МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФІ

Бланк задания должен быть вложен в ра
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \left(x^2y^4\right)^{-\ln x} = y^{\ln\left(y/x^7\right)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM, если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO, равны 1 и 16.

5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10, \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B. На первой окружности выбрана точка C, а на второй – точка D. Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD, а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD, проходящем через точку B, выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF.

   б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF.

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y), удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geqslant 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\left(2^{32} - 1\right)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

© МФТИ, 2020

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

9261 | 9
−9 | 1029 | 3
026 | 9 | 343 | 7
−18 | 12 | 28 | 49
81 | | 63
| | −63

$9261 = 9 \cdot 3 \cdot 343 =$
$= 9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7^2$

$9261 = 3^3 \cdot 7^3$

кол-во делит $(3+1)(3+1) = 16$

чтобы 8-значное число делилось на 9261 в нём

кол цифр 3-зна чисел 8, что ~~кол-во~~ в сём

есть 3 тройки, 3 семерки и 2 еди

$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3! \cdot \cancel{5!}} \cdot \frac{\cancel{5!}}{3! \cdot \cancel{2!}} \cdot \frac{\cancel{2!}}{1! \cdot 1!} = \frac{8! \cdot \cancel{2!}}{2! \cdot 3! \cdot 3!}$

$C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3$

$C_8^2 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = \frac{8!}{6! \cdot 2!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x - \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2\sin\frac{9x-5x}{2}\cdot\sin\frac{9x+5x}{2} = -2\sin 2x\sin 7x$$

$$\sin 9x - \sin 5x = 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 2\sin 7x\cos 2x$$

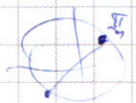
$$2\sin 7x\cos 2x - 2\sin 7x\sin 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$\cos 2x = \sin 2x$

$\Rightarrow \sin x\cos x \neq 0$



$tg\,2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k\in\mathbb{Z}$

$$\sqrt{2}\sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\sqrt{2}\sin 7x - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$2\sin\frac{7x - (2x + \frac{\pi}{4})}{2}\cos\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\sin\frac{5x - \frac{\pi}{4}}{2} = 0 \qquad \cos\frac{9x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$$

$$\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi k \qquad \frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$x = \frac{2}{40}\pi + \frac{2}{5}\pi k, k\in\mathbb{Z} \qquad \frac{9}{2}x =$$

№3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 4y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - y(x+4)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a \end{cases}$$

$a \to ?$

2 реш.

$y \le 0$

$$\begin{cases} |t-x| = 10 \\ (|x|-12)^2 + t^2 = a \end{cases}$$

$2\ln x = \log_2(2^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2})$

$2\ln x = \log_2 2^{\ln 2} + \log_2 x^{\ln 2}$

$2\ln x = \ln 2 \cdot 1 + \log_2 x^{\ln 2}$

$2\ln x = \ln 2(1 + \log_2 x)$

$2x^2 - 8x + xy - y^2 + 4y = 0$

$2x^2 + x(y-8) - y^2 + 4y = 0$

$D = y^2 - 16y + 64 + 8y^2 - 32y = 9y^2 - 48y + 64 = (3y-8)^2$

$x = \frac{8-y+3y-8}{4} = \frac{y}{2}$ $\quad x = \frac{8-y-3y+8}{4} = -y+4$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^7}\right)} = y^{\ln y - \ln x^7}$

$(x^2y^4)^{\ln x} = y^{7\ln x - \ln y}$

$x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}$ $\quad y = 2x$

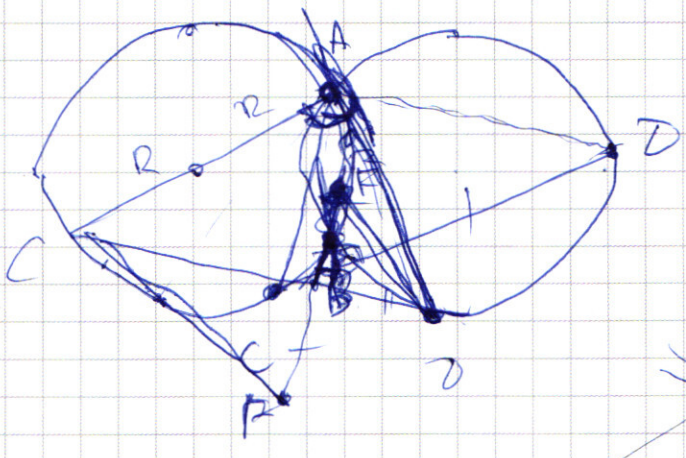
$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ln x} = (2x)^{-\ln 2}$

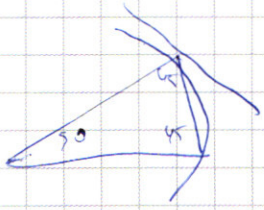
$2^{2\ln x} = (2x)^{\ln 2}$

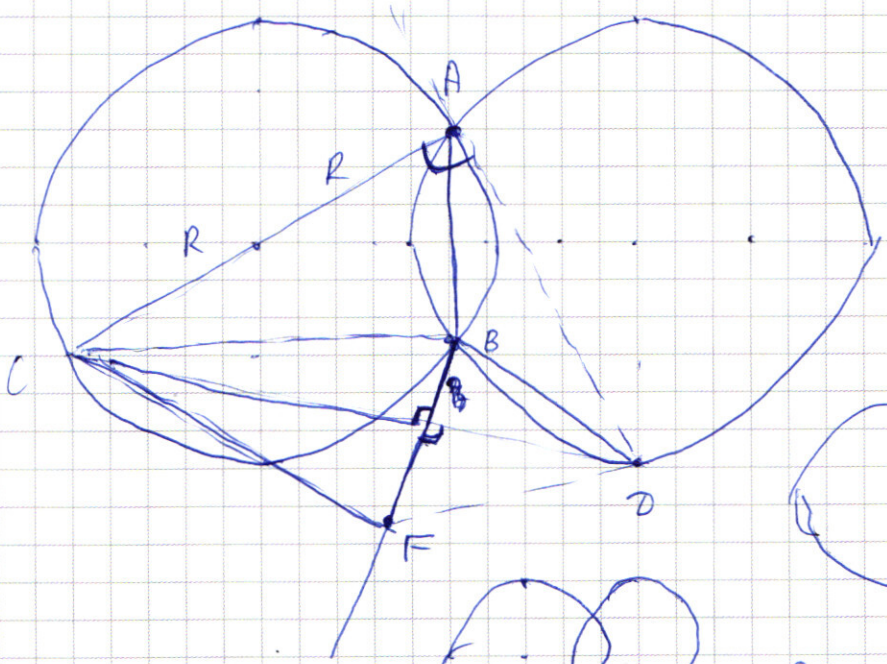
$x^{2\ln x} = (2x)^{3\ln x - \ln 2 x}$

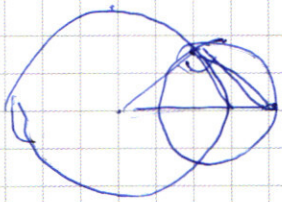
$x^{2\ln x} = (2x)^{3\ln x - \ln 2 - \ln x}$

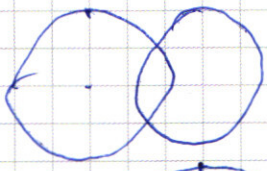
$x^{2\ln x} = (2x)^{2\ln x} \cdot (2x)^{-\ln 2}$

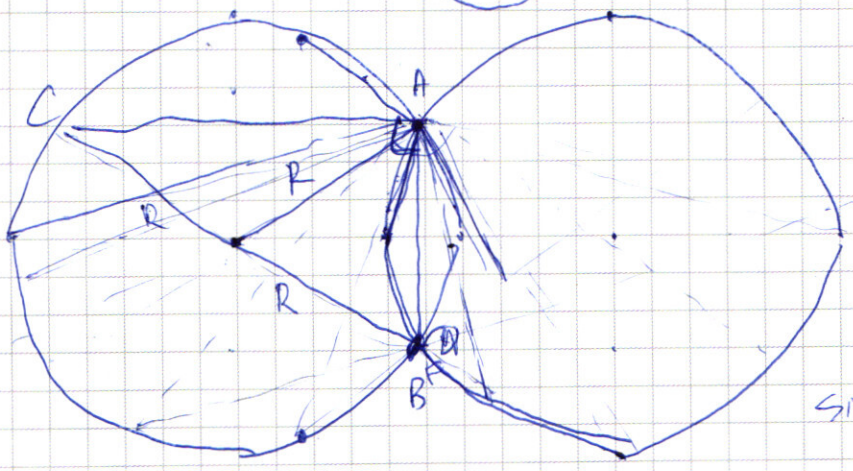












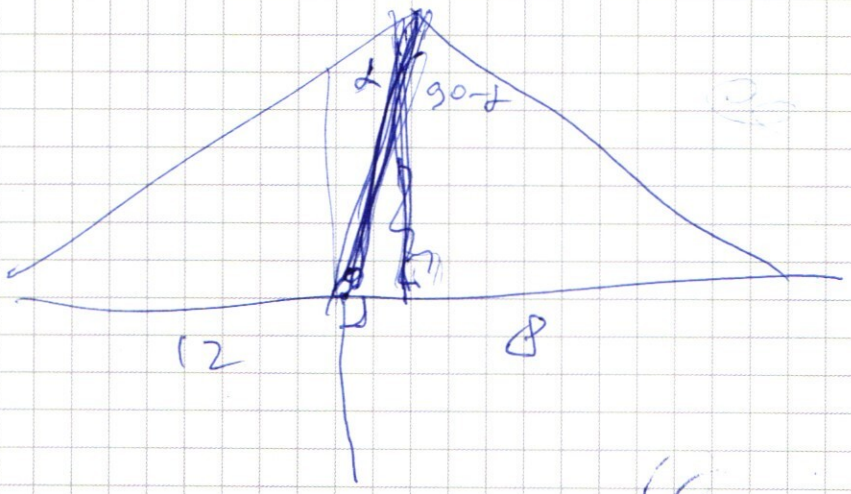
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6

$\angle CAD = 90°$

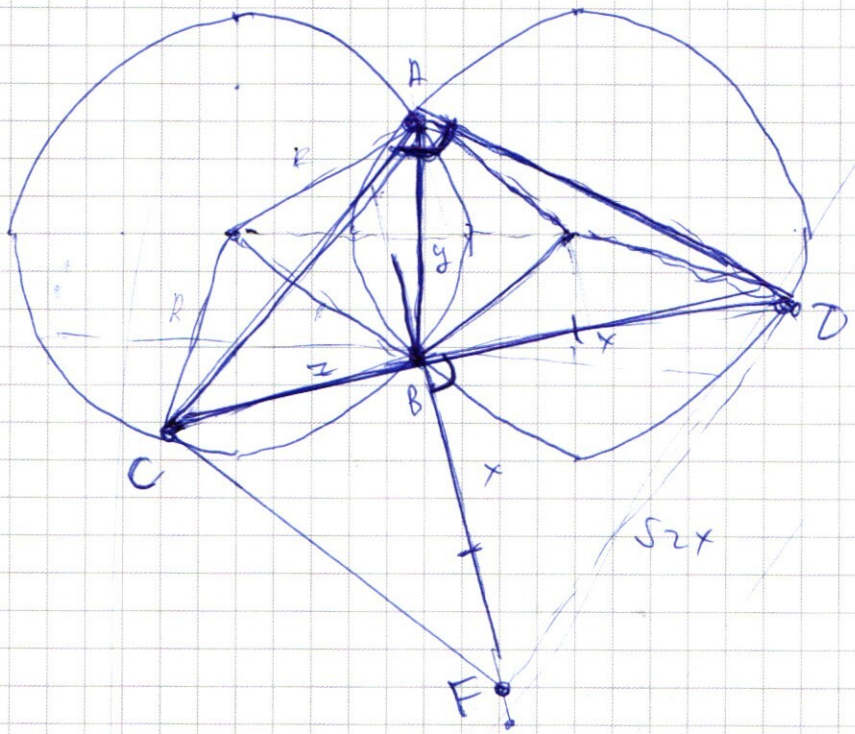
$BF = BD$

$R = 10$

а) $CF = ?$

б) $BC = 12$

$S_{ACF} = ?$

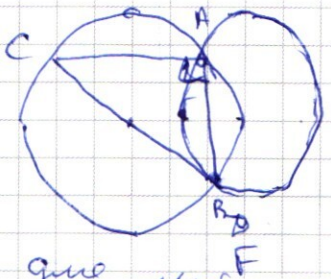


1) Частный случай: B совпадает с D

из этого $F = B = D$ $\Rightarrow$ $O \in CB \Rightarrow$

$\Rightarrow CB = 2R = 20 =$

$= CF$



нужно доказать, что $CF = 2R$

для любого случая чудесно

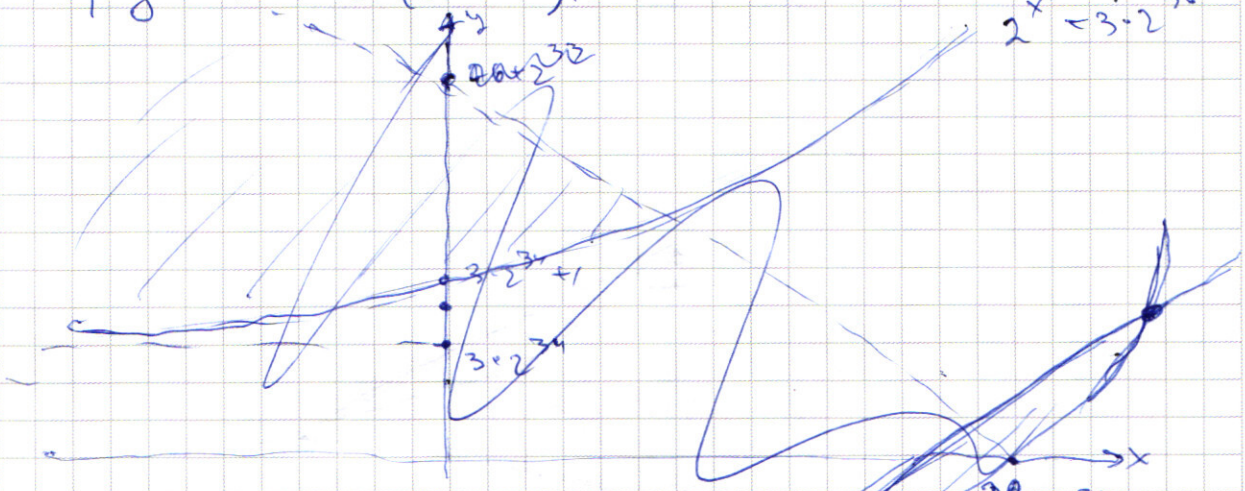
2) $BF = x = BD$ $AB = y$ $CB = z$, тогда $CF = \sqrt{x^2 + z^2}$

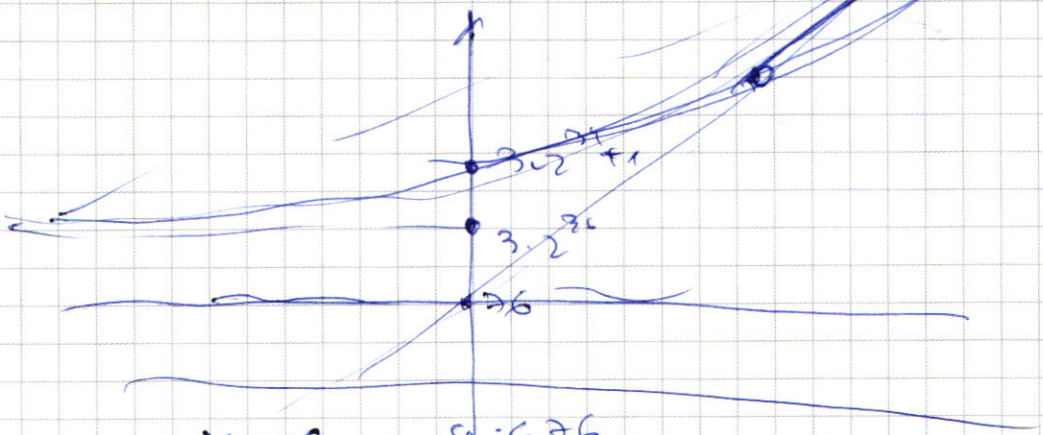
$FD = S_{2x}$

3) $\frac{S_{ACB}}{S_{BAD}} = \frac{z}{x}$ $\cancel{\frac{S_{ACB}}{S_{BCF}} = \frac{y}{z}}$ $\frac{S_{BCF}}{S_{FD}} = \frac{z}{x}$

№ 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2\cdot(2^{32}-1)x \end{cases}$$





$x = 0 \qquad y < 76$

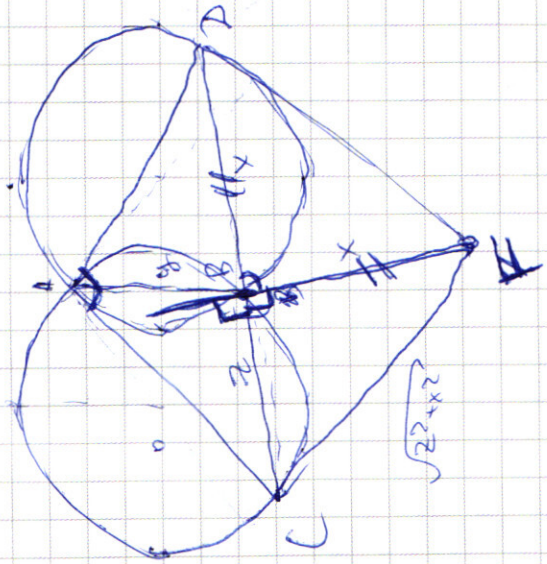
$$76 + 2x\cdot 2^{32} - 2x > 0$$

$$2x(2^{32}-1) = -76$$

$$x = -\frac{38}{2^{32}-1}$$

$$\frac{S_{ACB}}{S_{ABD}} = \frac{AC}{BD}$$

$$\frac{S_{ACB}}{S_{ABD}} = \frac{AC}{BD}$$



S_{ACB}

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} (x^2y^7)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} \\ y = -x+4 \quad y = 2x \end{cases}$

$y < 76 + 2^{33} - 2x$

$-2x + 76 + 2^{33}$

$76 + 2^{32}$

$x^{\ln x} = t$

$\cancel{\ln x = \log_x t}$

$\cancel{(x^2 \cdot 16x^4)^{-\ln x} = (2x)^{\ln\left(\frac{2}{x^6}\right)}}$

$\cancel{(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln 2 - 6\ln x}}$

$x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x} = y^{7\ln x - \ln y}$

$x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}$

$x = 5 \quad x^{2\ln x} = y^{\ln x - \ln y} \cdot y^{2\ln x}$

$x^{2\ln x} = y^{\ln\frac{x}{y}} \cdot y^{2\ln x}$

$|x+5| + (5-x) = 10$

$|y+10| + |y| = 10$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = y^{\ln\frac{x}{y}}$

$y < 0$

$5 - y - 10 - y = 10$

$-2y = 20$

$y = 10$

$\cancel{\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\ln\frac{x}{y}}}$

$x^{\ln\frac{x}{y}}$

$x > 0$

$y + 5 = 10$

$y = 5$

$x^{2\ln x} = y^{\ln\frac{x}{y}} \cdot y^{2\ln x}$

$x + x = t$

$t = 5$

$x = 0$

$\cancel{2|x+5| = 5}$

$y + 5 = t$

$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$(t+x) + (t-x) = 10$

$\cancel{x^2 - 2x|x| + 144 + |y|^2}$

$t = 0 \quad x = 5$

$\left|\frac{3}{2} + x\right| + \left|\frac{3}{2} + x\right|$

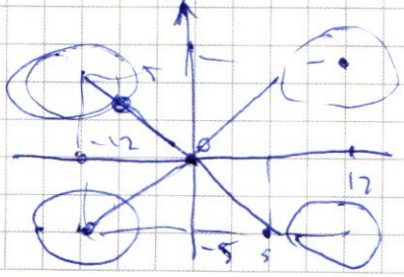
$\cancel{t = 2x}$

$x + y = 0$

$y - x = 0$

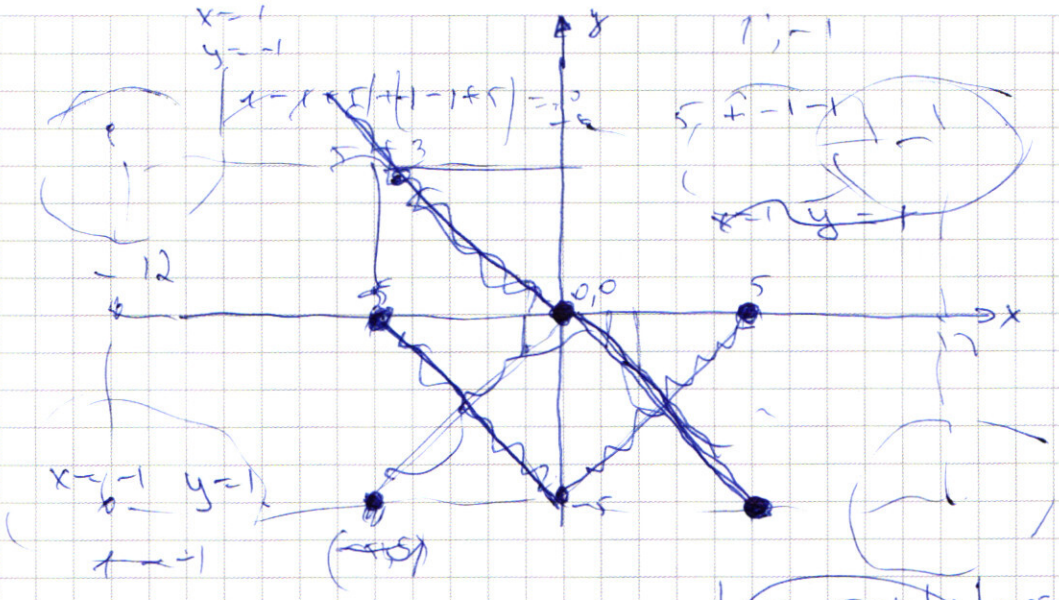
$x + y + y - x = 0$

$y = 0$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



$x=0 \quad y=0$

$y=-5 \quad x=5$

$x=-5 \quad y=0$

$x=5 \quad y=0$

$y-x+5 \le 0$

$y+5 \le x$

$|x+y+5|+|y-x+5|=10$

$x \ge -y-5$

$y+5=t \quad |t+x|+|t-x|=10$

$x+y+5+y-x+5=10$

$2y+10$

$-10 \le t+x \le 10 \quad -10 \le t-x \le 10$

$x=-5$

$y=0$

$|x+5|-|5-x|=$

$-15 \le x+y \le 5 \quad -15 \le y-x \le 5$

$|y|+|y+10|=10$

$x=6$

$y=x+5$

$t=0 \quad y=-5 \quad x=5;-1$

$|y-1|+|y+11|=10$

$y-x=+10$

$y+x=0$

$x=0$

$y=-5$

$(1+y)+(y-5)=10$

$y \le 2$

$x=-1$

$|x|+|-x|=10$

$2|x|=$

$x>0$

$x+x=10$

$x<0 \quad -x+x=10$

$x=5$

$|y+4|+|y+6|=10$

$y=-5$ 1) $-x-5$

2) $x-5$

$y=-4 \quad y>-4$

$y+4+y+6=10$

$x+y+y-x=0$

$2y=0$

$|t+x|+|t-x|=10$

$5 \ge x \ge 0$ 1) $t \ge x \quad t \ge -x$

2) $t \ge -x$ 2) $t \ge x \quad t \ge -x$

3) $t \le x \quad t \le -x$

4) $t \le x \quad t \ge -x$

$t+x+t-x=10 \quad 2t=10$

$t=5$

$-t-x+t-x=10 \quad x=-5$

$-t-x+t+x=10 \quad t=-5$

$t+x-t+x=10$

$x=5$

$y+5 \le x \quad y+5 \le -x$

$y+5 \le x$

$-x-x=0$

$|x+y+5|=$

$x+y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$ $x>0 \Rightarrow y>0$

$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln|y| - \ln|x^2|} = y^{\ln y - 2\ln x} = y^{\ln y}\cdot y^{-2\ln x}$

$x^{-2\ln x}\cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 2\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 2\ln x + 4\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$

$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}\cdot y^{-2\ln x}$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2\ln x} = y^{\ln\frac{y}{x}}$

$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2\ln x} = y^{-\ln\frac{x}{y}}$

$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$\cancel{y^2 - 4y + 4 - 2x^2 + 8x - xy - 4 = 0}$

$\cancel{(y-2)^2}$

$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$

$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x = 9x^2 - 24x + 16 = (3x-4)^2$

$y_1 = \frac{-x-4+3x-4}{2} = x-4$ $y_2 = \frac{-x-4-3x+4}{2} = -2x$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}$$

$y = 2x$ $\quad$ $y = -x+4$

$$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$x^{2\ln x} = y^{3\ln x - \ln y}$$

$$x^{2\ln x} = y^{2\ln x} \cdot y^{\ln \frac{x}{y}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x}{y}}$$

$\frac{x}{y} = t$

$x = ty$

$y = \frac{x}{t}$

$\cancel{t^{2\ln x} = y^{\ln t}}$

$\cancel{t^{2\ln x} = \frac{x^{\ln t}}{t^{\ln t}}}$

$y^{\ln y}$

$\ln_e y = t$

$e^t = y$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x}{y}}$$

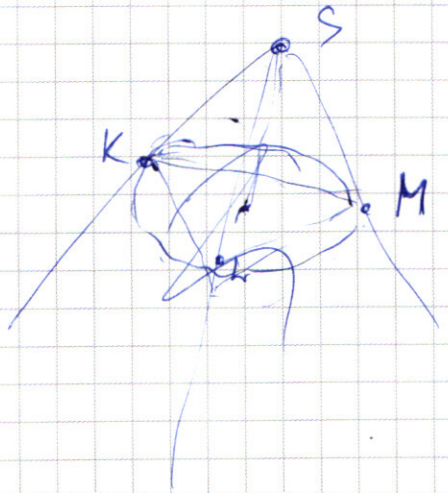
$\log_a b = t$

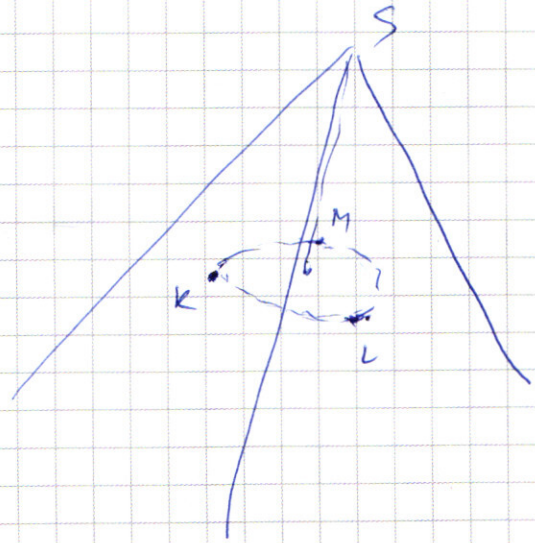
$a^t = b$

$$2\ln x = \log_{\frac{x}{y}} y^{\ln \frac{x}{y}}$$

$\log_t y^{\ln t}$

$\alpha = 4$





☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Можно заметить, что в 8-значном числе участвует 8 цифр значит 6 цифр у нас точно определены из разложения на простые множители и два оставшихся числа это единицы

3 тройки 3 семёрки 2 единицы

Способов выбрать 3 из 8 для троек C_8^3

3 из 5 для семерок C_5^3

2 из 2 для единиц C_2^2

$$C_8^3 \cdot C_5^3 \cdot C_2^2 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{2!}{2! \cdot 0!} = \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2} \cdot 5 \cdot \cancel{6} \cdot 7 \cdot 8}{\cancel{2} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2}} = 2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8 = 56 \cdot 10 = 560$$

Ответ: 560 чисел

Задача 2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2}\cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\begin{cases} \cos 9x - \cos 5x = -2\sin\frac{9x-5x}{2}\sin\frac{9x+5x}{2} = -2\sin 2x \sin 7x \\ \sin 9x + \sin 5x = 2\sin\frac{9x+5x}{2}\cos\frac{9x-5x}{2} = 2\sin 7x \cos 2x \\ \cos 4x = \cos^2 2x - \sin^2 2x \end{cases}$$

$$-2\sin 2x \sin 7x + 2\sin 7x \cos 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos 2x - \sin 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$\cos 2x - \sin 2x = 0 \quad | \cos 2x \neq 0$

$tg\, 2x = 1$

$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}}$

$2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\sqrt{2}\sin 7x - (\cos 2x + \sin 2x) = 0$

$\left| \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \right|$

$\sqrt{2}\sin 7x - \sqrt{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$\sin 7x - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$

$2\sin\frac{7x - 2x - \frac{\pi}{4}}{2}\cos\frac{7x + 2x + \frac{\pi}{4}}{2} = 0$

$\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\sin\left(\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{5}{2}x - \frac{\pi}{8} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$x - \frac{\pi}{20} = \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}}$

$\cos\left(\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8}\right) = 0$

$\frac{9}{2}x + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$

$9x + \frac{\pi}{4} = \pi + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$\boxed{x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, m \in \mathbb{Z}}$

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2}k, k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{12} + \frac{2}{9}\pi m, m \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{20} + \frac{2}{5}\pi n, n \in \mathbb{Z}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$$\begin{cases} (x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln\left(\frac{y}{x^2}\right)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрю 1 ур-ние ~~на~~ ~~ОДЗ~~ ОДЗ для $\ln x$ $x>0$

для $\ln\frac{y}{x^2}$ $y>0$

$$(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$\cancel{x^{+2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}}$$

$$\cancel{x^{-2\ln x} = y^{\ln y - \ln x} \cdot y^{-2\ln x}}$$

$$\cancel{\left(\frac{x}{y}\right)^{-2\ln x} = y^{-\ln\frac{x}{y}}} \qquad \cancel{\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = y^{\ln\frac{x}{y}}}$$

Рассмотрю 2 ур-ние $y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$D = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32x =$$

$$= 9x^2 - 24x + 16 = (3x - 4)^2$$

$$y_1 = \frac{x+4-3x+4}{2} = -x+4 \qquad y_2 = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x$$

$$(y - (-x+4))\ (y - 2x) = 0$$

$$(y + x - 4)\ (y - 2x) = 0$$

1) ~~$y-2x=0$~~ $y = 2x$ 2) $y = -x+4$

$\cancel{y=2x}$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = y^{\ln\frac{x}{y}}$$

$$\left(\frac{x}{2x}\right)^{2\ln x} = (2x)^{\ln\frac{x}{2x}}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\ln x} = 2^{\ln\frac{1}{2}} \cdot x^{\ln\frac{1}{2}}$$

$$\left(2^{-1}\right)^{2\ln x} = 2^{\ln 2^{-1}} \cdot x^{\ln 2^{-1}}$$

$$2^{-2\ln x} = 2^{-2\ln 2} \cdot x^{-2\ln x}$$

$$\cancel{\left(\frac{x}{2}\right)^{-2\ln x} = 2^{-2\ln 2} = 2^{2\ln 2}}$$

$$2^{2\ln x} = 2^{2\ln 2} \cdot x^{2\ln x}$$

$$\cancel{\left(\frac{2}{x}\right)^{2\ln x} = 2^{2\ln 2}}$$

$$\cancel{\left(\left(\frac{2}{x}\right)^{\ln x} - 2^{\ln 2}\right)\left(\left(\frac{2}{x}\right)^{\ln x} + 2^{\ln 2}\right) = 0}$$

$$\cancel{2^{2\ln x} = 2^{2\ln 2} \cdot (x^{\ln x})^2 = 2^{2\ln 2}}$$

$$\cancel{\left(\frac{2}{x}\right)^{2\ln x} = 2^{2\ln 2}}$$

$$\cancel{(x^2y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}}$$

$$x^{2\ln x} = y^{\ln 3x - \ln y}$$

$$\cancel{x^{2\ln x} = y^{\ln 3x - \ln 2x} = y^{\ln 2}}$$

$$\cancel{x^{2\ln x} = y}$$

$$x^{2\ln x} = y^{\ln 3x - \ln 2x}$$

$$x^{2\ln x} = y^{\ln\frac{3}{2}}$$

$$\cancel{(x^{\ln x})^2 = 2^{\ln\frac{3}{2}} \cdot x^{\ln\frac{3}{2}}}$$

$$\cancel{y = 2x}$$

$$\cancel{\ln\frac{x}{y} = t}$$

$$\cancel{\frac{x}{y} = e^t}$$

$$\cancel{e^{t \cdot 2\ln x} = y^t}$$

$$\cancel{e^{2\ln x} = y}$$

$$\cancel{e^{2(\ln y + \ln e^t)} = y}$$

$$\cancel{e^{2\ln y + 2t} = y}$$

$$\cancel{2\ln y + 2t = \ln y}$$

$$\cancel{\ln y = -2t}$$

$$\cancel{\ln y = -2\ln\frac{x}{y}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим 1 ур-ие

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - 7\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$x^{2\ln x} = y^{2\ln x} \cdot y^{\ln x - \ln y}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = \frac{y^{\ln x}}{y^{\ln y}} = y^{\ln \frac{x}{y}}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{2\ln x} = y^{\ln \frac{x}{y}}$$

$$\ln \frac{x}{y} = t \Rightarrow \frac{x}{y} = e^t$$

$$(e^t)^{2\ln x} = y^t$$

$$(e^{\ln x})^{2t} = y^t$$

$$x^{2t} = y^t \qquad x^t = \left(\frac{y}{x}\right)^t$$

$$\boxed{x^2 = y}$$

т.к. $x, y > 0$

1) $\begin{cases} y = 2x \\ x^2 = y \end{cases}$ $\quad x^2 = 2x \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} y = -x + 4 \\ x^2 = y \end{cases}$ $\quad x^2 = -x + 4 \quad x^2 + x - 4 = 0$

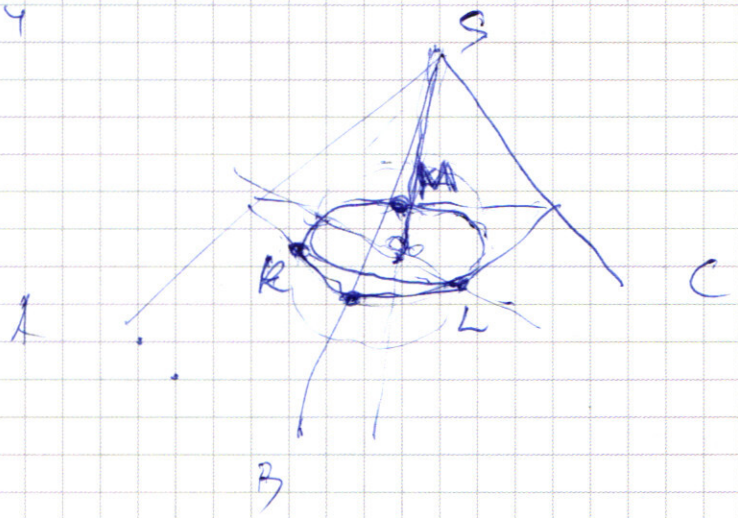
$D = 1 + 16 = 17$

$\begin{cases} x_1 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases} \begin{cases} x_2 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

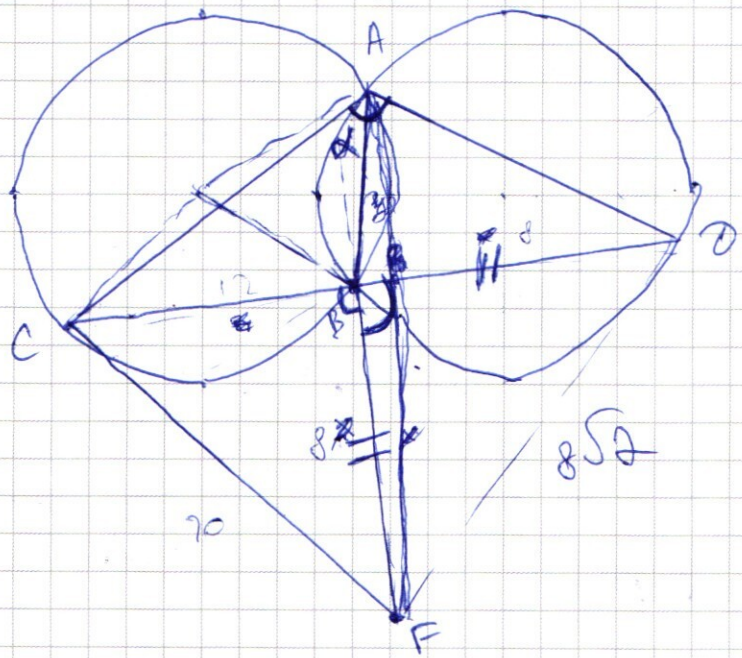
ОДЗ: $x, y > 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases} \begin{cases} x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \\ y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

Ответ: $(2;4)$ и $\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{2}; \frac{9-\sqrt{17}}{2}\right)$

Задача 4



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Задача 6

$\angle CAD = 90^\circ$ $R=10$

$BF = FD$

а) $CF = ?$

$BC = 12$

б) $S_{ACF} = ?$

$\angle CAB = \alpha$

$\angle BAD = \frac{\pi}{2} - \angle CAB$

а)

1) по th sin. $\frac{CB}{\sin\angle CAB} = 2R$ $\frac{BD}{\sin\angle BAD} = 2R = \frac{BD}{\cos\angle CAB}$

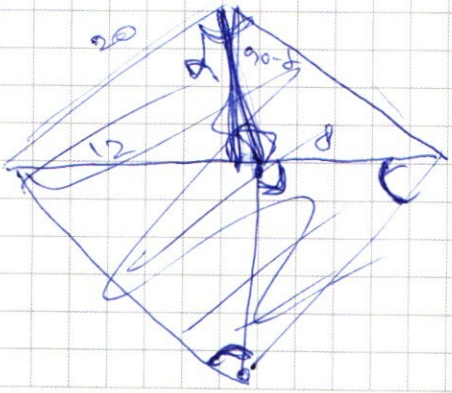
$BF = BD = 2R\cos\angle CAB = 2R\cos\alpha$ $BC = 2R\sin\alpha$

2) $CF = \sqrt{BC^2 + BF^2} = 2R\sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 2R = 20$

б) 3) $BC = 12 = 20\cdot 0\sin\alpha$ $\sin\alpha = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

$BF = 2\cdot 10\cdot\frac{4}{5} = 8 = BD$ $BC = 12$ $CF = 20 \Rightarrow \triangle CFD$ – р/б

4)



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4) из $\triangle FBO \Rightarrow FO = 8\sqrt{2}$ кат пир.

$$\frac{S_{ACB}}{S_{ABO}} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = \frac{AC \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5}}{AO \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{3AC}{4AO}$$

$AC = 2AO$ $\quad$ $AO = x$

$AC = 2x$

$$x^2 + 4x^2 = OC^2 = 400$$

$$5x^2 = 400$$

$$x^2 = 80$$

$$x = 2\sqrt{20} = AO \qquad AC = 2x$$

$$S_{ACF} = \frac{1}{2} AC \cdot CF \sin\angle ACF = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{20} \cdot 20 \cdot \sin\angle ACO$$

$$= 40\sqrt{20} \sin\angle ACF$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 7

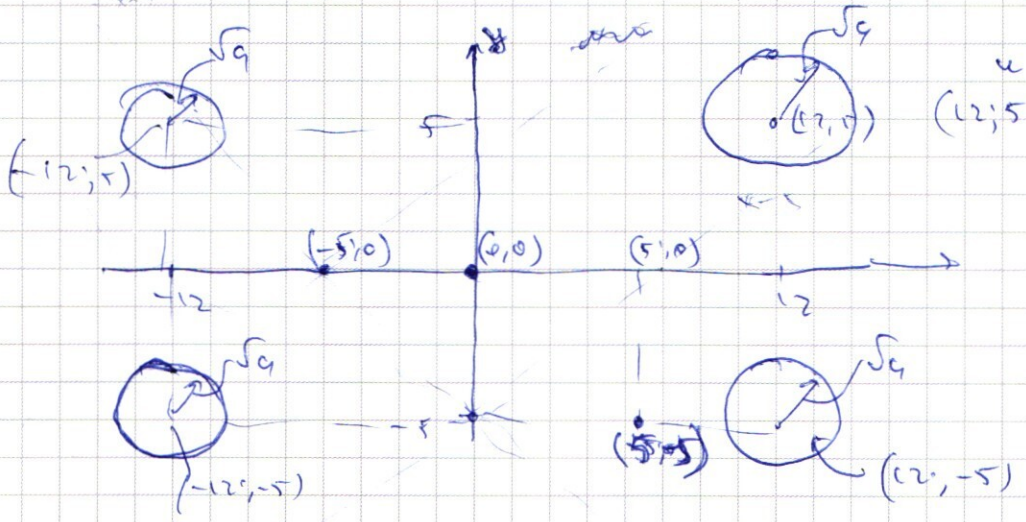
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a = (\sqrt{a})^2 \end{cases}$$

График $(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = (\sqrt{a})^2$ — 4 окружности с радиусом $\sqrt{a}$ и центрами $(12;5)$; $(-12;5)$; $(-12;-5)$; $(12;-5)$



$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

~~$y+5=t$ $|t+x| + |t-x| = 10$~~

~~$-10 \le x+y+5 \le 10$ $-10 \le y-x+5 \le 10$~~

~~$-15 \le x+y \le 5$ $-15 \le y-x \le 5$~~

График составляют 4 точки $(-5;0)$; $(0;0)$; $(5;0)$; $(5;-5)$

В силу симметрии, чтобы было 2 корня это будет корни $(-5;0)$ и $(5;0)$, т.к. эти

$7^2 = a$ $7^2 = a$

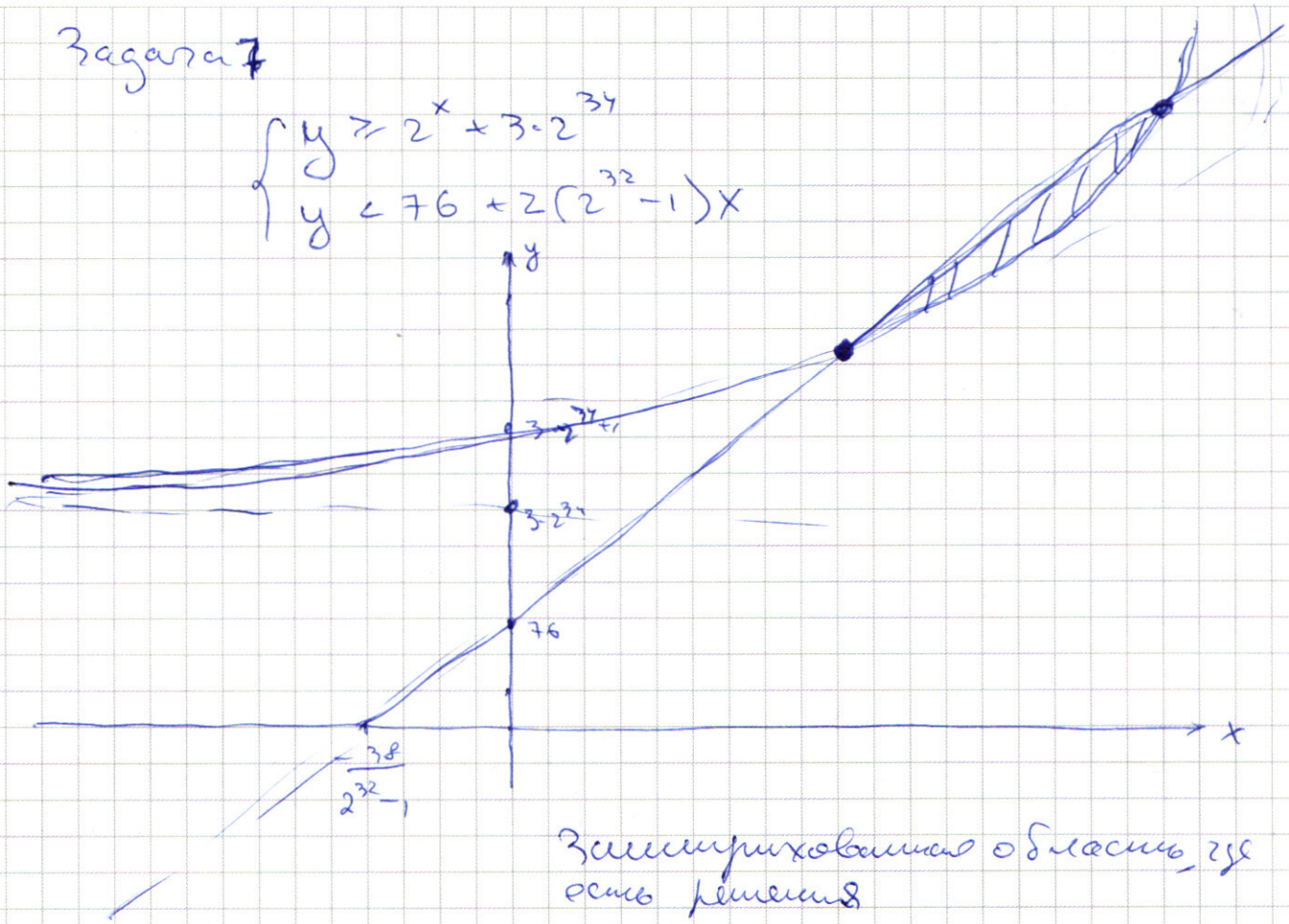
$a = 49$

Ответ: 49

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3\cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32}-1)x \end{cases}$$



Заштрихованная область, где есть решения

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)