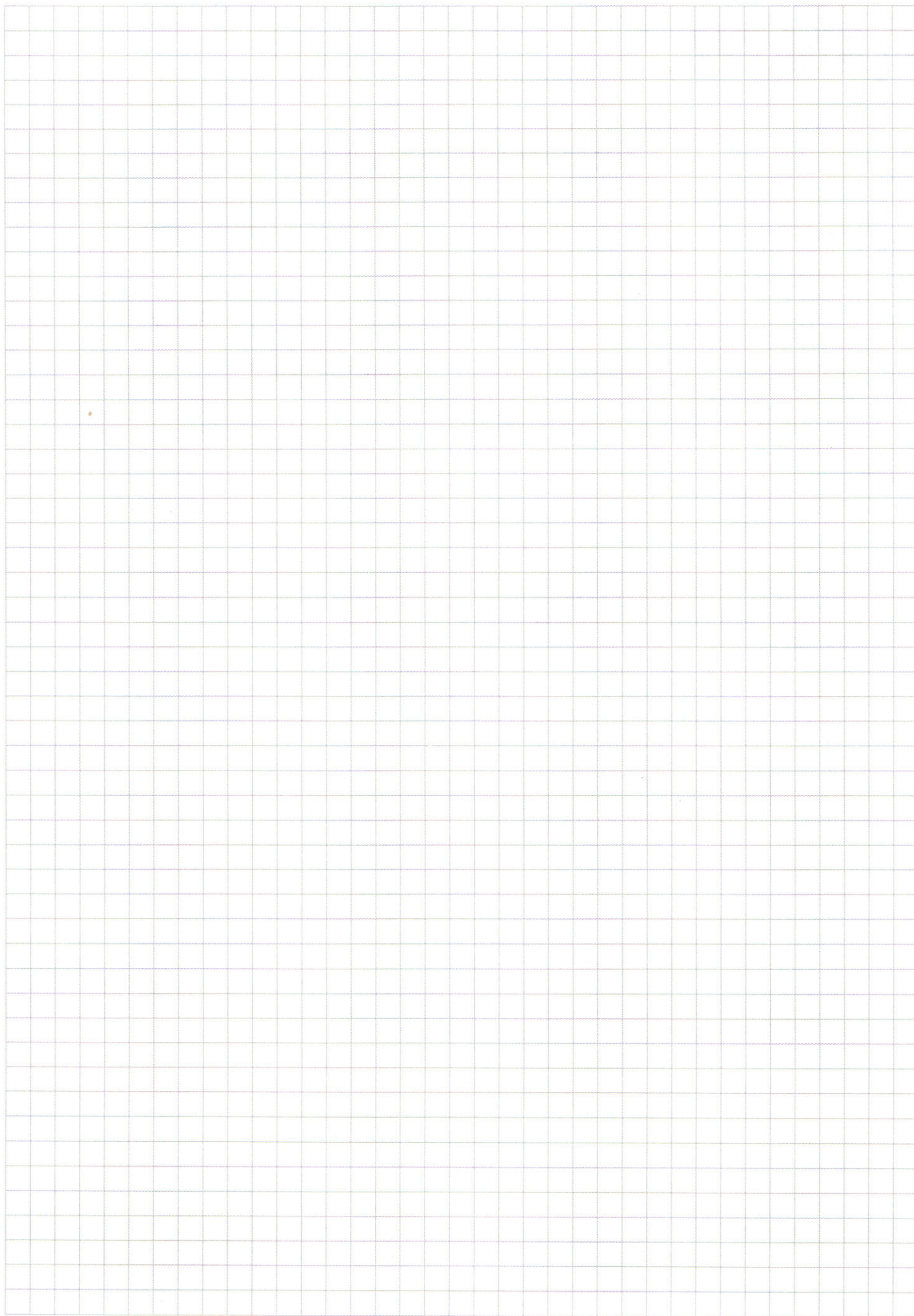
$$\times 16$$

N1.

emb: 560

$$\frac{8!}{3!3!2} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7} = 16 \cdot 35$$

$$\begin{array}{r} +25 \\ 49 \\ \hline 74 \end{array}$$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)