

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа. 360
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$. ✓
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases} \quad \begin{matrix} (2; 4) \\ (3; 9) \end{matrix}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} 49 \\ 5/4 \end{matrix}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF . = 20

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF . 196

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right)$$

$$x > 0 \quad y > 0 \quad x \neq 0$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 7x - 4y = 0$$

$$y^2 - 4y +$$

$$y^2 - x(y + 2x) + 4(2x - y) = 0$$

$$y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 7x - 4y = 0$$

$$y(y - 2x) + x(y - 2x) + 4x(2x - y) = 0$$

$$(y + x - 4x)(y - 2x) = 0$$

$$(y - 3x)(y - 2x) = 0$$

$$\begin{cases} y = 3x \\ y = 2x \end{cases}$$

6(1)

$$(x^2 \cdot 31x^4)^{-\ln x} = 3x \ln \left(\frac{3x}{x^2} \right)$$

$$-\ln x \ln(x^6 \cdot 31) = \ln 3x \cdot \ln \left(\frac{3x}{x^2} \right) = \ln 3x \cdot \ln \left(\frac{3}{x} \right)$$

$$-\ln x (\ln x^6 + \ln 31) = \ln 3x (\ln 3 - \ln x^6)$$

$$-\ln x \ln x^6 + \ln 31(-\ln x) = \ln^2 3 + \ln 3 \ln x - \ln 3 \ln x^6 - \ln x \ln x^6$$

$$-4 \ln 3 \ln x = \ln^2 3 + \ln 3 \ln x - 6 \ln 3 \ln x$$

$$0 = \ln^2 3 - \ln 3 \ln x$$

$$\ln x = \ln 3$$

$$x = 3$$

$$y = 3x = 9$$

$$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = 2x \ln \left(\frac{2}{x^6} \right)$$

$$-\ln x (\ln x^6 + \ln 16) = \ln 2x (\ln 2 - \ln x^6)$$

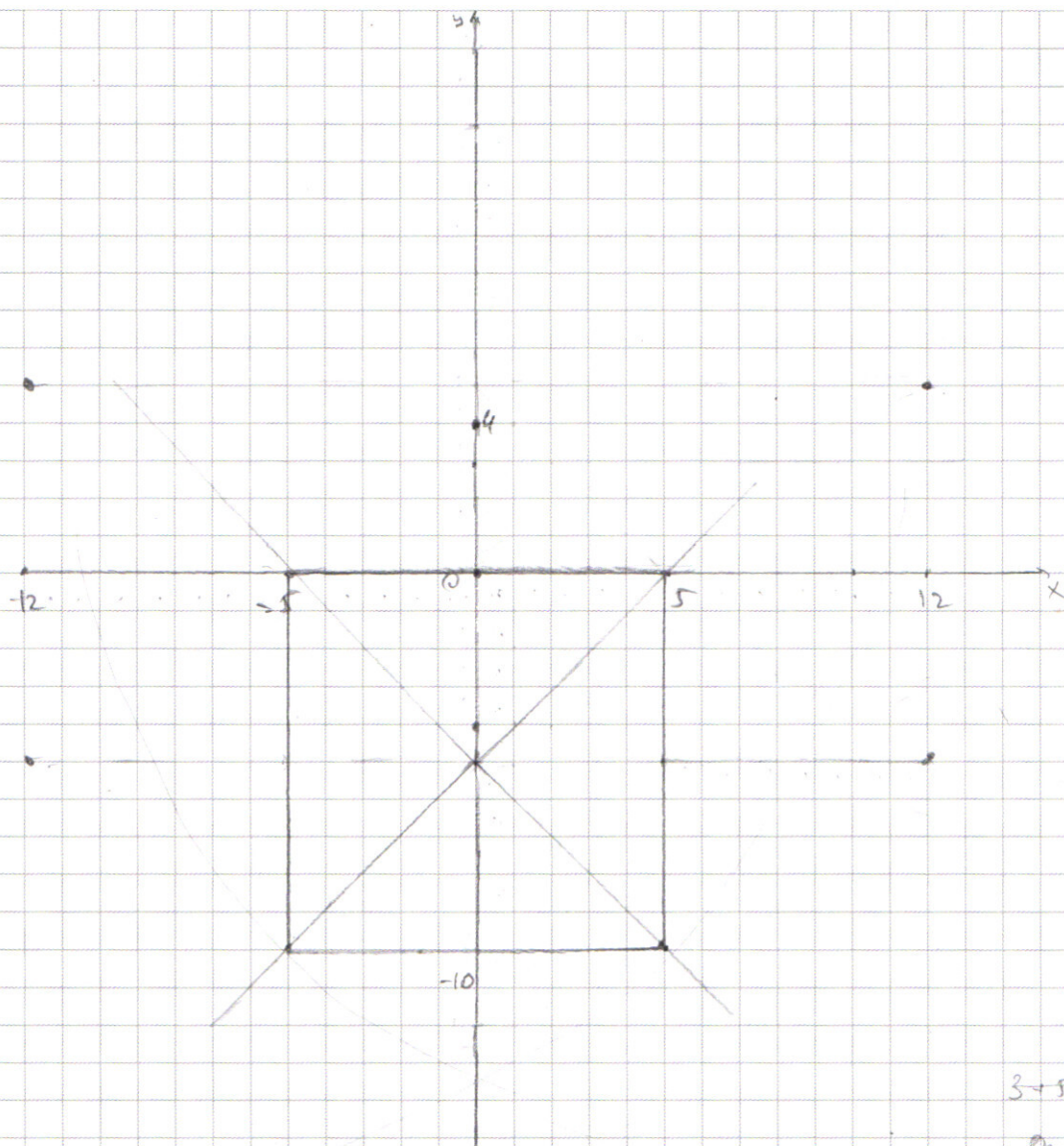
$$-\ln x \ln x^6 - \ln x \ln 16 = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - \ln x \ln x^6 - \ln 2 \ln x^6$$

$$-\ln x \ln 16 = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - 5 \ln x \ln 2$$

$$-4 \ln x \ln 2 = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - 5 \ln x \ln 2$$

$$\ln^2 2 = \ln 2 \ln x \quad (y = 4)$$

$$\ln 2 = \ln x \quad (x = 2)$$



$$a = 49$$

$$\begin{aligned} & \textcircled{x+y+5} + \textcircled{y-x+5} = 10 \\ & y=0 \\ & (y+5-x) + (y+5+x) = 10 \\ & x=5 \\ & |y| + |y+10| = 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & y = -5 - x \\ & 0 = |1-2x| = 10 \\ & y = x - 5 \\ & 2|x| = 10 \end{aligned}$$

$$(1; -4)$$

$$\frac{(4+5-1) + (4+5+1)}{2}$$

$$\sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514}$$

$$|a-b| + |a+b| = 10$$

$$|10-1| + |1|$$

$$(1, 4) \quad \frac{(4+5-1)}{8} + \frac{(4+5+1)}{10}$$

$$\frac{(1-4)}{1} + \frac{(-4+5-2)}{1}$$

$$(y-x+5) \quad (y+x+5)$$

$$y-x=5-4$$

$$2(y+5+x) - (y-5+x) = 10$$

$$2x = 10$$

$$x=5$$

$$(1-10) \quad \frac{(-5+1)}{(-5-1)}$$

$$3+5 + 3+5$$

$$\text{or } 6+4$$

$$\frac{(5-4)}{1} + \frac{(5+4)}{9}$$

$$\frac{(10)}{1} + \frac{(10)}{9}$$

$$-4+5$$

$$1$$

$$\frac{(4+5-1)}{8} + \frac{(4+5+1)}{10}$$

$$\frac{(1-4)}{1} + \frac{(-4+5-2)}{1}$$

$$3$$

$$\frac{(3+5-1)}{2} + \frac{(3+5+1)}{6}$$

$$\frac{(3+5-1)}{2} + \frac{(3+5+1)}{6}$$

$$7$$

$$\frac{(2+5-1)}{2} + \frac{(2+5+1)}{6}$$

$$6$$

$$-y-5-x + y+5-x$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 9261 \\ 117 \\ \hline 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \\ 9 \\ \hline 26 \\ -18 \\ \hline 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9261 \\ 1029 \\ \hline 9 \\ \hline 12 \\ -12 \\ \hline 09 \\ -09 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$9261 = (21)^3 = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1}_0$$

$$C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 28 \cdot 20 = 560$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x + \sin 9x = 2 \sin 9x \cos x - 2 \sin 9x \cdot 1 + \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x \right) = \sqrt{2} \left(\cos(9x - \frac{\pi}{4}) + \sin 9x \right) = \sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin 5x - \cos 5x) = \sqrt{2} \left(\sin(5x - \frac{\pi}{4}) \right) = \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4})$$

$$\sqrt{2} \cos(9x - \frac{\pi}{4}) + \sqrt{2} \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) + \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \cos \left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} + 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} - 5x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \cos 7x \cos(4x - \frac{\pi}{2}) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{9x - \frac{\pi}{4} + 5x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \sin \left(\frac{5x + \frac{\pi}{4} - 9x - \frac{\pi}{4}}{2} \right) - \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos x + \cos y = 2 \sin \left(\frac{x+y}{2} \right) \cos \left(\frac{y-x}{2} \right)$$

$$\sqrt{2} \sin \left(9x + \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin \left(7x \right) \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x = 0$$

$$\cos(9x - \frac{\pi}{4}) - \cos(5x + \frac{\pi}{4}) - \cos 4x = 0$$

$$\left(\cos 9x - \frac{\pi}{4} \right) - 2 \cos \left(\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \cos \left(\frac{x + \frac{\pi}{4}}{2} \right) = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left(\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = -\sqrt{2} \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x + 2 \sin 7x \cos 2x - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cos 4x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 5x = 2 \sin$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos \left(5x + \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(-\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$-2 \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) + 2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 0$$

$$1) \frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin (\alpha + 3x)$$

$$\cos x = \sin x \cos 3x + \cos x \sin 3x$$

$$\cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{5\pi}{8} \right)$$

$$\sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) = +\cos \frac{\pi}{4}$$

$$\cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \cos \left(\frac{13x}{2} - \frac{5\pi}{8} \right) = 0$$

$$-2 \sin \left(\frac{9x}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) \sin \left(\frac{5x - 13x}{4} - \frac{\pi + 5\pi}{16} \right) = 0$$

$$-2 \sin \left(\frac{9x}{2} - \frac{3\pi}{8} \right) \sin \left(-\frac{8x}{4} - \frac{6\pi}{16} \right) = 0$$

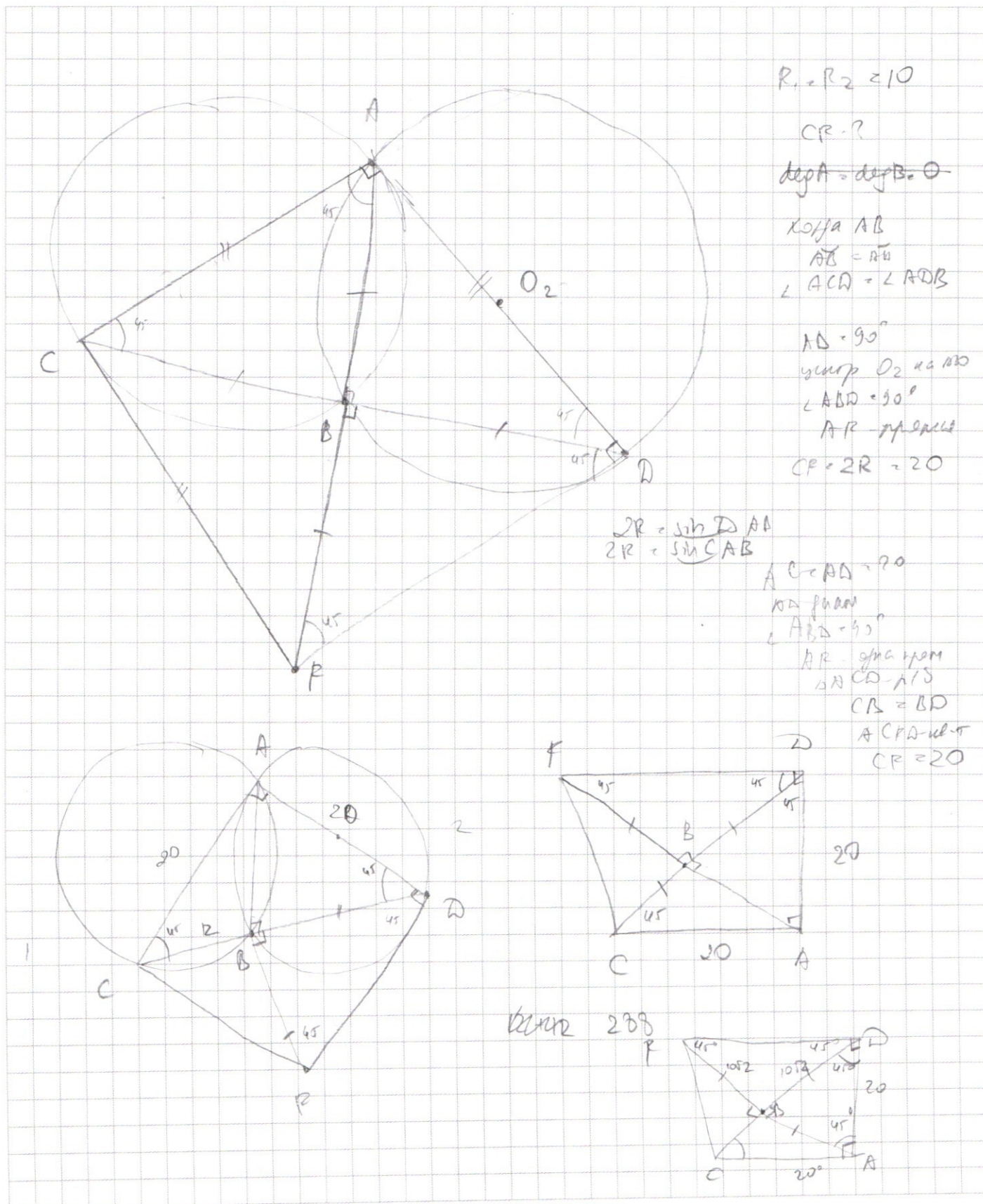
$$\left[\sin \frac{9x}{2} - \frac{3\pi}{8} = 0 \right.$$

$$\left. \sin \left(-2x - \frac{3\pi}{8} \right) = 0 \right.$$

$$\left[\frac{5x}{2} - \frac{3\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z} \right.$$

$$\left. -2x - \frac{3\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\cos \frac{\pi}{4} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{3}{5}$$

$$\sin(15^\circ + \alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$AC = 2R \cdot \sin(\dots) = 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 14\sqrt{2}$$

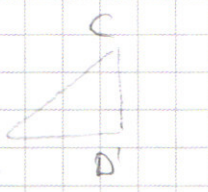
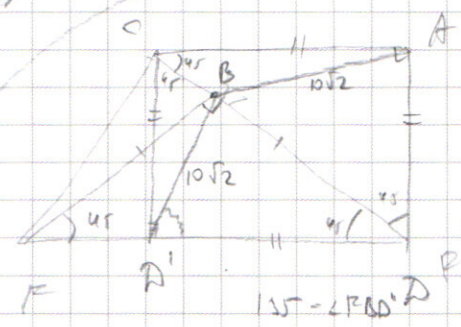
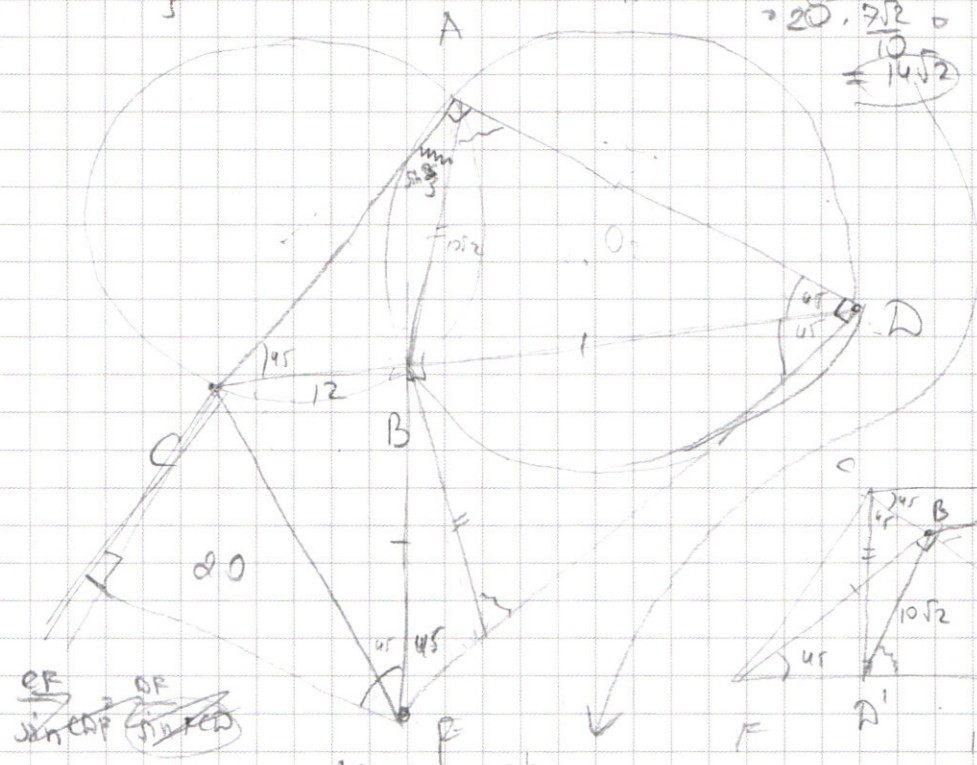
given

$AC = AD$ is given
 $2R \sin C = AB$
 $2R \sin A = AB$

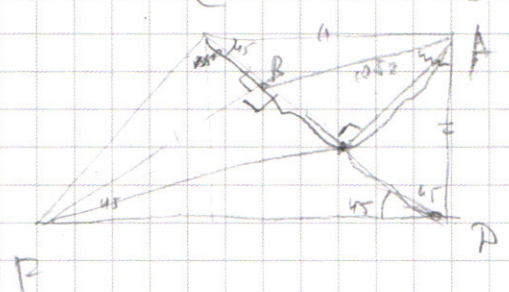
$$AB = \frac{20 \cdot 2 \cdot 20\sqrt{2}}{20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = 10\sqrt{2}$$

$$\frac{BC}{\sin CAB} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$$

$$\sin CAB = \frac{12 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{10\sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$



$$S_{\triangle ACB} = \frac{1}{2} AC \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2} = 98$$



$$CD = \sqrt{2} AC$$



$$CF = \frac{BF}{\sin \angle FCD} = \frac{BD}{\sin \angle FCD}$$

$$\frac{BD}{\sin \angle BAD} = 20$$

$$\sin \angle BAD = \frac{BD}{20}$$

$$\triangle AD'B \sim \triangle ACP$$

$$\cos \angle PAC = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \angle FCD = \frac{CF}{\sin \angle FCD} = \frac{BD}{\sin \angle FCD} = \frac{\sqrt{2} BF}{\sin \angle FCD}$$

$$CB = \sqrt{2} AC - BD$$

$$2AC^2 - BD^2 = 2\sqrt{2}AC \cdot BD + BD^2$$

$$= 2AC^2 - 2\sqrt{2}AC \cdot BD = CF^2$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$AB = 10\sqrt{2}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

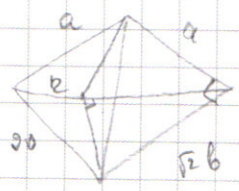
$$AD^2 = AD^2 + BD^2 - \sqrt{2}AD \cdot BD = 200$$

$$76 + (2^{33} - 2)x \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$\frac{BD'}{CF} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$10\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} CF$$

$$20 + CF$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} \\ y < 76 + 2(2^{22} - 1)x \end{cases}$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} > 3 \cdot 2^{24} = 6 \cdot 2^{23}$$

$$y < 76 + 2^{23}x - 2x < 76 + 4x - 2x$$

$$0 < 76 - 2x \quad -2x < 76 \quad x < 38$$

$$y \geq 2^{39} + 3 \cdot 2^{24}$$

$$y < 76 + 2^{33} - 2^{40}$$

$$x = 297 \quad y \geq 2^{37} + 3 \cdot 2^{24}$$

$$y < 76 + 2^{33} - 2^{33}$$

если $x \leq 0$

$$y \geq 1 \cdot 2^{24} + 1$$

$$y < 76$$

если $x < 0$

$$y \geq 2^{-1x} + 3 \cdot 2^{24} > 0$$

$$y < 76 - |x| (2^{23} - 2) = 76 + 2|x|(1 - 2^{22}) < 0$$

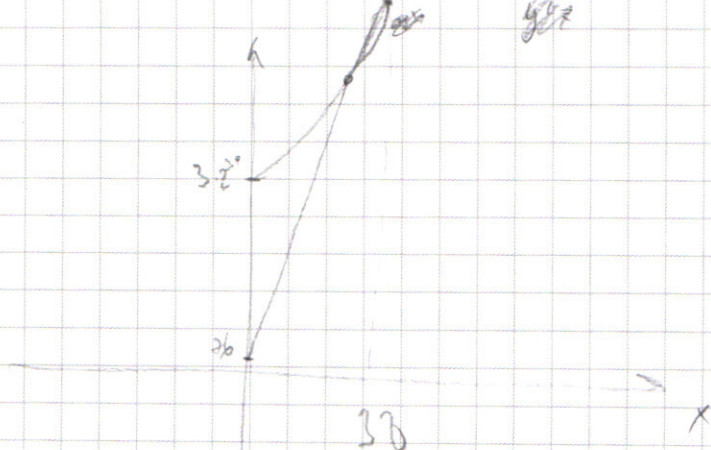
если $x > 0$:

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{24} > 3 \cdot 2^{24}$$

$$y < 76 + 2^{23}x - 2x$$

$$3 \cdot 2^{24} < 76 + 2^{23}x - 2x$$

$$(2^{23} - 2)x + 76 > 2^x + 3 \cdot 2^{24}$$



38, 37, 36, 35

204

or 9p 38

(10) +

(5) - 8 -

94

$$2^{33} \cdot 5 + \dots$$

$$2^5 + 3 \cdot 2^{24}$$

$$5 \cdot 2^{28} + 1 + 3 \cdot 2^{29}$$

$$2^{31} \cdot 8 \quad 2^{25} \cdot 8 \cdot 2^{26} \cdot 4$$

$$2^8 + 1 \cdot 2^{24} \quad 2^{26} \cdot 3 + 1$$

$$2^{31} \cdot 9 + \dots \quad 9 \cdot 2^{24}$$

$$2^5 + 3 \cdot 2^{24}$$

$$3 \cdot 2^{25} + 1$$

31

$$38 \cdot 2^{23} < 2^{24}$$

$$19 \cdot 2^{24} > 2^{23} + 3 \cdot 2^{24} = 16 \cdot 2^{24} + 3 \cdot 2^{24} = 19 \cdot 2^{24}$$

$$2^{31} \cdot 39 - 2 \cdot 39 + 76$$

$$2^{39} + 3 \cdot 2^{24}$$

$$= 35 \cdot 2^{24} = 202^{24}$$

38 8a

$$2^{33} \cdot 37 + 2 >$$

$$2^{37} + 3 \cdot 2^{24}$$

$$= 11 \cdot 2^{24} =$$

$$= 22 \cdot 2^{24}$$

$$2^{23} \cdot 32 + \dots \quad 2^{32} +$$

$$2^{23} \cdot 30 + \dots$$

$$2^{30} + 24 \cdot 48 \cdot 2^{30}$$

$$2^{28} \cdot 35 + \dots \quad 2^{35} + 32^{24}$$

$$2^{22} \cdot 10 = 2^{24} \cdot 5$$

$$2^{20} \cdot 20 + \dots$$

$$2^{20} + 3 \cdot 2^{24}$$

$$2^{14} \cdot 3 + 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

NL 92612 3.3.3.7.7.7.1.1

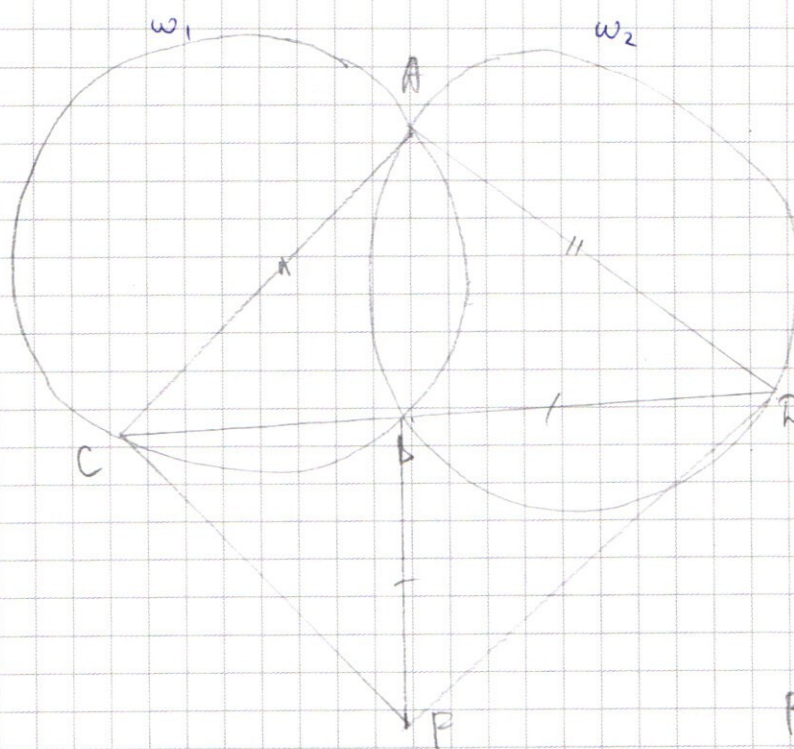
Коммерсанты взысканных исл. равно К.

Число его посещений, нужно посчитать количество
сочетаний 2^4 - всего вариантов выбрать 2 порции
рыбы 1 бу повторений и умножить его на количество
вариантов выбрать 3 места для салатов бу повторения
бу оставшихся мест порциями (т.к. каждая еда
может быть на любом из 3 мест в шаше)

$$K = C_8^2 \cdot C_6^3 = \frac{8 \cdot 7}{2} \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 28 \cdot 20 = 560$$

Green: 560.

NE



по сравнению с ω_2

$$AB = 2R \sin \angle ADB$$

for w_1
AR = 2R

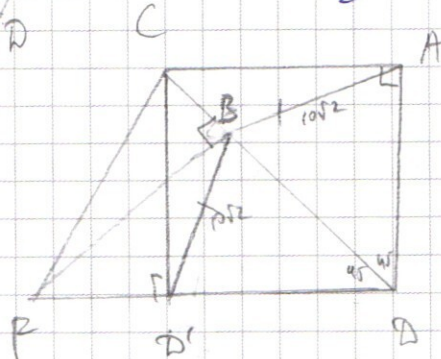
$$AB = 2R \sin \angle ACD \Rightarrow$$

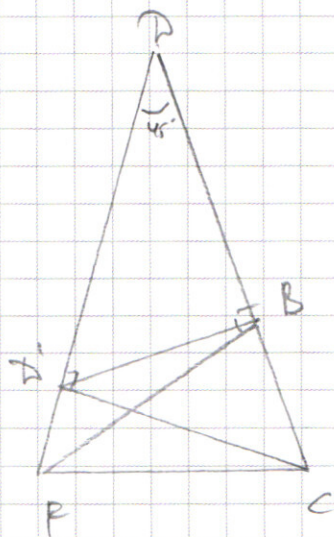
$$\sin \angle ACD = \sin \angle ADB$$

значит $\angle ACB = \angle ADB = 45^\circ$
(т.к. в описанном $\triangle ACB$)

Как сумма не может
равняться 180° .

$$AB = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2}$$





Доп. построение: $CD' \perp PD$

точка B - равноудалена от PD и AA

($\angle BDC = 45^\circ$, $\angle PDB = 45^\circ$. т.к. $\triangle PBD$ равнобедренный и прямоуг. (по условию))

значит из симметрии получим

$$BD' = BA = 10\sqrt{2}$$

$$\angle PD'C = \angle PBC = 90^\circ$$

как следствие $\angle CD'D$ и $\angle PBD$

около $PD'BC$ можно описать окружность

$$\angle DD'B = \angle PCD$$

$\triangle DD'B \sim \triangle CDP$ по двум углам ($\angle PDC$ - общий)

$$\frac{D'B}{PC} = \frac{BD}{DP}$$

из $\triangle BDP$ по т. Пифагора $2BD^2 = DP^2$
 $DP = \sqrt{2}BD$

$$\frac{D'B}{PC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

a) $PC = D'B\sqrt{2} = 20$

b) $S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC \cdot AD$

следствие

из т. Синауса для $\triangle ABD$ и $\triangle ACB$

$$AC = 2R \sin \angle DBA$$

$$AD = 2R \sin \angle ABD$$

$$AC = AD$$

$$\angle CBA + \angle ADB = 180^\circ$$

$$\sin \angle CBA = \sin \angle ADB$$

$$S_{\triangle ACP} = \frac{1}{2} AC^2$$

$\triangle ACB$ теорема синусов: $\frac{CB}{\sin \angle CAB} = \frac{AB}{\sin 45^\circ}$

$$\sin \angle CAB = \frac{10\sqrt{2}}{12}$$

$$\frac{2 - \sqrt{2}}{10 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos \angle CAB = \frac{4}{5}$$

из основного тригонометрического тождества

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin \angle CBA = \sin (180^\circ - \angle CAB - \angle ACB) = \sin (\angle CAB + 45^\circ)$$

$$\sin \angle CBA = \sin \angle CAB \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos \angle CAB$$

$$\sin C \cos A = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{2}{5} + \frac{4}{5} \right) = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

По Т. Чернов про ΔACB

$$\frac{AC}{\sin 60^\circ} = \frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R = 20$$

$$AC = 20 \cdot \frac{\sqrt{2} \cdot 7}{10} = 14\sqrt{2}$$

$$Ac^2 = 196.2$$

$$\int A A^* C R = \frac{1}{2} \cdot 196 \cdot 2 = 196$$

Orben: a) 20, b) 196.

$$\text{NB } (x^2 y^4)^{-\ln x} = y \ln \left(\frac{y}{x^2} \right) \quad (1) \quad \text{QD: } x > 0, y > 0, x \neq 0$$

$$4y^2 - xy' - 2x^2 + 3x - 4y = 0 \quad (2)$$

$$(2) \quad y^2 - 2xy + xy - 2x^2 + 3x - 4y = 0$$

$$y(y - 2x) + x(y - 2x) + 4x(2x - y) = 0$$

$$(y + x - 4x) / (y - 2x) = 0 \quad \text{L2}$$

2) $\begin{cases} y = 2x \\ y = 2x \end{cases} \quad b(1)$

1) $y = 2x$

$$(x^2 \cdot 6(x^4))^{-\ln x} = \int x^{\ln\left(\frac{2x}{x^2}\right)}$$

$$-\ln x (\ln x^6 + \ln 31) = \ln 3x \cdot (\ln 3 - \ln x')$$

$$-\ln x^6 \ln x + \ln 3(-\ln x) = \ln^2 3 + \ln 3 \ln x - \ln x^6 \ln 3 - \ln x^6 \ln x.$$

$$-4 \ln 3 \ln x = \ln^2 3 + \ln 3 \ln x - 6 \ln 3 \ln x$$

$$\ln 3 \ln x = \ln^2 3$$

$$\ln x = \ln 3$$

Т.к. $y = \ln x$ - монотонная
ростущая

2) $y = 2x$

$$(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = 2x \ln \left(\frac{2}{x^6} \right)$$

$$-\ln x (\ln x^6 + \ln 16) = \ln 2x (\ln 2 - \ln x^6)$$

$$-\ln x \ln x^6 - \ln x \ln 16 = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - \ln x \ln x^6 - \ln 2 \ln x^6$$

$$-\ln x \cdot 4 \ln 2 = \ln^2 2 + \ln 2 \ln x - 6 \ln 2 \ln x$$

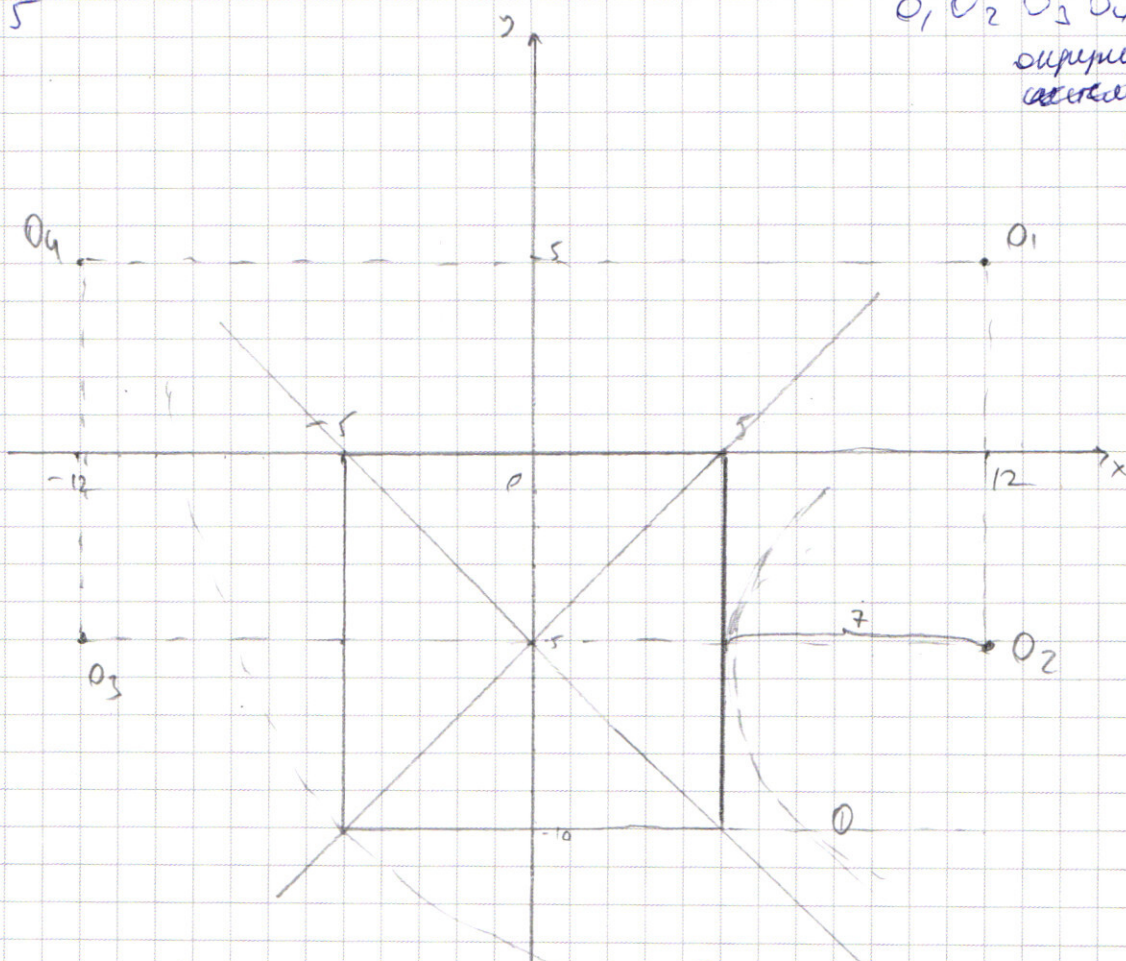
$$\ln x \ln 2 = \ln^2 2$$

т.к. $y = \ln x$ - монотонная
то $x = 2$, $y = 4$

Ответ: $(2; 4)$ $(3; 9)$

№ 5

O_1, O_2, O_3, O_4 - центры
окружностей
системы уравнений
(2) из
системы



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10 \quad (1)$$

$$[(x+12)^2 + (y-5)^2 = a] \quad (2)$$

(1) - квадрат

(2) - 4 окружности радиуса $\sqrt{a}$ и с центрами O_1, O_2, O_3, O_4 из соображений симметрии

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Заметим, что при $a < 49$ пересечений с квадратом не будет

при $a = 49$ окр-ты с центрами O_2 и O_3 касаются, а окр-ты O_1 и O_4 не имеют точек пересечения

при $49 < a < 514$ точек пересечения 4 и больше

при $a = 514 = 17^2 + 15^2$ окр-ты O_1 и O_4

пересекаются — пересекают квадрат в данных

учах, а окр-ты O_2 и O_3 точек пересечения с квадратом не имеют, т.к. квадрат внутри этих окружностей.

при $a > 514$ пересечений окр-тей с квадратом нет.

Ответ: 514; 49.

$$n 2 \quad \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 9x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 9x \right) = \sqrt{2} \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sin 5x - \cos 5x = \sqrt{2} \left(\sin 5x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 5x \right) = \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\sqrt{2} \cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \sqrt{2} \cos 4x + \sqrt{2} \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$\cos \left(9x - \frac{\pi}{4} \right) - \cos 4x + \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \sin \left(-\frac{5x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) + 2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \left(\cos \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) - \sin \left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right) = 0$$

$$1) \sin\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x - \frac{\pi}{4} = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

$$2) \cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) - \sin\left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = 0$$

$$\cos\left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{13x}{2} - \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{13x}{2} - \frac{5\pi}{8}\right)$$

$$-2 \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) \sin\left(\frac{5x - 13x}{4} - \frac{\pi + 5\pi}{16}\right) = 0$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{9x}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = 0 \\ \sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9x}{2} - \frac{3\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ -2x + \frac{\pi}{4} = \pi b, b \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{9}\pi n + \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi b}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ответ:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = -\frac{\pi b}{2} + \frac{\pi}{8}, n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2}{9}\pi n + \frac{\pi}{12}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

и если $x < 0$, то

$$y > 3 \cdot 2^{34} + 1 > 76$$

то неравенство

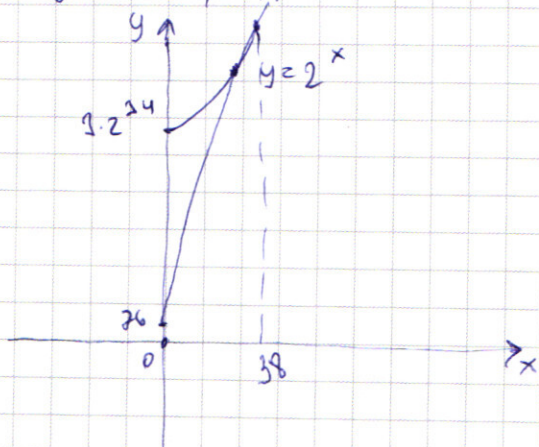
$$y < 76 + 2|x|(1 - 2^{32}) < 0$$

если $x = 0$, то

$$y > 3 \cdot 2^{34} + 1 > 76$$

то тоже противоречит системе, т.к. $y < 76$.

значит, $x > 0$.



значит, что $y = 2^x$ при больших x возрастает быстрее, чем прямая $y = (2^{32} - 1)x \cdot 2$

то при $x = 38$

$$(2^{32} - 2)38 + 76 = 2^{38} + 3 \cdot 2^{34}$$

т.е. графики функций пересекаются. Значит, нужно найти значение переменной x ,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при которых верно неравенство $(2^{33}-2)x + 76 > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$

при $x = 39$

$$2^{33} \cdot 39 - 2 \cdot 39 + 76 < 2^{39} + 3 \cdot 2^{34} = 35 \cdot 2^{34} = 70 \cdot 2^{33}$$

Всё при переборе значений

при $x = 8$ 2

№ 4. Пыльцы сечения трапециевидного угла плоскости, касающейся сферы и перпендикуляр линии SO - представляют собой пучок конических трекатоликов.

Тогда коэффициент преломления равен $\frac{1}{4}$. При этом расстояние между ними трекатоликами есть диаметр сферы.

при которых прямая верно неравенство $(2^{23}-2) \cdot x + 26 > 2^v + 1 \cdot 2^{24}$