

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$. Единственным представлением 7^3 в виде произведения цифр $7^3 = 7 \cdot 7 \cdot 7$. В таких числах обязательно должно быть равно три семерки. Число 3^3 можно получить двумя способами: $3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3$ и $3^3 = 9 \cdot 3$ (цифру 6 нельзя использовать, так как она имеет делитель 2, а 9261 не имеет). То есть ~~искомые~~ искомые числа можно разделить на 2 вида:

1) В записи числа есть три семерки, три тройки, ~~и~~ остальные единицы (две цифры). Всего таких чисел $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} =$
 $= 560$

2) В записи числа есть три семерки, одна тройка, одна девятка и три единицы. Всего таких чисел $C_8^3 \cdot 5 \cdot 4 = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 5 \cdot 4 =$
 $= 1120$

Всего искоемых чисел $560 + 1120 = 1680$.

Ответ: 1680.

№ 2.

$$(\cos 9x - \cos 5x) - 5 \cos 4x + (\sin 9x + \sin 5x) = 0$$

$$\begin{aligned}
 & -2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2 \sin 7x \cos 2x = 0 \\
 & 2 \sin 7x (\cancel{\cos 2x} \cos 2x - \sin 2x) - (\cos 2x - \sin 2x) \cancel{2 \sin 7x \cos 2x} \\
 & \cdot (\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - (\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x)) = 0 \\
 & (\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) \right) = 0 \\
 & (\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right) = 0 \\
 & (\cos 2x - \sin 2x) \cdot 2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases}
 \cos 2x - \sin 2x = 0 & (1) \\
 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0 & (2) \\
 \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0 & (3)
 \end{cases}$$

$$1) \sin 2x - \cos 2x = 0$$

Заметим, что $\cos 2x \neq 0$, иначе $\sin 2x - \cos 2x = \pm 1$.
Разделим обе части уравнения на $\cos 2x$:

$$\tan 2x - 1 = 0$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$2) \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{5x}{2} = \frac{\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$3) \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\sqrt{\pi}}{5}$,
 $x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\sqrt{\pi}}{9}$ ($n \in \mathbb{Z}$).

✓ 3.

$y > 0$, иначе не определено выражение $y^{\ln(y/x^2)}$.

$x > 0$, иначе не определен логарифм $\ln(y/x^2)$.

Поскольку обе части первого равенства положительны, а $\ln(x)$ — монотонная функция, то оно равносильно:

$$\ln((x^2 y^4)^{-\ln x}) = \ln(y^{\ln(y/x^2)})$$

$$-\ln x \ln(x^2 y^4) = \ln(y/x^2) \ln y$$

$$-2 \ln^2 x - 4 \ln x \ln y = \ln^2 y - 2 \ln x \ln y$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y + \ln^2 y = 0$$

$\ln^2 y \neq 0$, так как иначе $\ln x = 0$ и $\ln y = 0$, откуда $x = 1$, $y = 1$, но это не решение второго уравнения. Тогда разделим обе части на $\ln^2 y$:

$$2 \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 - 3 \frac{\ln x}{\ln y} + 1 = 0$$

$$t = \frac{\ln x}{\ln y} = \log_y x:$$

$$2t^2 - 3t + 1$$

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\log_y x = 1$$

$$x = y$$

$$\log_y x = \frac{1}{2}$$

$$y = x^2$$

Подставим y во второе уравнение

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0 \quad | \quad x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$x \neq 0$, так как $x > 0$.

$$x = 0$$

$$x = 2$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

не удовлетв.
 $x > 0$

$$y = x = 2$$

$$(x-2)(x^2 + x - 4) = 0$$

$$(2; 2)$$

$$x = 2$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$y = x^2 = 4$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2} < 0 \quad x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$(2; 4)$$

не подходит $y = x^2 = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$

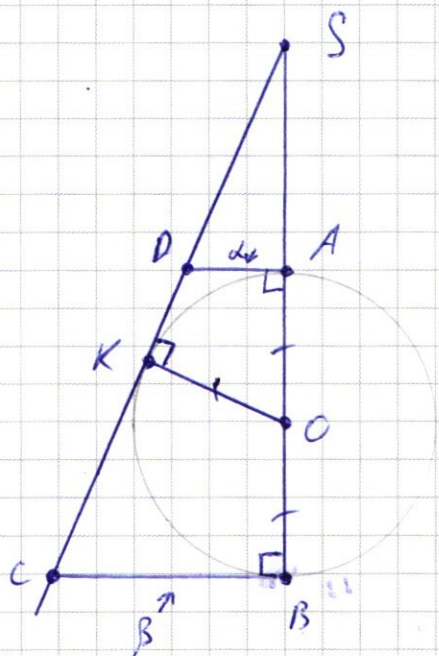
$$\text{Ответ: } (2; 2), (2; 4), \left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

~ ч.

Пусть плоскости α и β перпендикулярны SO и касаются сферы (α ближе к S , чем β). Сечения трёхгранного угла α и β равносильны относительно центра S , значит, они подобны. Коэффициент подобия $k = \sqrt{\frac{S_\beta}{S_\alpha}} = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4$. Из точек K, L, M опустим перпендикуляры на SO . Основания этих перпендикуляров H совпадут, так как по св-ву касания имеем $SK = SL = SM$ и $\angle KSO = \angle LSO = \angle MSO$. Значит, точки K, L и M лежат в плоскости $KLM \perp SO$, проходящей через точку H .

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если KLM и $\angle$ и β и данное сечение
также подобно сечению ~~и~~ плоскостей $\angle$ и β .
Изобразим сечение плоскостью SKO :



Отношение соответственных
отрезков $\frac{BC}{AD} = K = 4$. Пусть

$AD = x$, $BC = 4x$. Отрезки
касательных равны, поэтому
 $AD = KD = x$, $CK = CB = 4x$.
 $CD = CK + KD = 5x$

Пусть $SD = a$, тогда из
подобия $\triangle SAD$ и SBC имеем:

$$\frac{SC}{SD} = \frac{BC}{AD} \quad \frac{a+5x}{a} = 4 \quad a = \frac{5}{3}x$$

$$\sin \angle KSO = \frac{AD}{SD} = \frac{x}{\frac{5}{3}x} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\angle KSO = \arcsin 0,6.$$

Отношение площадей сечений плоскостями
 KLM и $\angle$ равно квадрату отношения
 $\frac{KS}{SD}$. $KS = KD + DS = x + \frac{5}{3}x = \frac{8}{3}x$.

$$\frac{S_{KLM}}{S_{\angle}} = \left(\frac{KS}{SD} \right)^2 = \left(\frac{\frac{8}{3}x}{\frac{5}{3}x} \right)^2 = 1,6^2 \Rightarrow S_{KLM} = S_{\angle} \cdot 1,6^2 =$$

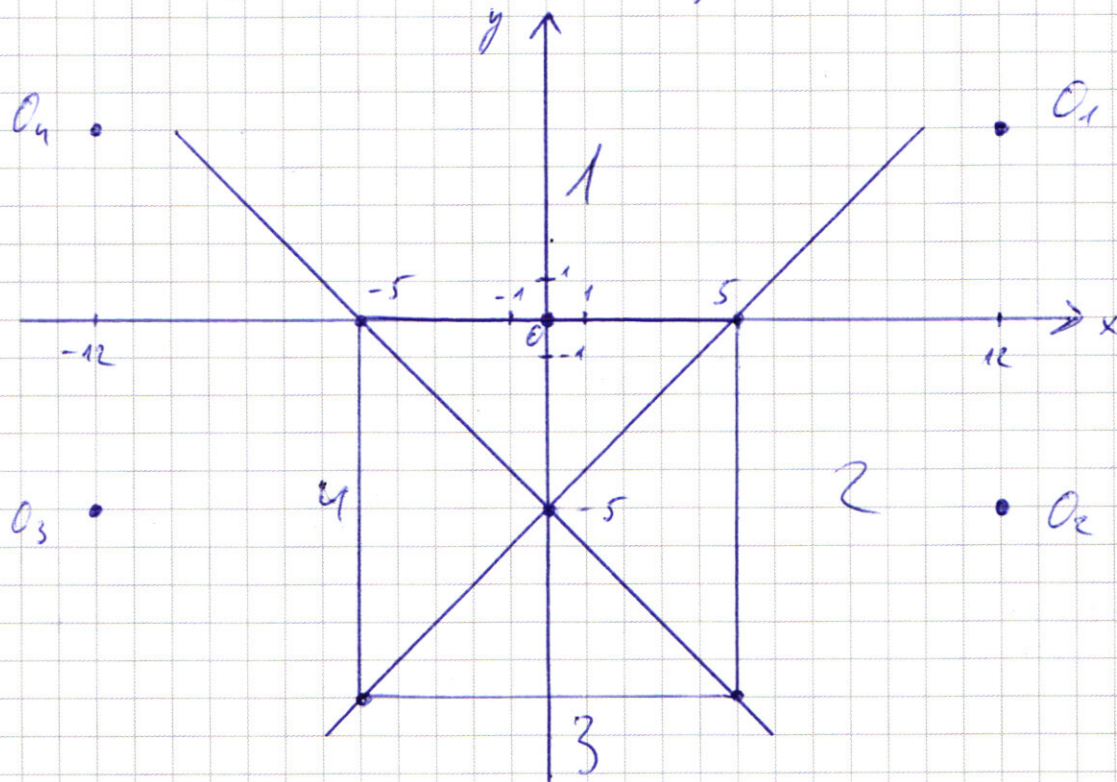
$$= 1 \cdot 1,6^2 = 2,56$$

Ответ: $\angle KSO = \arcsin 0,6$; $S_{KLM} = 2,56$.

~5

$$|y - (-x - 5)| + |y - (x - 5)| = 10$$

На координатной плоскости построим
прямые $y = -x - 5$ и $y = x - 5$:



Эти прямые делят плоскость на 4 области,
в которых модуль раскрывается одно-
значно:

$$1) y + x + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$y = 0$$

$$2) y + x + 5 - y + x - 5 = 10$$

$$x = 5$$

$$3) -y - x - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$y = -10$$

$$4) -y - x - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$x = -5$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

График первого уравнения - квадрат с вершинами $(5; 0)$, $(5; -10)$, $(-5; 0)$ и $(-5; -10)$.

График второго уравнения - это график $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$, построенный при $x \geq 0$ и $y \geq 0$, затем отражённый относительно осей Ox и Oy . В каждой координатной четверти получится окружность (или её часть, ограниченная осями) с центром в точках $(12; 5)$, $(12; -5)$, $(-12; 5)$, $(-12; -5)$ и радиусом $\sqrt{a}$. По графику видно, как зависит от a количество решений системы:

$a < 49$ решений нет

$a = 49$ 2 решения: $(5; -5)$ и $(-5; -5)$

$49 < a < 169$ 4 решения

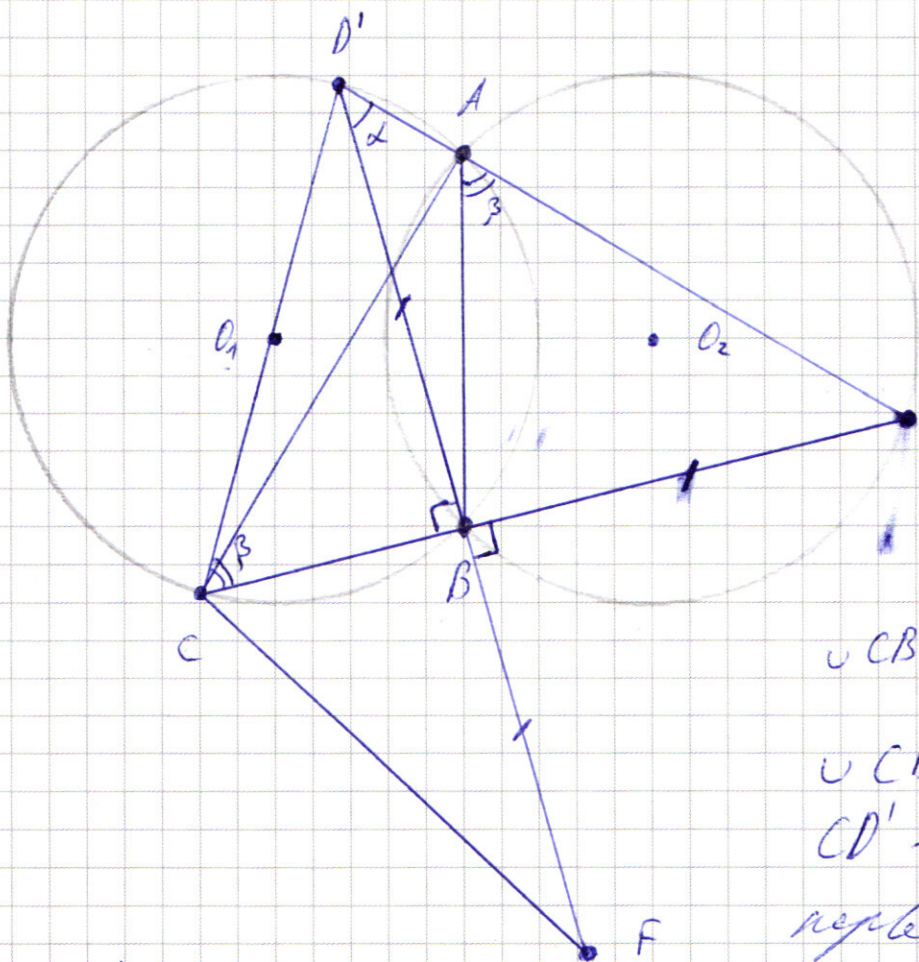
$a = 169$ 2 решения: $(0; 0)$ и $(0; -10)$

$a > 169$ решений нет.

Ответ: $a = 49$ и $a = 169$.

~ 6.

Повернём вторую окружность вокруг точки B так, чтобы она совпала с первой. При этом согласно известной лемме точка D



перейдем в D' ,
иными D', A
и D на одной
прямой.

Так как $\angle CAD = 90^\circ$,

то $\angle CB + \angle BD = 180^\circ$

Так как $\angle BD =$

$= \angle BD'$, то

$\angle CB + \angle BD' = 180^\circ$

или

$\angle CBD' = 180^\circ$, значит

CD' - диаметр

первой окружности.

$\angle CBD' = 90^\circ$, точки D', B и F на одной прямой
 $\perp CD$, ~~иными~~ иными $BF = BD = BD'$, отсюда
 $\triangle CBD' = \triangle CBF$ и $CF = CD = 10 \cdot 2 = 20$

Ответ: а) $CF = 20$.

б) Пусть $\angle D'CB = \beta = \angle BAD$, и $\angle BD'A = \alpha$.

Тогда $CD' \sin \beta \cdot \tan \alpha : \sin \beta = CD' \tan \alpha$ равен
диаметру второй окружности, то есть
 CD' . $CD' \tan \alpha = CD'$ ($CD' \sin \beta \tan \alpha = BD$).

$\tan \alpha = 1$ или $\alpha = 45^\circ$ ($\angle D'CA = \beta - \alpha$)

$S_{ACE} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \cdot \sin \angle ACF = \frac{1}{2} \cdot (20 \cdot \cos(\beta - \alpha))$

$\cdot 20 \cdot \sin(\alpha + \beta) = 196$ (здесь $\cos \beta = \sin(90 - \beta) =$
 $= \sin \angle CD'B = \frac{CB}{CD'} = \frac{12}{20} = 0,6$

и $\sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = 0,8$
($\sin \alpha = \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$).

Ответ: б) $S_{ACE} = 196$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~3 задачи.

1) $x=y$

$$\cancel{x^2} - \cancel{x^2} - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x-2) = 0$$

$$\cancel{x=0} \quad x=2$$

$$(2, 2)$$

2) $y=x^2$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0 \quad (x \neq 0)$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 - 6x + 8 \\ x^3 - 2x^2 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 - 6x \\ x^2 - 2x \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -4x + 8 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x-2 \\ \hline x^2+x-4 \end{array}$$

$$(x-2)(x^2+x-4) = 0$$

$$x=2$$

$$y=4$$

$$x = \frac{\sqrt{17} - 1}{2}$$

$$y = \frac{18 - 2\sqrt{17}}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$(2, 4)$$

$$\left(\frac{\sqrt{17} - 1}{2} ; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right)$$

~4

$K=4$

2) $KLM \parallel \angle \parallel \beta$

$$K' = \frac{\frac{5}{3}x + x}{\frac{5}{3}x} = \frac{8}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1,6$$

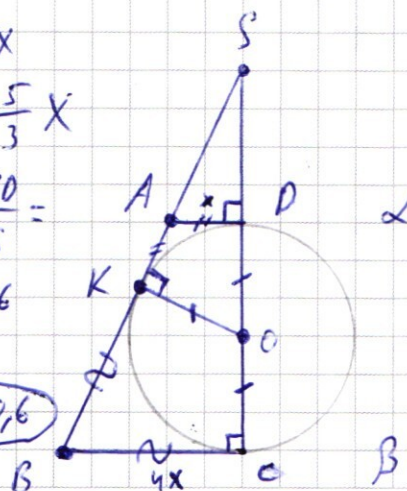
1) $AB = 5x$

$$SA = \frac{AB}{3} = \frac{5}{3}x$$

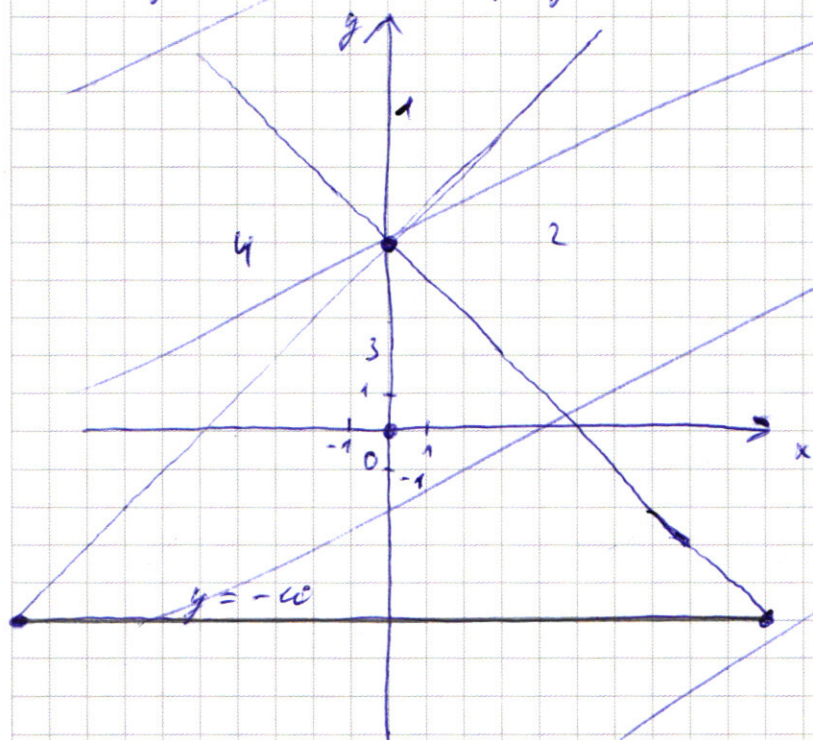
$$\sin \angle KSO = \frac{AO}{AS} =$$

$$= \frac{x}{\frac{5}{3}x} = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\angle KSO = \arcsin 0,6$$



$$|y + x + 5| + |y - x + 5| = 10$$



$$1) 2y + 10 = 10$$

$$y = 0$$

нет решений

$$2) -y - x + 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

нет решений

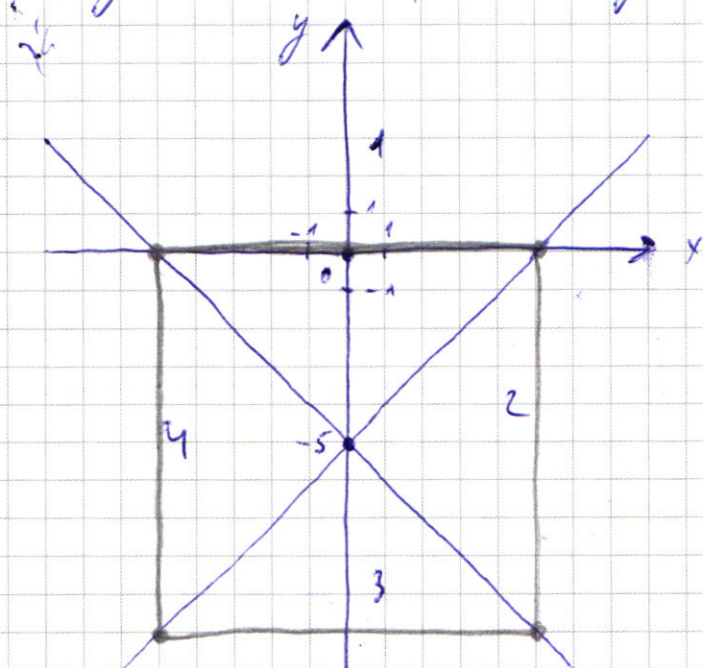
$$3) -2y - 10 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

$$|y - (-x - 5)| + |y - (x - 5)| = 10$$

5



$$1) 2y + 10 = 10$$

$$y = 0$$

$$2) y + x + 5 = y + x - 5 = 10$$

$$2x = 10$$

$$x = 5$$

$$3) -y = x - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y - 10 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

$$4) y - x - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

$$a = 49$$

$$a = 5^2 + 12^2 = 169$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6

$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{7}{5} = \frac{7\sqrt{2}}{10}$

a) $CF = CD' = 2r = 20$

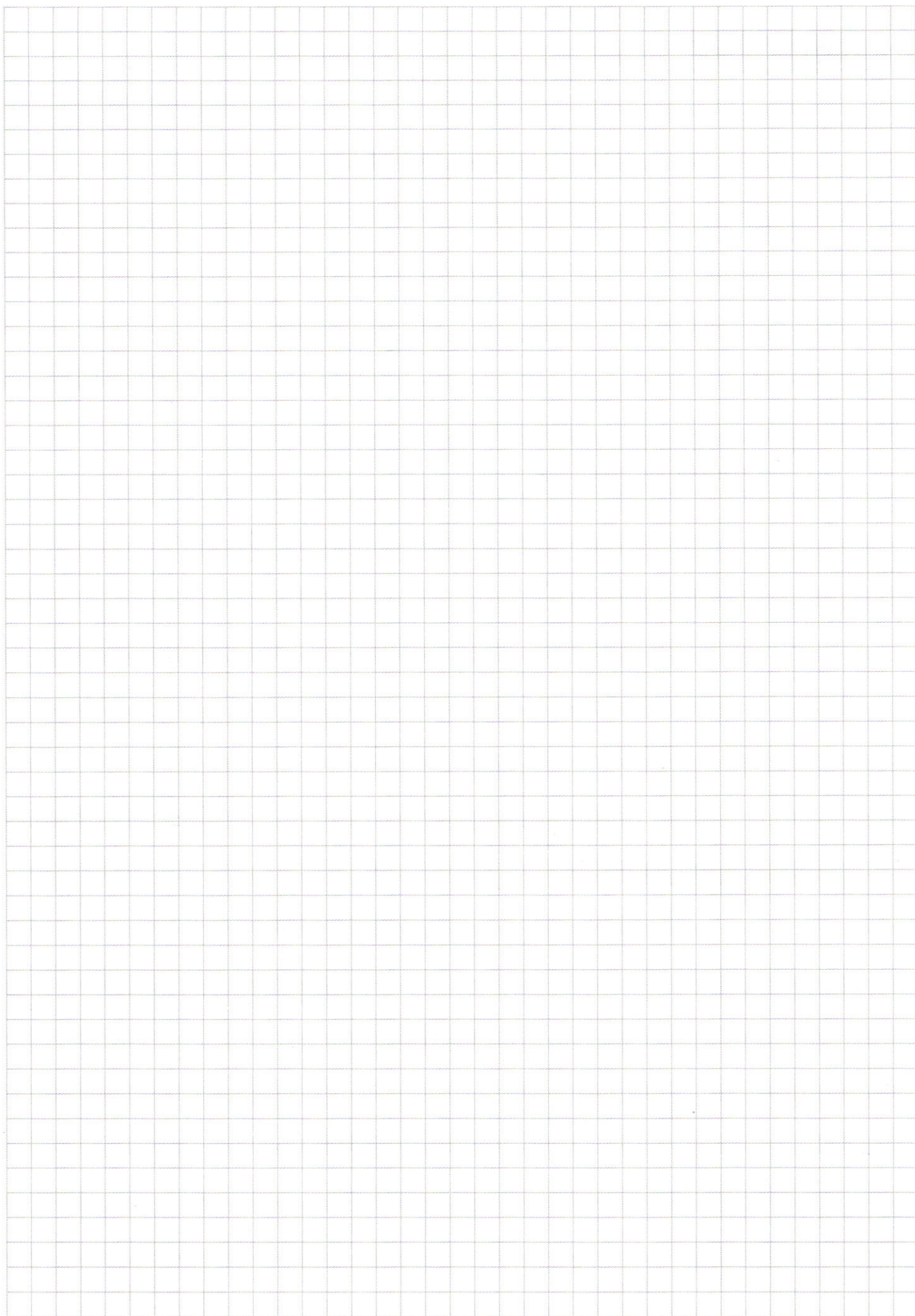
$\sin \beta = 0,8$
 $\cos \beta = 0,6$

$\frac{20 \sin \beta \cdot \tan \alpha}{\sin \beta} = 20$

$\tan \alpha = 1$
 $\alpha = 45^\circ$

$AC = 20 \cos(\beta - \alpha)$

$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin(\alpha + \beta) =$
 $= 10 \cos(\beta - \alpha) \cdot 20 \cdot \sin(\alpha + \beta) =$
 $= 200 \cdot (\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha) (\sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha) =$
 $= 200 \left(0,6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 0,6 + 0,8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \right) =$
 $= 200 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 1,4 \right)^2 = 200 \cdot \frac{49 \cdot 2}{100} = 196$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

✓1

$$\begin{array}{ccc|c} 9 & 2 & 6 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 9 \\ 3 & 4 & 3 & 7 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 1 & & & \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{cccccc} 7 & 7 & 7 & 9 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 & 3 & 3 & 3 & 1 & 1 \end{array}$$

$$C_8^3 (5 \cdot 4 + C_5^3) =$$

$$= \frac{8!}{5! \cdot 3!} (20 + 10) = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} \cdot 30 = 1680$$

✓2

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x) = 0$$

$$1) \sin 7x - \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x \right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 0$$

$$2 \sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\sin \left(\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$\frac{5x}{2} - \frac{\pi}{8} = \pi n$$

$$\frac{5x}{2} = \pi n + \frac{\pi}{8}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5}$$

$$1 \cos \left(\frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} \right) = 0$$

$$1 \frac{9x}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$1 \frac{9x}{2} = \frac{3\pi}{8} + \pi n$$

$$1 x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$(\cos 2x \neq 0)$$

~~$$\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x = 0 \quad (\cos x \neq 0)$$~~

~~$$\lg^2 x - 2 \lg x + 1 = 0$$~~

~~$$\lg^2 x + 2 \lg x - 1 = 0$$~~

~~$$\lg x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$~~

$$1 - \lg 2x = 0$$

$$\lg 2x = 1$$

$$2x = \frac{5}{4} + \sqrt{4}$$

$$x = \frac{5}{8} + \frac{\sqrt{4}}{2}$$

3

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln(y/x^2) + \ln x^4}$$

$$x^{-2 \ln x} = y^{\ln(y/x^3)}$$

$$-2 \ln x \ln x = \ln \frac{y}{x^3} \ln y$$

$$-2 \ln^2 x = \ln^2 y - 3 \ln y \ln x$$

$$2 \ln^2 x - 3 \ln x \ln y + \ln^2 y = 0 \quad (\ln y \neq 0)$$

$$2 \left(\frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 - 3 \frac{\ln x}{\ln y} + 1 = 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{3 \pm 1}{4}$$

$$t_1 = 1 \quad t_2 = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = 1$$

$$\frac{\ln x}{\ln y} = \frac{1}{2}$$

~~$$\log_y x = \frac{1}{2}$$~~

$$x^2 = y$$

$$x = y$$