

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в папку
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad (*)$$

$$\Leftrightarrow -2 \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cos^2 2x + \sqrt{2} \sin^2 2x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & (1) \\ \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1): \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z};$$

$$(2): \sqrt{2} \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \sin 7x = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2x \\ 7x = \pi - \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{20} \\ x = \frac{\pi}{12} \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}; x = \frac{\pi}{12}; x = \frac{\pi}{20};$$

№ 1

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$; Известно, что 9261 - произведение

~~чисел~~ ~~в~~ ~~увер~~ ~~большинства~~ ~~числа~~. Тогда
такие ~~большинства~~ ~~числа~~ содержат:

а) 3 тройки, 3 семерки, 2 единицы

б) 1 девятку, 1 тройку, 3 семерки, 3 единицы

а) 333 777 11 - используемые ~~числа~~ цифры
Всего из них можно составить $3^3 \cdot 7^3 \cdot 1^2$
 $10 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 = 10 \cdot 18 \cdot 20 = 180 \cdot 20 = 3600$ чисел

8) 93777111 - использованы цифры
Всего из них можно составить $16 \cdot 9 = 144$

Qmlen: 3744 zucha

Тема:

 $\omega_1(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$
$$\omega_1 \cap \omega_2 = \{A, B\}$$
$$C \in \mathfrak{D}_1, D \in \mathfrak{D}_2$$
$$\cancel{C \in W} \quad B \in CW$$
$$\angle CAD = 90^\circ$$
$$BF \perp CW$$
$$BF = BN$$

a) CF?

8) $BC = 12$

$S_{\Delta ACF}?$

a) Проверим $FD \cap \omega_2 = M$, $FB \cap \omega_2 = L$

Длина АВ первой окружности равна длине

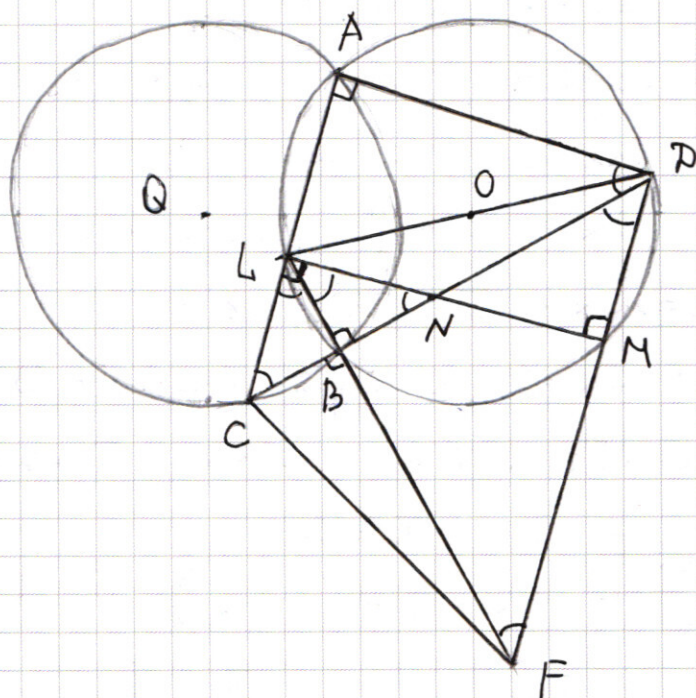
AB второй окружности, т.к. у них оди-

накрестные углы $\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB \Rightarrow \triangle ACB \sim$

прямоугольный и равнобедренный $\Rightarrow \angle ACB = \angle ABC = 45^\circ$

$$BF \perp CD \Rightarrow BL \perp CD \quad \text{t.k} \quad L \in BF \Rightarrow \angle LBD = 90^\circ \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ $\angle D$ - угон ($\angle D$ BL опирается на гип $\angle D = 180^\circ$) $\Rightarrow$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \angle LAD = 90^\circ$ (опирается на дугу $LD = 180^\circ$)

$\angle LAB = \angle CAD = 90^\circ \Rightarrow L \in CA \Rightarrow CA \cap \omega = L$;

$\triangle CLB$: $\angle LBC = 90^\circ$, $\angle LCB = \angle ACD = 45^\circ \Rightarrow \angle CLB = 45^\circ$

$\triangle CLB$ - равнобедренный и прямоугольный, $CB = BL$

$\triangle CBF$: по теореме Пифагора ($\angle CBF = 90^\circ$):

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = BL^2 + BF^2 = BL^2 + BD^2 \quad (BF = FD \text{ по укл})$$

~~$$CF^2 = BL^2 + BD^2 = LD^2$$~~

$\triangle LBD$: $\angle LBD = 90^\circ$, по теореме Пифагора:

$$LD^2 = LB^2 + BD^2 = (2R)^2$$

$$CF^2 = LB^2 + BD^2 = LD^2 = (2R)^2$$

$$CF = 2R = 2O$$

8) $\triangle BFC$: по теореме Пифагора $BF = \sqrt{CF^2 - CB^2} = 16$

$$BF = BD = 16$$

$\triangle CLB$: $CB = BL = 12$, $CL = 12\sqrt{2}$

$\angle LMD = 90^\circ$ т.к. опирается на дугу $LD = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle LAB = \angle LMD = 90^\circ \Rightarrow LA \parallel MD$,

~~LD - диаметр окружности~~

$\triangle BFD$: $\angle FBD = 90^\circ$, $BF = FD \Rightarrow \angle BDF = \angle BFD = 45^\circ$

$\angle LAB = \angle LMD = \angle ADM = 90^\circ$ ($\angle ADM = \angle ADC + \angle BDF$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow LAMD$ - прямоугольник, $\angle ALM = 90^\circ$, $LD = AM$

($O \in AM$)

Поскольку $LM \parallel BD = N$

$$\triangle NMD: \angle NMD = 90^\circ, \angle NDM = 45^\circ \Rightarrow \angle DNM = 45^\circ$$

$$\triangle LBN: \angle LBN = 90^\circ, \angle BLN = \angle CLN - \angle CLB = 45^\circ \Rightarrow \angle LNB = 45^\circ$$

$$\triangle NMD \sim \triangle NBL \text{ по двум углам} \Rightarrow \frac{BN}{LN} = \frac{NM}{ND}$$

$$\triangle LBN = \triangle LBC \quad (\text{они равны по 3 углам, } LB - \text{общая сторона})$$

$$\text{Значит } CB = BL = BN = 12$$

$$\triangle BLN: LN = \sqrt{BN^2 + BL^2} = 12\sqrt{2}$$

$$BN + ND = BD \Rightarrow ND = BD - BN = 16 - 12 = 4$$

$$\frac{BN}{LN} = \frac{NM}{ND} \Leftrightarrow \frac{12}{12\sqrt{2}} = \frac{NM}{4} \Rightarrow NM = 2\sqrt{2}$$

$$\triangle MND: MD = NM = 2\sqrt{2}$$

$$AL = MD = 12\sqrt{2} \quad (\text{стороны прямоугольника})$$

$$CA = CL + LA = 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$ALMD - \text{прямоугольник} \Rightarrow AL \parallel DM \Rightarrow AC \parallel DF \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Высота, опущенная из F на AC равна высоте, опущенной из M на AC, т.е. LM

$$LM = LN + NM = 12\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 14\sqrt{2}$$

$$S_{AFC} = \frac{1}{2} LM \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 14\sqrt{2} = 14^2 = 196$$

Ответ: а) 20 ; б) 196

55

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a & (2) \end{cases}$$

(2) - ур-е окружности с центром в точке $(12; 5)$ и радиусом a .

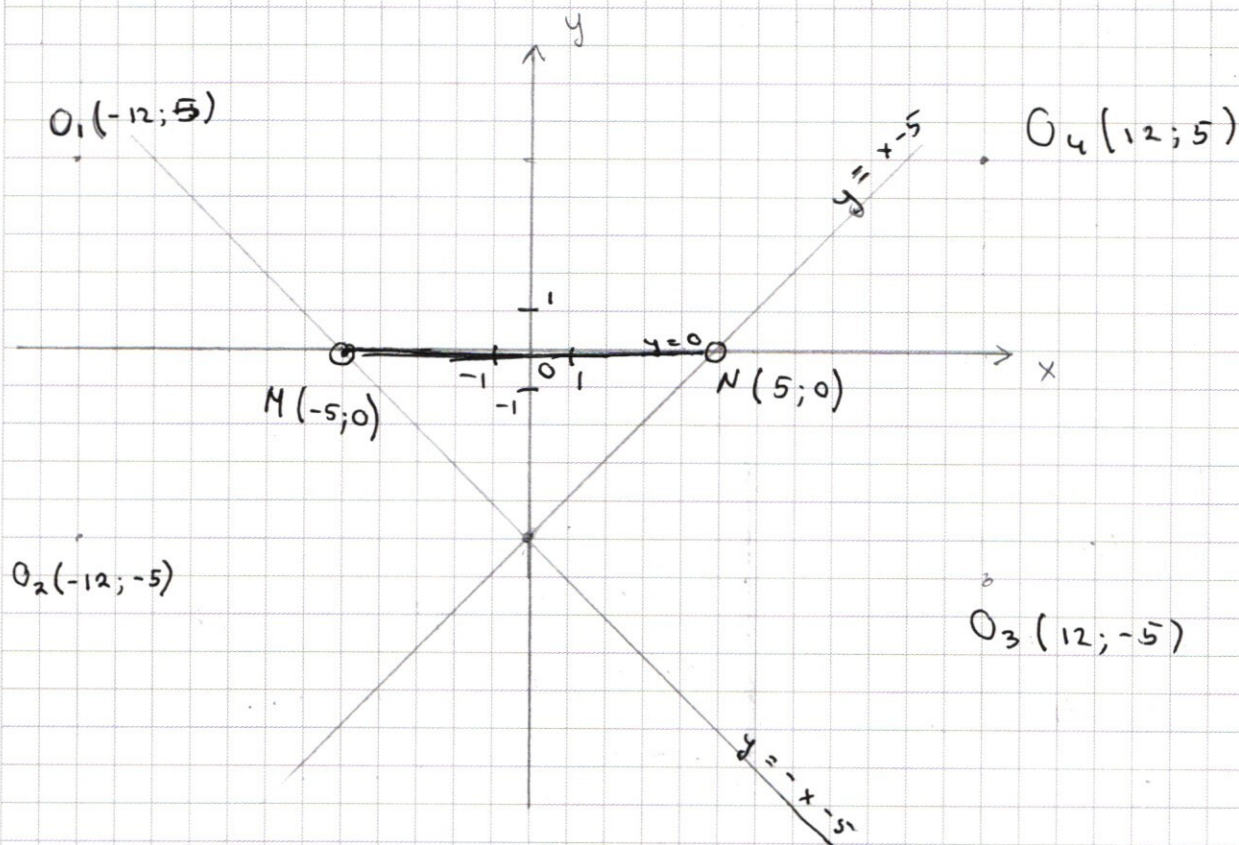
На координатной плоскости мы получаем 4 точки: $(12; 5), (-12; -5), (-12; 5), (12; -5)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Знаем, что есть 4 окружности с центрами в данных точках конкретных точек и переменным радиусом a .

$$(1) : |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 \quad \Leftrightarrow$$

$$a) \begin{cases} x + y + 5 > 0 \\ y - x + 5 > 0 \\ x + y + 5 + y - x + 5 = 10 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -x - 5 \\ y > x - 5 \\ y = 0 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$



Пусть $M(-5; 0)$, $N(5; 0)$

Заметим, что O_1 и O_2 симм. O_3 и O_4 симм. отн. Ox ,
 O_1 и O_4 , O_2 и O_3 симм. отн. Oy .

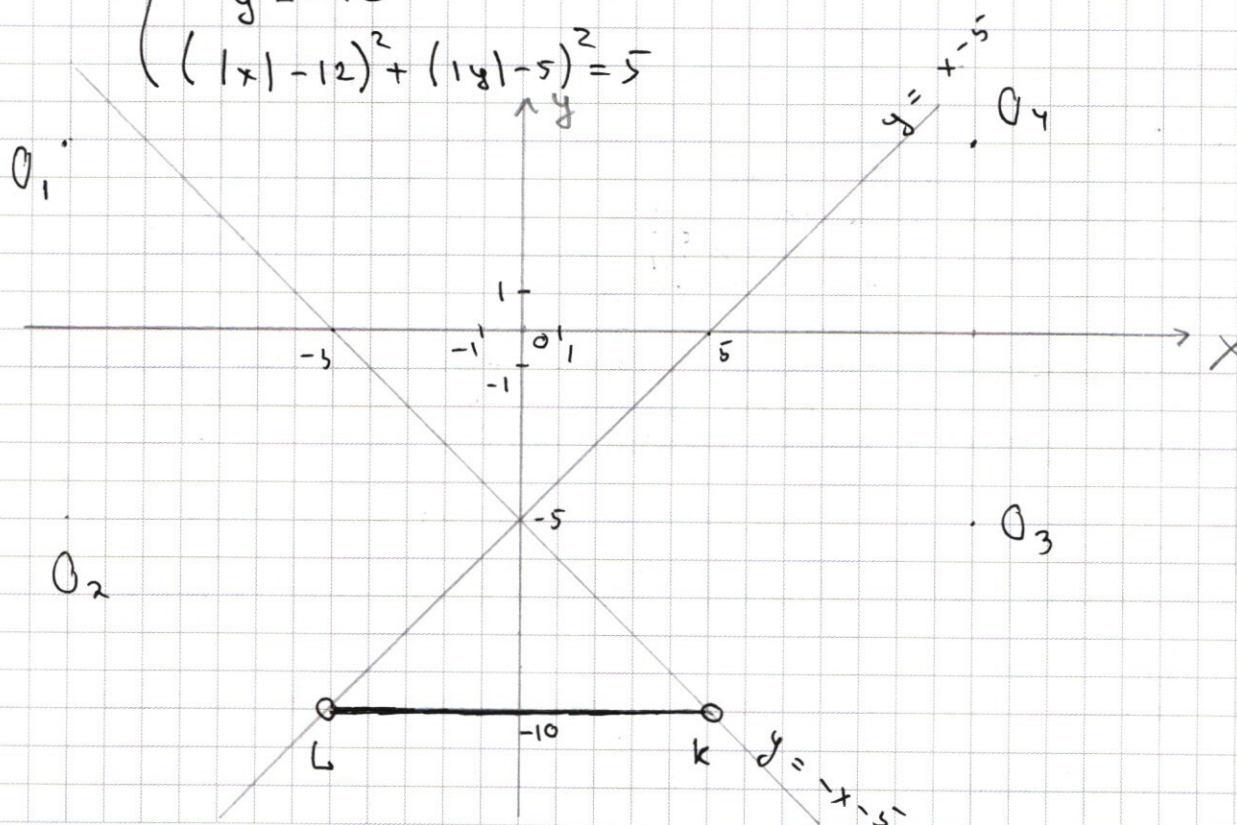
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.е. $\begin{cases} a > p(0_3; NF) \\ a \leq p(0_4; N) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 7 \\ a \leq \sqrt{73} \end{cases}$

б) $\begin{cases} y < -x - 5 \\ y > x - 5 \\ x = -5 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$

Аналогично пункту б) в силу симметрии 2 решения будут при $7 < a \leq \sqrt{73}$

2) $\begin{cases} y < -x - 5 \\ y < x - 5 \\ y = -10 \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 5 \end{cases}$ $L(-5; -10); K(5; 10)$



2 решения система имеет, когда $\omega_2 \cap KL$ и $\omega_3 \cap KL$, но $\omega_2 \neq \omega_3$.

т.е. при
$$\begin{cases} a > OL \\ a < p(O_2; O_4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < \sqrt{73} \\ a < 12 \end{cases}$$

Объединим решения а-2:

$$\begin{cases} \sqrt{73} < a < 13 \\ 7 < a \leq \sqrt{73} \\ 7 < a \leq \sqrt{73} \\ \sqrt{73} < a < 12 \end{cases} \Leftrightarrow 7 < a < 13$$

Ответ: $a \in (7; 13)$

У4

Дано:

O - центр сферы ω

$\omega \cap l_1 = K$

$\omega \cap l_2 = L$

$\omega \cap l_3 = M$

l_1, l_2, l_3 - прямые, пересекающиеся в

точке S , образующие трехгранный угол

$S_1 = 1, S_2 = 16$

$\angle KSO$? Сечение $KLМ$.

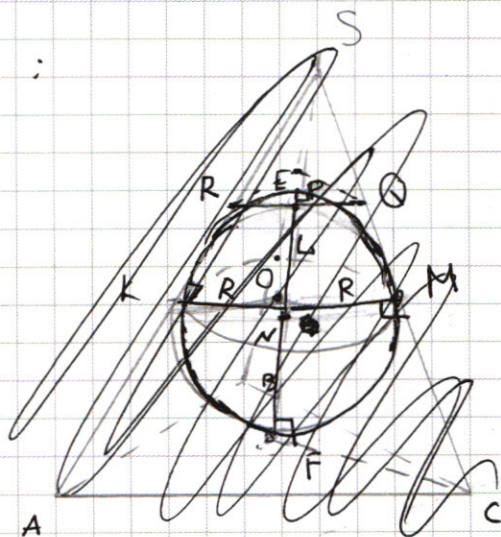
Решение:

$l_1 = AS$

$l_2 = SB$

$l_3 = SC$

рисунок см. на странице 9



Пусть сфера ~~касается~~ касается боковых ребер и основания тетраэдра $ABCS$

$\angle SKO = \angle ~~EOX~~ OFC = \angle SMO = 90^\circ$

Тогда $S_1 = S_{ERQ}, S_2 = S_{ABC}$

$\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{16} \Rightarrow K = 4$ - коэф. подобия $\triangle ABC$ и SQR
($AC \parallel RQ, QE \parallel BC, RE \parallel BA$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $SP = p(S; REQ)$, тогда

$$\frac{SP}{SF} = \frac{1}{k} = \frac{1}{4} \Rightarrow PF = 2R = \frac{3}{4} SF = 3SP$$

$$R = \text{радиус сферы} = \frac{3}{8} SF = \frac{3}{2} SP$$

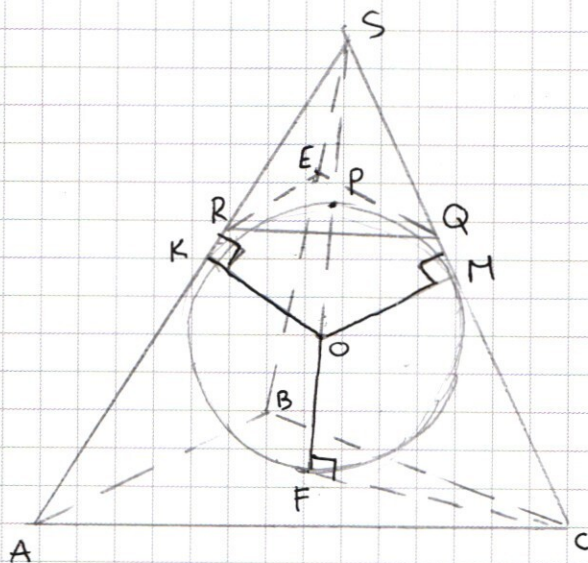
$$\triangle KSO: \angle SKO = 90^\circ, \sin \angle KSO = \frac{KO}{SO}$$

$$KO = R \quad (\text{сфера} \cap SA = K); \quad SO = SP + R$$

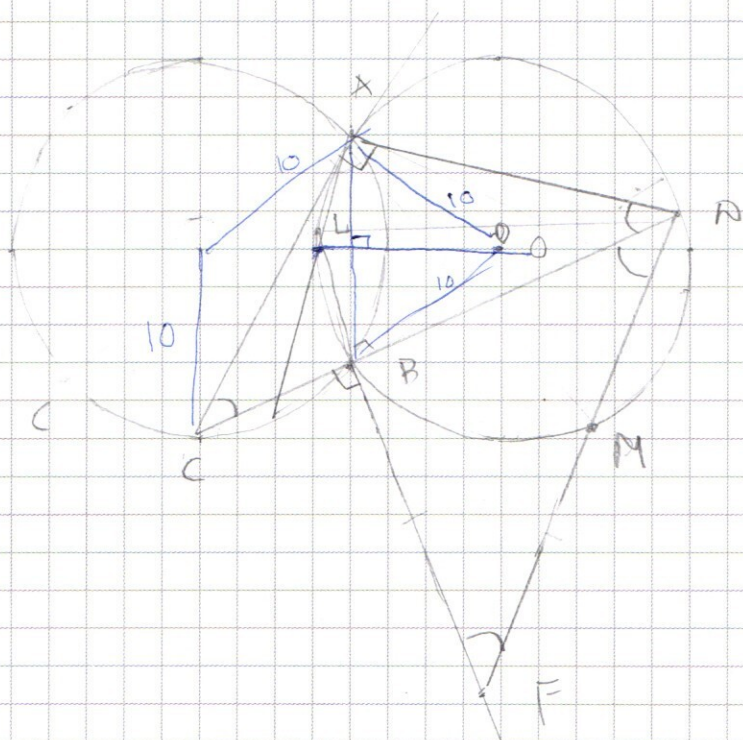
$$SO = \frac{2}{3} R + R = \frac{5}{3} R$$

$$\sin \angle KSO = \frac{R \cdot 3}{5 \cdot R} = \frac{3}{5} \Rightarrow \angle KSO = \arcsin \frac{3}{5}$$

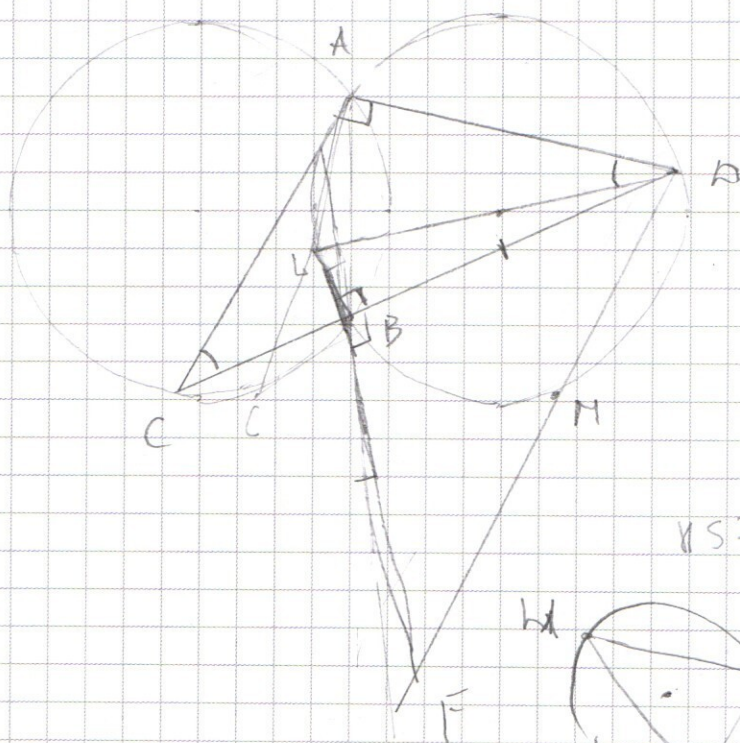
$$\text{Ответ: } \angle KSO = \arcsin 0,6$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



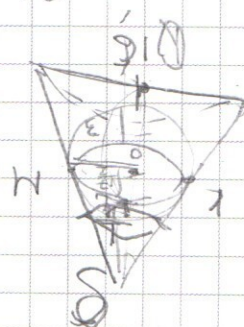
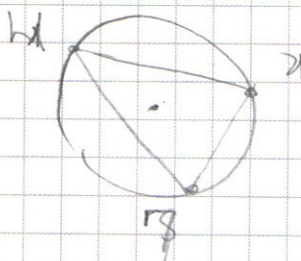
$$CA = CB \cdot CD$$



$$EM \cdot EN = EB \cdot EL$$

$$\frac{h}{1} = \frac{0.5}{1.5}$$

$$R = \frac{2}{3} \cdot 5.8$$



$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$7x = \frac{1}{4} + 2x$$

$$\hookrightarrow 7x = \frac{11}{4} - 2x$$

$$\sigma_{S_x} = \frac{\hbar}{4} + 2\hbar n \dots$$

$$g_x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$1 - 2x = \frac{1}{4} + 2x$$

$$\frac{7\pi}{20} = \frac{5\pi}{20} + \frac{2\pi}{20}$$

$$L \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12}$$

$$01 - 12$$

$$-28 = 20$$

$$01 = 01 - R_{xy}$$

$$D1 = 5 - x \quad R - 5 - R - x$$

$$5 - x > 9$$

$$S - x \rightarrow h$$

$$-5 = x$$

$$01 = \cancel{5/4}x - \cancel{8/4} + \cancel{5/4} - \cancel{8/4} - x -$$

$$s - x < p_h$$

$$S - x \rightarrow R$$

$$5 = x$$

$$01 = \cancel{g} \cdot x + h \cdot \cancel{g} + h \cdot x$$

$$c-x > b$$

c-x-5

$$0 = 8$$

$$g \Rightarrow x < 8$$

5 - x - 2h

$$x < 5 + 2$$

$$x - < 9 + 8$$

$$Q_2 < S + x + p$$

$$a = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$01 = |5+x-8| + |5+8+x|$$

$$(2^4 + 1)2^2 + 2 \times (2^3 - 1) = 2^6 + 2^2 = 2^2 \times 2^4 + 2^2 \times 2^0 = 2^2 \times (2^4 + 2^0) = 2^2 \times (2^4 + 1)$$

$$g < 19 \cdot 2^2 + 2x(2-1)$$

$$| \quad 2^x + 2^{35} + 2^{34} \quad |$$

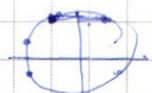
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 26 \\ \underline{24} \\ 21 \\ \underline{21} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3087 \overline{) 3} \\ \underline{30} \\ 08 \\ \underline{06} \\ 27 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{10} \\ 29 \\ \underline{27} \\ 29 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \overline{) 3} \\ \underline{34} \\ 3 \end{array}$$

$$3 \cdot 7^3 = 21^3$$

и 2.

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$



$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 27} \\ \underline{240} \\ 686 \\ \underline{686} \\ 0 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(4x+5x) - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin(5x+4x) + \sin 5x = 0$$

$$\cos 4x \cdot \cos 5x - \sin 4x \cdot \sin 5x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cdot \cos 4x + \cos 5x \cdot \sin 4x = 0$$

$$\cos 5x (\cos 4x - 1 + \sin 4x) - \cos 4x (\sqrt{2} - \sin 5x) -$$

$$c+ = 2c+ - - ; s+ = 2s+ c- ; s- = 2s- c+ ; c- = -2s+ s-$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \cdot \sin 2x$$

$$\begin{aligned} \cos^2 2x &= \sin^2 2x + 2 \sin x \cdot \cos x \\ 1 - 2 \sin^2 x &= 2 \sin x \cdot \cos x \end{aligned}$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cdot \cos 2x$$

$$-2 \sin 7x \cdot \sin 2x + 2 \sin 7x \cdot \cos 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x + \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) + \cos 2x (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) + \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$(2 \sin 6x \cdot \cos x + 2 \cos 6x \cdot \sin x - \sqrt{2} \cos^2 x + \sqrt{2} \sin^2 x - 2 \sqrt{2} \sin x \cdot \cos x)$$

$$\sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\sqrt{2} \sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 6x \cdot \cos x + \sqrt{2} \cos 6x \cdot \sin x - \cos^2 2x + \sin^2 2x - 2 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos x (\sqrt{2} \sin 6x - \cos x + 2 \sin x) + \sin x (\sqrt{2} \cos 6x + \sin x - 2 \cos x)$$

$$\sqrt{2} \sin 7x = \left(\sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \cdot \sin 2x \right) \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$



$$\begin{array}{r} 14 \\ + 14 \\ \hline 28 \\ + 56 \\ \hline 84 \\ + 14 \\ \hline 98 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 52 \\ 4 \overline{) 208} \\ \underline{20} \phant{8} \\ 8 \end{array}$$

$$y = -5 -$$

$$CB = BL$$

$$BF^2 = BW^2$$

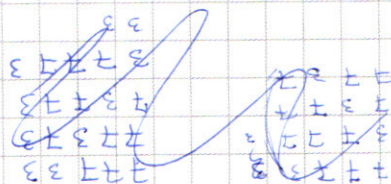
$$CF = CB^2 + BF^2 = BL^2 + BW^2 = LW^2 = 400$$

$$CF = 20$$

$$4 \cdot 5 = 3 \cdot 4 + 4 \cdot 4$$

$$\frac{BF}{FL} = \frac{156}{1}$$

$$\frac{BF}{FM} = \frac{FD}{FL}$$



9	3	1	1	1
3	3	3	1	1

[illegible]