

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

Представим число 9261 в виде произведения простых чисел: $9261 = 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

П.к. цифры числа ≤ 9 , их можно представить двумя вариантами: $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$ и $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

Аналогичные случаи невозможны т.к. $3 \cdot 7 = 21 > 9$; $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 > 9$, $7 \cdot 7 > 9$ и их нельзя представить в виде цифр. Получаем:

I. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$

первые 3 цифры мы можем расставить C_8^3 способами, 3 тройки можем расставить C_5^3 способами (т.к. 3 позиции заняты цифрами)

Ставим 2 единицы займут последние 2 позиции, их можно расставить одним способом. Получаем:

$$C_I = C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 560 \text{ способов}$$

II. $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$

3 цифры — C_8^3 способов

3 единицы — C_5^3 способов

9 и 3 : 2 способа

Но есть на каждую C_8^3 расстановку „7“ придётся C_5^3 расстановок „1“ и 2 расстановки оставшихся чисел. Получаем:

$$C_{II} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 2 = 1120 \text{ способов}$$

Всего: $C_I + C_{II} = 1680$ способов

Ответ: 1680

Задача 2

Применим формулы суммы синусов, разности косинусов и косинуса двойного угла:

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$\cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x = (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

Далее получаем:

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2 \sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\begin{cases} \cos 2x = \sin 2x \\ 2 \sin 7x = \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1 \\ \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \end{cases}$$

Заметим, что $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4})$ и $\sin(\frac{\pi}{4})$, тогда по формуле приведения:

$$\begin{cases} \sin 7x = \sin(\frac{\pi}{4}) \cos 2x + \cos(\frac{\pi}{4}) \sin 2x, \\ \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 7x = \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) \\ \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 7x - \sin(\frac{\pi}{4} + 2x) = 0 \\ \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \sin(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}) = 0 \\ \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9} \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

Преобразуем 1 ур-е системы:

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7} ; \begin{cases} x > 0, x \neq 1 \\ y > 0, y \neq 1 \end{cases}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 4\ln x + 4\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

применим св-во: $c = a^{\log_a c}$; $x = y^{\log_y x}$

$$y^{\log_y x^{-2\ln x}} = y^{\log_y 3\ln x} ; \text{перейдем к показателям}$$

$$-2\ln x \log_y x = \ln y - 3\ln x \quad | \ln x \neq 0, \text{ т.к. } x \neq 1$$

$$-2\log_y x = \frac{\ln y}{\ln x} - 3$$

$$-2\log_y x = \log_x y - 3. \text{ Пусть } \log_2 y = t :$$

$$\frac{-2}{t} = t - 3$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0 ; \text{ по Виету:}$$

$$t_1 = 1 ; t_2 = 2$$

$$\begin{cases} \log_2 y = 1 \\ \log_2 y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases}$$

решим 2-е ур-е системы относительно y :

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = (x+4)^2 + 8x^2 - 32x = x^2 + 8x^2 + 8x + 16 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$$

$$y = \frac{x+4 \pm (3x-4)}{2} ; \begin{cases} y_1 = 2x \\ y_2 = 4-x \end{cases}$$

Проверим в итоге:

$$\begin{cases} x = y \\ x^2 = y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2x \Leftrightarrow x = 0 \\ x = 4-x \Leftrightarrow x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 = 2x \Leftrightarrow x = 0 - \text{не входит в ОДЗ} \\ x^2 = 4-x \end{cases}$$

$$x^2 + x - 4 = 0 \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\text{т.к. } x > 0, x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \neq 1$$

$$y = \frac{(4+1-2\sqrt{17})}{4} = \frac{5-\sqrt{17}}{2} > 0$$

$$\text{Ответ: } (2; 2); (2; 4); \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{5 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

Задача 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Построим графики этих ф-ций} \\ \text{в осях } x, y \end{array}$$

Рассмотрим модули 1-го ур-я в 4-х случаях

I. $x \leq -5 \rightarrow \begin{cases} y \leq -x-5 \\ y \leq x-5 \end{cases} \quad \begin{array}{l} -x-y-5 + x-y-5 = 10 \\ \Leftrightarrow -2y = 20; y = -10 \end{array}$

при $x \in [-5; 5]$, график - прямая $y = -10$

II. $y \geq -x-5$
 $y \leq x-5$

$$\begin{cases} x+y+5 - y+x-5 = 10 \\ \Leftrightarrow x = 5 \end{cases}$$

при $x = 5$, график - прямая $x = 5$ с ограничением $y \in [-10; 0]$

III. $y \geq -x-5$
 $y \geq x-5$

$$\begin{cases} 2y+10 = 10 \\ \Leftrightarrow y = 0 \end{cases}$$

при $x \in [-5; 5]$ график - прямая $y = 0$

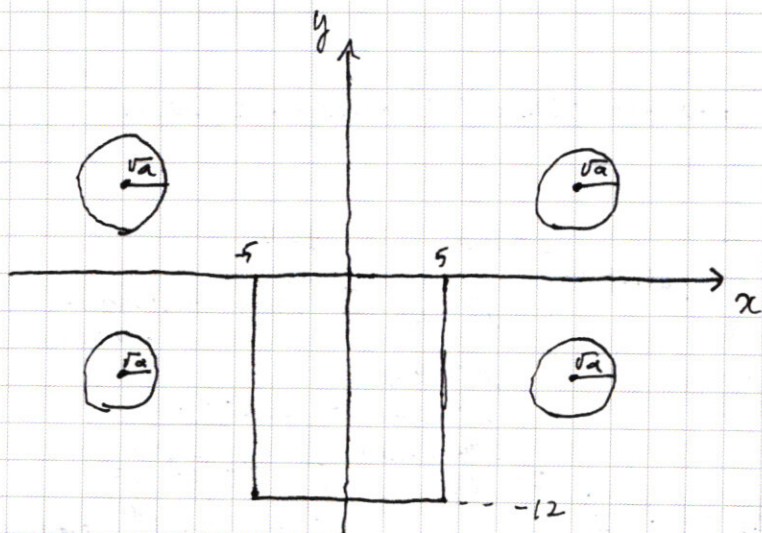
IV. $y \leq -x-5$
 $y \geq x-5$

$$\begin{cases} -x-y-5 + y-x+5 = 10 \\ \Leftrightarrow x = -5 \end{cases}$$

при $x = -5$ график - прямая $x = -5$ с о.г. : $y \in [-10; 0]$

2-е ур-е задаёт при $a > 0$ (или $a \leq 0$, решения нет) 4 окружности радиусом $\sqrt{a}$ в точках $(12; 5)$ $(-12; 5)$ $(12; -5)$ $(-12; -5)$

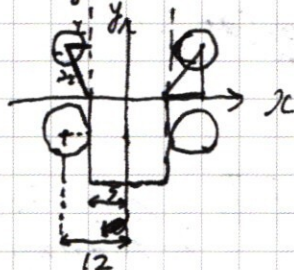
Строим график:



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В силу симметрии ~~четыре~~ окружности относительно прямоугольника, задаваемого ~~в~~ первым уравнением системы (Количество пересечений решений системы) прямоугольника окружностями перед осью Oy и за осью Oy будет равным. Значит, необходимо, чтобы у ~~левых~~ окр. за Oy и окр. перед Oy было по одному пересечению прямоугольника.

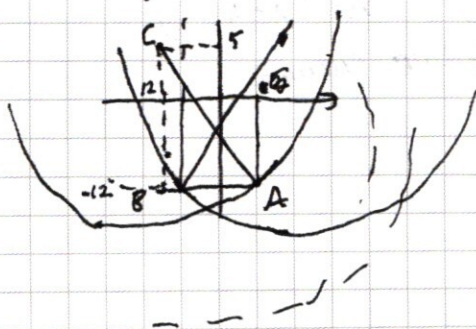
I случай: нижние окружности касаются прямоугольника



Верхние окружности не касаются прямоугольника, т.к. расстояние от них до Ox равно радиусу:

$$R = \sqrt{a} = 12 - 5 = 7, a = 49$$

II случай:



Верхние окр-сти касаются дальних углов прямоугольника

Рассмотрим $\triangle ABC$, где AC — радиус окружности ~~касается~~ ~~касается~~; $BC = 5 + 12 = 17$

$AB = 12 + 5 = 17$ $\angle ABC = 90^\circ$, тогда:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 17\sqrt{2} = \sqrt{a} \Rightarrow$$

$$a = 17^2 \cdot 2 = 578$$

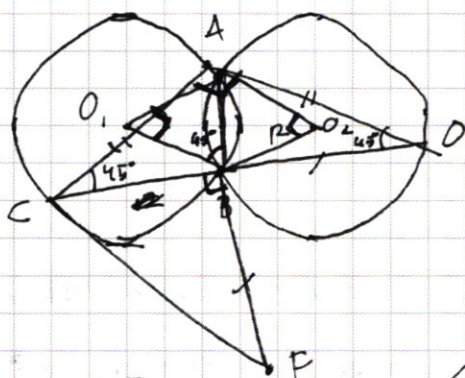
В остальных случаях пересечений нет, либо их больше двух

Ответ: $a = 49$; $a = 578$

Задача 6

а) Пусть R — радиус окружностей, O_1 и O_2 — их центры.

тогда: $\angle AO_1B = \angle AO_2B$ (AB — общая сторона, $AO_1 = BO_1 = AO_2 = BO_2$ как радиусы, $\triangle AO_1B = \triangle AO_2B$)



~~2~~ $\angle ACB = \angle AOB$, как
центральный и вписанный и

$$2 \cdot \angle AOB = \angle AO_2B \Rightarrow$$

$\angle ACD = \angle ADC$, т.к. $\angle CAD = 90^\circ$,

$$\angle ACD = \angle ADC = \frac{180 - 90}{2} = 45^\circ, \text{ а значит}$$

$$\angle AOB = \angle AO_2B = 2 \cdot \angle ACD = 90^\circ$$

и $\triangle AO_2B$

$\triangle AOB$ равнобедренный (стороны - радиусы) $\Rightarrow$

$$\angle BOA = \angle AOB = 45^\circ \text{ и } \angle BAO_2 = \angle ABO_2 = 45^\circ$$

т.к. $\angle CAD = 90^\circ$, $\angle BOA + \angle BO_2A = 90^\circ$, AO лежит на AC и AO_2 лежит на AD

по теореме синусов: $\frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = \frac{BD}{\sin(\angle BAD)} = \frac{CB}{\sin(\angle CAB)}$ $\Rightarrow$

$$BD = \frac{CB \cdot \sin 45^\circ}{\sin 45^\circ} = CB$$

Рассмотрим $\triangle BCF$: $BF = BD$; $CB = BD$, $\angle CBF = 90^\circ$

$$CF^2 = BC^2 + BF^2 = BD^2 \sqrt{2}; \text{ по теореме синусов: } BD = \frac{AB \cdot \sin(\angle BAD)}{\sin(\angle AOB)} = AB$$

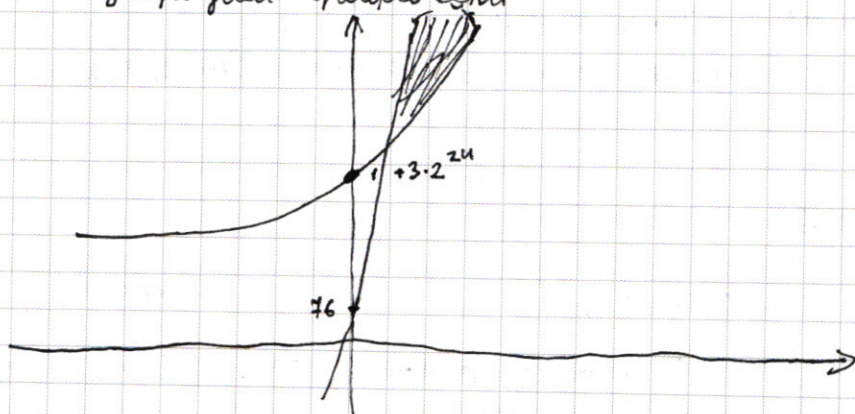
$$AB = \sqrt{R^2 + R^2} = 10\sqrt{2}$$

$$CF = AB\sqrt{2} = 20$$

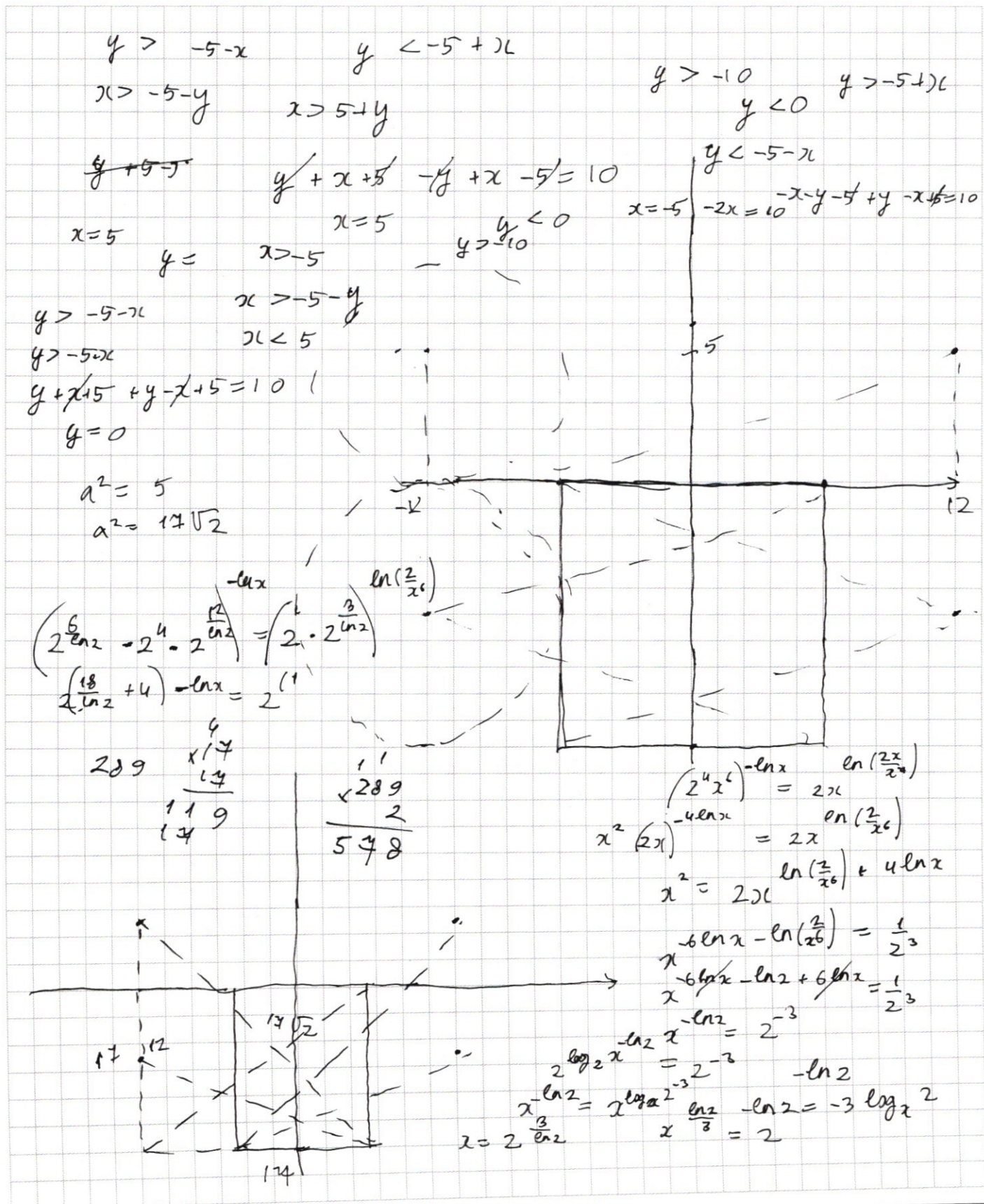
Ответ: 20

Задача 4

Изобразите графически



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$y = 2x$$

$$y = 4 - x$$

$$(16x^4 \cdot x^2)^{-\ln x} = 2x^{\ln(\frac{2x}{x^4})}$$

$$16^{-\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln(\frac{2}{x^4})} \cdot x^{\ln(\frac{2}{x^4})}$$

$$2^{-4\ln x} \cdot x^{-6\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x} \cdot x^{\ln 2 - 6\ln x} \quad | : x^{-6\ln x}$$

$$2^{-4\ln x} = 2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$$

$$x^{\ln 2} = 2^{-4\ln x - \ln 2}$$

$$\ln 2 \log_2 x = -4\ln x - \ln 2 \quad | : \ln 2$$

$$2^{\log_2 x \ln 2} = 101$$

$$\log_2 x = \frac{-4\ln x}{\ln 2} - 1 = 2^{\frac{11}{5}}$$

$$\log_2 x = -4 \log_2 x - 1$$

$$5 \log_2 x = -1 \quad \log_2 x = -\frac{1}{5}$$

$$\frac{2^{\frac{4}{5}}}{2^{-\frac{7}{5}}} =$$

$$x = \frac{1}{32} \quad y = \frac{1}{16}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 27} \\ -81 \\ \hline 116 \\ -108 \\ \hline 181 \end{array}$$

$$\left(2^{\frac{2}{5}} \cdot 2^{\frac{16}{5}}\right)^{-\ln 2^{\frac{1}{5}}} = 2^{\frac{4}{5} \ln 2^{\frac{1}{5}}} \quad y = 2 \cdot 2^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{4}{5}}$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 1 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{6} = \frac{280}{6} = \frac{140}{3}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x & x & x & x & x & x & x \\ 3 & & 3 & & 3 & & 3 \end{array}$$

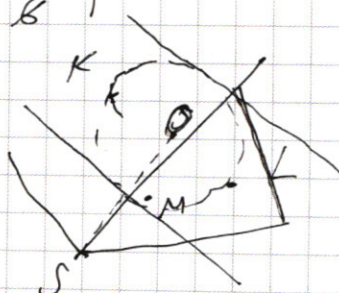
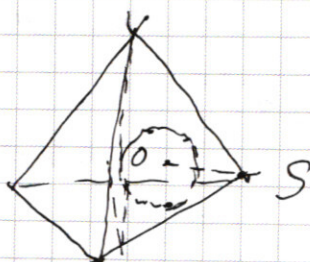
$$\frac{1120}{560} = \frac{2}{1}$$

$$I. = 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2 = 560$$

$$444 \cdot 9 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$$

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot 2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} \cdot 2 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 5}{6} \cdot 2 = \frac{140}{3} \cdot 2 = \frac{280}{3}$$

$$\frac{560}{2} = 280$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(16x^8)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x})}$$

$$x^{-6\ln x} \cdot 16^{-\ln x} = 2^{\ln 2 - 6\ln x}$$

$$x^{\ln 2} = 2^{-6\ln x - \ln 2 + 6\ln x}$$

$$x^{\ln 2} = 2^{2\ln x - \ln 2}$$

$$2^{\log_2 x^{\ln 2}} = 2^{2\ln 2 - \ln 2}$$

$$\ln 2 \log_2 x = 2\ln x - \ln 2$$

$$\log_2 x = 2\log_2 x - 1$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$(x^2(4-x)^4)^{-\ln x} = 4^{-x}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln(\frac{4}{x})}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - \ln x + 4\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$y^{\log_y x^{\dots}}$$

$$-2\ln x \log_y x = \ln y - 3\ln x$$

$$-2\log_y x = \log_x y - 3$$

$$\log_x y = t$$

$$\frac{-2}{t} = t - 3$$

$$t^2 - 3t + 2 = 0$$

$$t = 1 \quad t = 2$$

$$\log_x y = 1$$

$$x^2 = y$$

$$x = y$$

$$x = 4 - x$$

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$\varphi(x) = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\varphi(x) = \pi - \frac{\pi}{4} - 2\pi + 2\pi n$$

$$-2\sin 4x \sin 2x + 2\sin 4x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\frac{2\sin 4x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - 1)}{(\cos(2x) - \sin(2x))(2\sin 4x - \sqrt{2}(\cos 2x - 1))} = 0$$

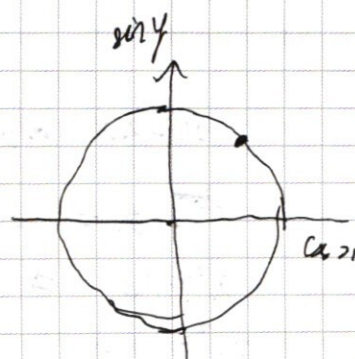
$$\left(\frac{2+8}{2}\right)^{-\ln 2} = 2^{2\ln(\frac{2}{2})}$$

$$2^{-10\ln 2} = 2^{2\ln 2 - 5}$$

$$2\sin 4x = \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$x^{-6\ln x} = x^{-6\ln x}$$

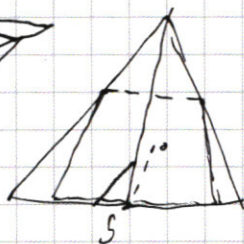
$$\sin 4x = \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$



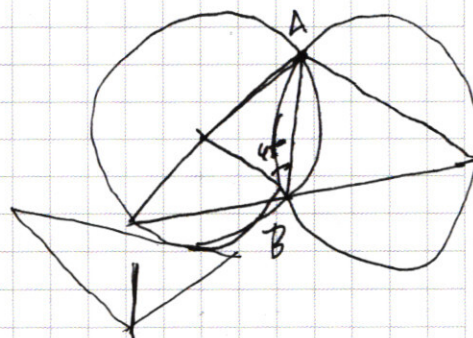
$$4x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n$$

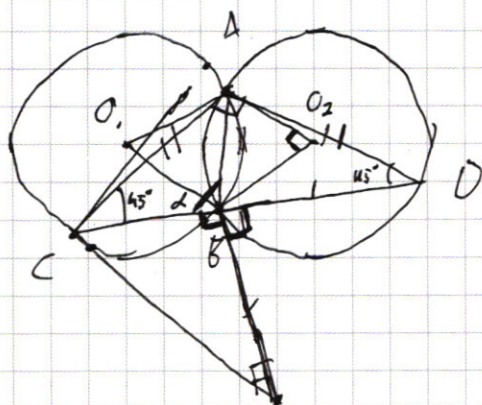


$$\frac{CB}{\sin \alpha} = \frac{OB}{\cos \alpha} \quad CB = OB \tan \alpha$$



$$AB = 10\sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha - 45^\circ) = \frac{CB}{20}$$



$$\frac{CA}{\sin 2} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

$$\frac{CB}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = \frac{10\sqrt{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 20$$

$$\frac{CB}{\sin(180 - 45 - \alpha)} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} =$$

$$= \frac{CB}{\sin(180 - 45 - 180 + \alpha)}$$

$$\frac{CB}{\sin(\alpha - 45^\circ)} = \frac{BD}{\sin(\alpha - 45^\circ)}$$

$$\frac{CB}{\sin(135 - \alpha)} = \frac{BD}{\sin(\alpha - 45^\circ)}$$

$$\frac{CB}{\sin(90 + 45^\circ - \alpha)} = \frac{BD}{\sin(\alpha - 45^\circ)}$$

$$\alpha = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 0$$

$$\alpha = 4 - \alpha \Rightarrow \alpha = 2$$

$$\alpha^2 = 2\alpha \Rightarrow \alpha = 2; 0$$

$$\alpha^2 = 4 - \alpha \quad \alpha^2 + \alpha - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}$$

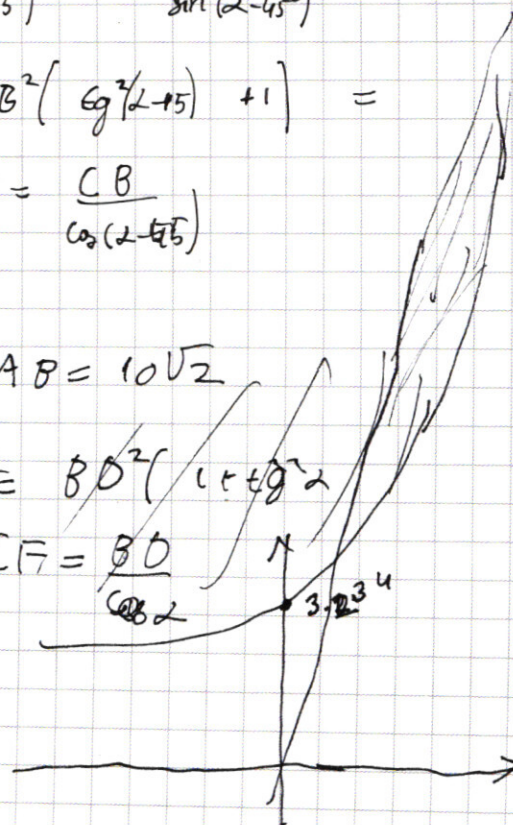
$$CF^2 = CB^2 (\sin^2(\alpha - 45^\circ) + 1) =$$

$$CF = \frac{CB}{\cos(\alpha - 45^\circ)}$$

$$AB = 10\sqrt{2}$$

$$CF^2 = BD^2 (1 + \sin^2 \alpha)$$

$$CF = \frac{BD}{\cos \alpha}$$





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$AB = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$$

$$CF = 2R$$

$$\frac{AB}{\sin(\angle AOB)} = \frac{OD}{\sin(\angle OAB)} = \frac{CB}{\sin(\angle CAO)}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 26 \\ \underline{18} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times 129 \\ \hline 9 \\ 61 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \\ \sqrt{9} \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{9} \\ 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

$$8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3$$

$$4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1$$

$$\times \times \times \times \times \times \times$$

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 1029 \\ \hline 9 \\ 9261 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 343 \overline{) 4} \\ \underline{28} \\ 1,63 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \cdot 4 \cdot 4 \\ 3 \cdot 4 \cdot 3 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 4x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 4x \cos 2x$$

$$-2 \sin 4x \sin 2x + 2 \sin 4x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 4x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 4x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 4x = 2 \sin 4x = \sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x \quad | : \sqrt{2}$$

$$\sin 4x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x = \sin \left(\frac{x}{4} + 2x \right)$$

$$\sin 4x - \sin \left(\frac{x}{4} + 2x \right) = 0$$

$$\left[2 \cos \left(\frac{x}{8} + \frac{9x}{2} \right) \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{x}{4} \right) \right] = 0$$

$$\cos \left(\frac{x}{8} + \frac{9x}{2} \right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{x}{8} + 2\pi k$$

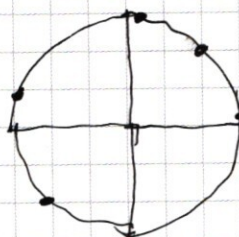
$$x = \frac{x}{20} + \frac{2}{5} \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{20} + \frac{2}{5} \pi k$$

$$\frac{25x}{20}$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{x}{8} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{5x}{4}$$



$$\cos 2x = 1$$

$$\frac{2x}{2} = \frac{2x}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{x}{4} + \frac{2}{9} \pi n$$

$$x = \frac{x}{12} + \frac{2}{9} \pi n$$

$$x^{\frac{-\ln x}{x^2}} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$0 = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$$

$$y = \frac{x+4-3x+4}{2} = 4-x$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2}) + 4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - \ln x^2 + 4 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$x^{-2 \ln x} = (2x)^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$x^{\ln x - \ln y} = 2^{\ln y - 3 \ln x}$$

$$\ln x - \ln 2x = \ln 2x - \ln x^3$$

$$x^{\ln \frac{1}{2}} = 2^{\ln(\frac{x}{x^2})}$$

$$x^{\ln \frac{1}{2}} = 2$$

$$x^{\ln \frac{1}{2}} = x^{\log_x 2} \cdot \ln(\frac{2}{x^2})$$

$$\ln \frac{1}{2} = \log_x 2 \cdot \ln(\frac{2}{x^2})$$

$$\ln \frac{1}{2} = \log_x 2 (\ln 2 - 2 \ln x)$$

$$\log_{\frac{2}{x^2}} \frac{1}{2} = \log_x 2$$

$$-\log_{\frac{2}{x^2}} 2 = \log_x 2$$

$$\frac{x^2}{2} = x$$

$$x=2$$

$$y=4$$

$$(4 \cdot 64)^{-\ln 2} = 4^{\ln(\frac{4}{128})}$$

$$4^{-4 \ln 2} = 4^{\ln \frac{1}{32}}$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x > -5 \quad x < 15$$

$$x < -5 - y$$

$$x > 5 + y$$

$$|-5+x| + |-5-x| = 10$$

$$y < -5 - x$$

$$y < -5 + x$$

$$|y+5+x| + |y+5-x| = 10$$

$$y < -5 - x$$

$$-y-5-x - y-5+x = 10$$

$$-2y = 20 \quad y = -10$$

$$x < -5 - y$$

$$x < -15$$

