

# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МА

### 11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в работу.  
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение  $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$ .
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром  $O$  вписана в трёхгранный угол с вершиной  $S$  и касается его граней в точках  $K, L, M$  (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол  $KSO$  и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью  $KLM$ , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой  $SO$ , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра  $a$ , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках  $A$  и  $B$ . На первой окружности выбрана точка  $C$ , а на второй – точка  $D$ . Оказалось, что точка  $B$  лежит на отрезке  $CD$ , а  $\angle CAD = 90^\circ$ . На перпендикуляре к  $CD$ , проходящем через точку  $B$ , выбрана точка  $F$  так, что  $BF = BD$  (точки  $A$  и  $F$  расположены по разные стороны от прямой  $CD$ ). Найдите длину отрезка  $CF$ .  
б) Пусть дополнительно известно, что  $BC = 12$ . Найдите площадь треугольника  $ACF$ .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел  $(x, y)$ , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.



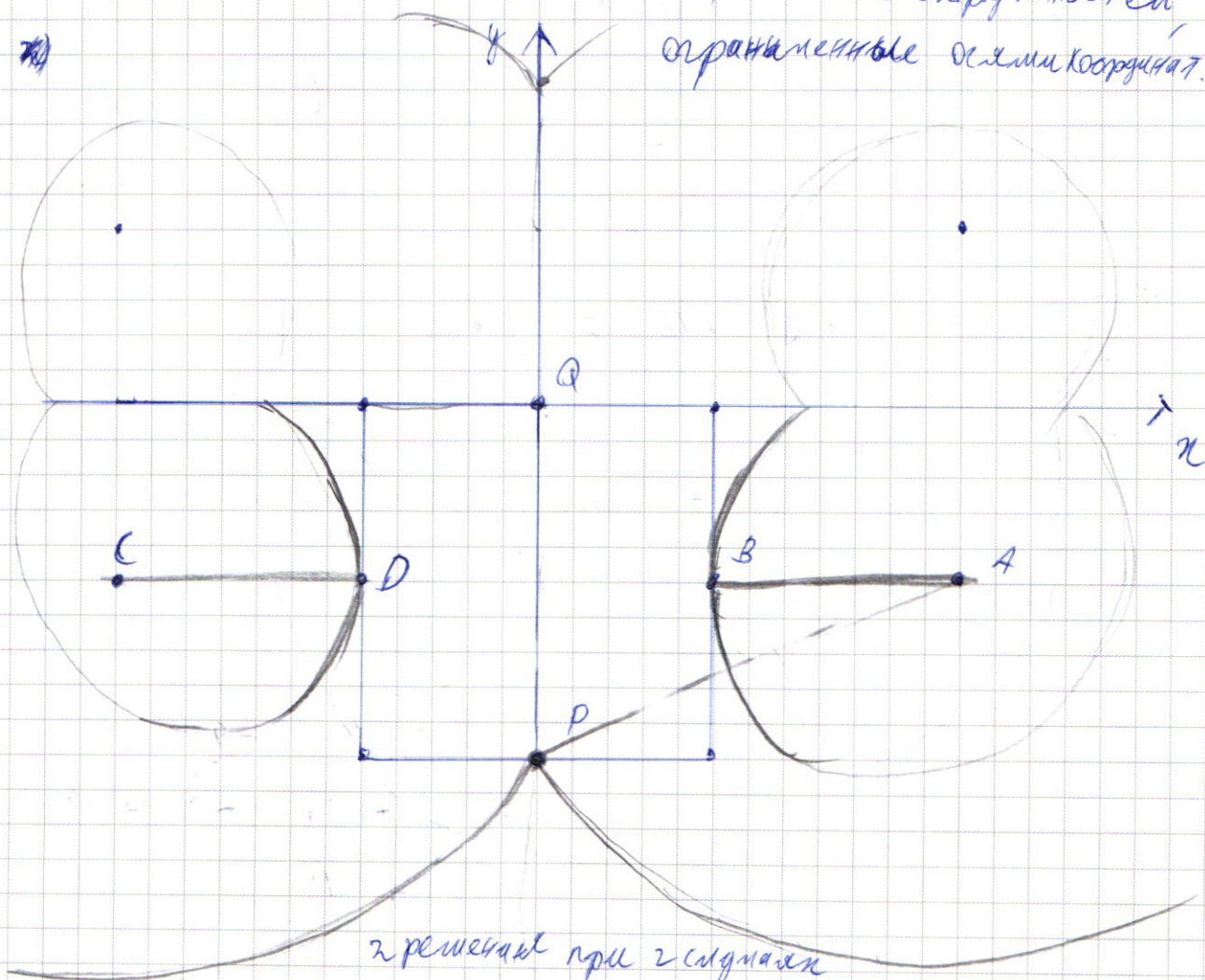
## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|+|y|)^2 + (y-5)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

(1) - квадрат со сторонами, // осям координат ~~и центром~~, равными 10  
и центром в точке  $(0; -5)$  (2) - 4 части окружностей

ограниченные осями координат.



2 решения при 2 случаях

I:  $AB = CD = 7$

нижные касаются квадрата ни одна касается квадрата:  $a = AB^2 = 49$ .

15.

II когда проведут через точки  $P(0; -10)$  и  $Q(0; 0)$ .

$$a = AP^2 = AQ^2 = CP^2 = CQ^2 = 169$$

Ответ:  $a = 49$ ;  $a = 169$

11.

Заметим, что  $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

имеем, что в восьмизначном числе должны быть ~~3 цифры 3, девятка, тройка и одна нуль-единица~~, либо все тоже самое

имеем 2 случая: I.  $3 - "7"$   $\binom{8}{3} \cdot \binom{5}{2} = 56 \cdot 10$   
 $3 - "3"$   
 $2 - "1"$

II  $3 - "7"$   
 $1 - "9"$   
 $1 - "3"$   $\binom{8}{3} \cdot 5 \cdot 4 = 56 \cdot 20$   
 $3 - "1"$

итого имеем  $560 + 1120 = 1680$  способов

Ответ: 1680.

13.

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 2): y^2 - y(4+x) + 8x - 2x^2 &= 0 \\ D = x^2 + 16 + 8x - 32x + 8x^2 &= \\ = (3x + 4)^2 & \end{aligned}$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = 4 - 2x \end{cases}$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^{-2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = x y^{\ln x - 7 \ln x}$$

$$y = 2x$$

$$x^{-2 \ln x} \cdot (2x)^{-4 \ln x} = (2x)^{\ln 2x - 7 \ln x}$$

$$\frac{x^{-2 \ln x} \cdot (2x)^{-4 \ln x}}{(2x)^{2 \ln x}} = \frac{\ln 2x - 7 \ln x}{\ln 2x - 2 \ln x}$$

$$x = (2x)$$

$$(2x)^{2 \ln x} \cdot x^{2 \ln x} = 2x^{\ln 2}$$

$$x^{\ln x} \cdot x^{4 \ln x} = x^{\ln 2} \cdot x^{\ln 2}$$

$$\frac{\ln x^4}{x} = \frac{\ln x^2}{x}$$

$$\begin{array}{r} 4029 \overline{) 3} \\ 9 \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ -12 \phantom{00} \\ \hline 9 \end{array}$$

$$343 \neq$$

$$4261 = 3^3 \cdot 7^3$$

$$\begin{array}{r} 91929495909798 \\ \hline 992 \end{array}$$

$$C_8^3 = \frac{8!}{5!3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{3 \cdot 2} =$$

$$= 7 \cdot 8$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$$

$$= \frac{4 \cdot 5}{1} = 20$$

$$\begin{array}{r} 4261 \overline{) 3} \\ 9 \phantom{00} \\ \underline{26} \phantom{00} \\ -24 \phantom{00} \\ \hline 21 \phantom{00} \\ -21 \phantom{00} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 387 \overline{) 3} \\ 387 \phantom{00} \\ \underline{387} \phantom{00} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 119 \overline{) 3} \\ 48 \phantom{00} \\ \underline{12} \phantom{00} \\ \hline 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4261 \overline{) 9} \\ 9 \phantom{00} \\ \underline{2} \phantom{00} \\ -0 \phantom{00} \\ \hline 26 \phantom{00} \\ -18 \phantom{00} \\ \hline 81 \end{array}$$

$$7 \cdot 8 \cdot 20 +$$

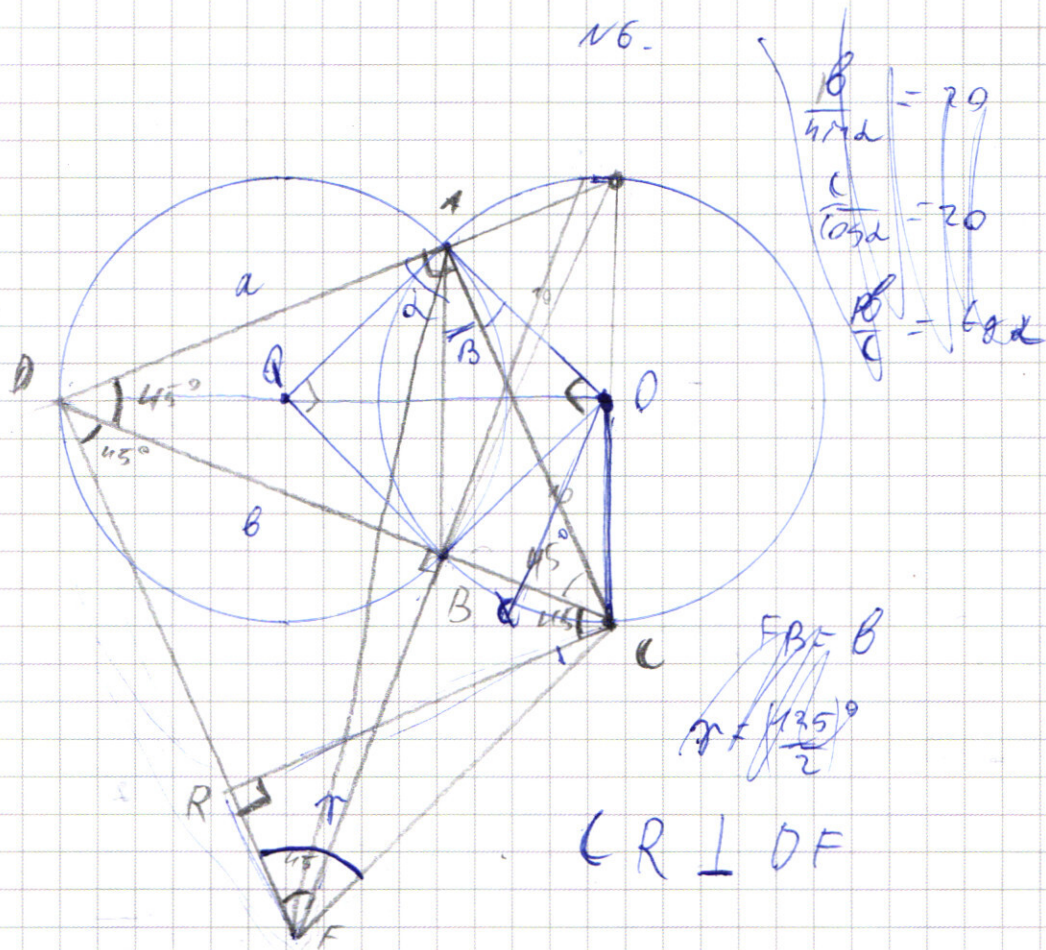
$$+ 7 \cdot 8 \cdot 10 =$$

$$= 7 \cdot 8 \cdot 30 =$$

$$56 \cdot 3 \cdot 10 =$$

$$=$$

$$\begin{array}{r} \times 30 \\ 56 \\ \hline 1680 \end{array}$$



а пусть  $O$  и  $Q$  — центры окружностей. Тогда  $AQBQ$  — ромб.  
 $\angle BQA$ , а значит  $\angle AQB = \angle BOA$ .

$\angle ADB = \frac{1}{2} \angle AQB$ ;  $\angle ACB = \frac{1}{2} \angle AOB$ , как центральный и вписанный, опирающиеся на 1 дугу. Т.к.  $\angle DAC = 90^\circ$  то  $\angle ADC = \angle ACB = 45^\circ$ ;  $AQBO$  — квадрат.

Т.к.  $DB = BF$ , а  $\angle DBF = 90^\circ$ ; то  $\angle BDC = \angle PFB = 45^\circ$

пусть  $AD = a$ ;  $DB = b$ ; тогда  $DF = \sqrt{2}b$ ,  $OR = a = RC$ .  
 (т.к.  $ADRC$  — квадрат)

Тогда  $CF^2 = RF^2 + RC^2 = (\sqrt{2}b - a)^2 + a^2 = 2b^2 + a^2 - 2\sqrt{2}ab$

$$AB^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} ab.$$

$$AB^2 = 100 + 100 = 200$$

$$2AB^2 = CF^2 \quad AB = 10\sqrt{2}$$

$$CF = \sqrt{2}AB = 20.$$

Ответ:  $CF = 20$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

д)  $BC=12$   $FB=\sqrt{400-144}=\sqrt{256}=8=16$

$AB^2=200=256+a^2-\frac{2 \cdot a \cdot 16}{\sqrt{2}}$

$200-256=a^2-16\sqrt{2}a$   
 $a^2-16\sqrt{2}a+56=0$

$56+a^2-16\sqrt{2}a=0$

$D=512-224=288$

$\sqrt{D}=22\sqrt{2}$

$a=\frac{16\sqrt{2} \pm 22\sqrt{2}}{2}=8\sqrt{2}(8 \pm 6)$

$a=14\sqrt{2}$   
 $a=2\sqrt{2}$

$a=14\sqrt{2}$   
 $a=2\sqrt{2}$

$a\sqrt{2}=DC>DB=6$

$a\sqrt{2}>6$

$a=14\sqrt{2}$

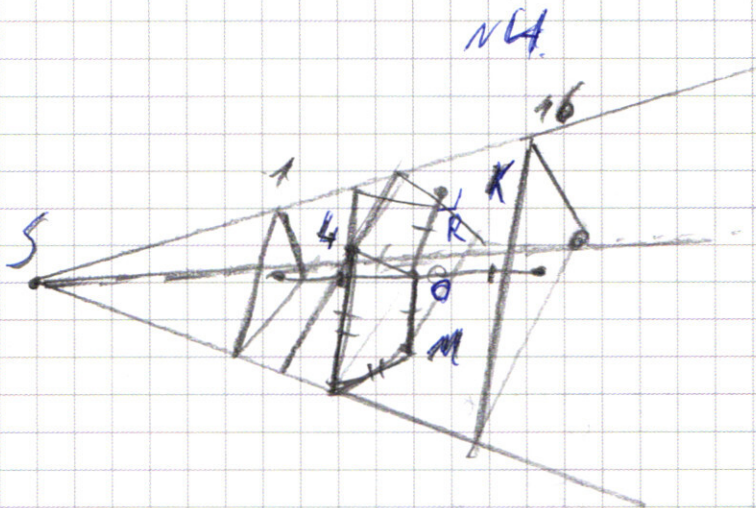
$S_{ACF}=\frac{1}{2}AC \cdot RC \cdot AC=\frac{1}{2}a^2$

$S_{ACF}=14^2=196$

$S_{ACF}=2^2=4$

$S_{ACF}=\frac{1}{2}RC \cdot AC=$   
 $=\frac{1}{2}a^2=196$

Ответ:  $S=196$ .



пирамиды  
с вершиной S и  
основаниями в виде  
этого самого сечения  
подобны с коэффициентом  
( $k = \frac{1}{4}$ ); поэтому

что боковые ребра являются боковыми ребрами  
продолжениями боковых ребер другой, а основа-  
ния параллельны т.к. SO - общий  $\perp$ .

имеем: R - радиус сферы h - высота меньшей  
пирамиды

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{4^3} = \frac{\frac{1}{3} \cdot h \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot (h+2R) \cdot 4^2}$$

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{1}{4}$$

$$4h = h + 2R$$

$$h = \frac{2}{3}R$$

$$\Rightarrow SO = h + R = \frac{5}{3}R$$

$OK \perp$  одной из граней угла  $\Rightarrow \triangle SOK$  - прямоуголь-  
ный

$$\sin(\angle KSO) = \frac{KO}{SO} = \frac{R}{\frac{5}{3}R} = \frac{3}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{3}{5} \quad \text{Ответ: } \frac{3}{5}$$

И пусть плоскости сечений это  $d$  и  $b$  выведем  
из ~~сфер~~ ~~сфер~~ в угол  $\pi$  сферы, такие что  
каждая из них касается трех плоскостей угла

тогда ~~они~~ ~~они~~ из подобия пирамид  $4R_1 = R_2$

$$R_1 = \frac{2}{3}R \quad \text{или} \quad \frac{3}{5} = \frac{2}{5}R$$

$$R_1 = \frac{2}{5}R \quad R_2 = \frac{8}{5}R$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (x^2 + y^2) - 4xy = 0 & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$2) y^2 - 4y(x+1) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$\begin{aligned} D &= x^2 + 8x + 16 + 8x^2 + 32x = \\ &= 9x^2 + 40x + 16 \end{aligned}$$

$$1) x^2 - 2kx - 4kx = y^2 - 4ky - 7ky$$

$$(3x^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3x) + 4^2 = (3x - 4)^2$$

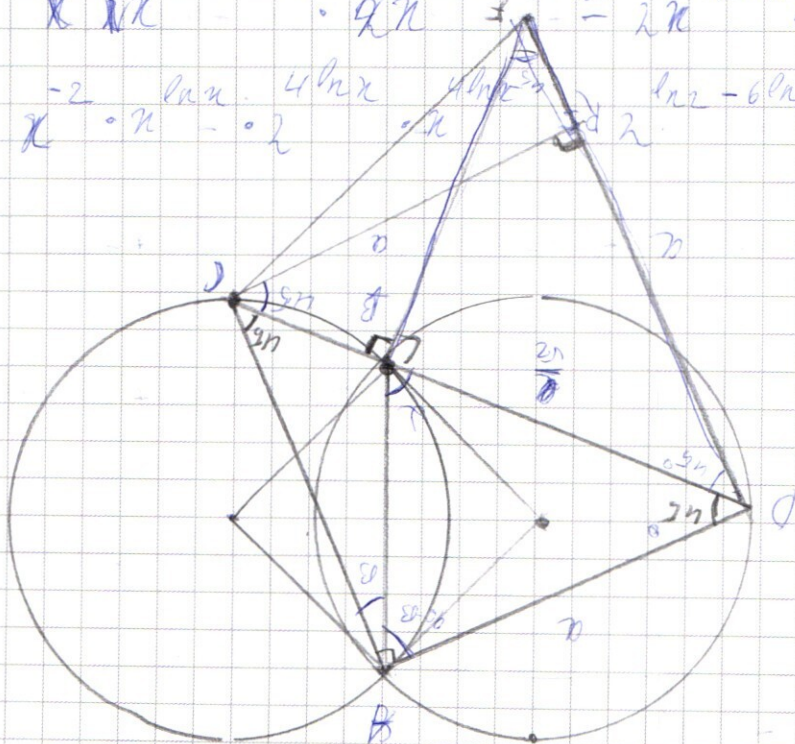
$$\begin{cases} y = \frac{x+4+3x-4}{2} = 2x \\ y = \frac{x+4-3x-4}{2} = -x-2 \end{cases}$$

$$CF = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$RF = \sqrt{b^2 + a} = 5$$

$$DF = 5$$

$$\begin{aligned} x^2 - 2kx - 4kx &= y^2 - 4ky - 7ky \\ x^2 - 6kx &= y^2 - 11ky \end{aligned}$$



$$DF = 5$$

$$DF = 5$$

$$\frac{100}{100} = 1$$

$$\frac{100}{100} = 1$$

$$\frac{100}{100} = 1$$

$$\cos 9\pi - \cos 5\pi - \sqrt{2} \cos 4\pi + \sin 7\pi + \sin 5\pi = 0$$

$$\sin 4\pi + \cos 9\pi = \sqrt{2} \sin\left(\frac{9\pi + 4\pi}{2}\right)$$

$$\sin\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(5\pi - \frac{\pi}{4}\right) - \cos 4\pi = 0$$

$$\sin 5\pi - \cos 5\pi = \sqrt{2} \cos\left(\frac{5\pi + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$2 \cdot \cos 7\pi + \cos\left(4\pi + \frac{\pi}{2}\right) - \cos 4\pi = 0$$

$$t = A + B$$

$$s = A - B$$

$$A = \frac{t+s}{2}$$

$$2 \cos 7\pi \sin 4\pi + \cos 4\pi = 0$$

$$\sin t + \sin s = 2 \sin\left(\frac{t+s}{2}\right) \cos\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

$$\cos t + \cos s = 2 \cos\left(\frac{t+s}{2}\right) \cos\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

$$\cos\left(4\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{4}\right) - \cos 9\pi = 0 \quad \cos t - \cos s = -2 \sin\left(\frac{t+s}{2}\right) \sin\left(\frac{t-s}{2}\right)$$

$$2 \cos 7\pi -$$

$$-2 \sin 7\pi \sin 4\pi - \sqrt{2} \cos 9\pi + 2 \sin 7\pi \cos 4\pi = 0$$

$$2 \sin 7\pi (\cos 9\pi - \sin 4\pi) - \sqrt{2} \cos 4\pi = 0$$

$$\sqrt{2} \sin 7\pi (\cos 4\pi - \sin 4\pi) = \cos 9\pi$$

$$\sin(-\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\cos 9\pi = \cos(\pi - 5\pi) = \cos 9\pi \cos 5\pi + \sin 9\pi \sin 5\pi$$

$$\cos 9\pi - \cos 5\pi - \sqrt{2} \cos 9\pi \cos 5\pi + (-1) \sin 9\pi \sin 5\pi - \sin 9\pi \sin 5\pi = 0$$

$$\cos 9\pi (1 - \sqrt{2} \cos 5\pi) - \cos 5\pi + \sin 9\pi (1 - \sqrt{2} \cos 5\pi) - \sin 5\pi =$$

$$\cos 9\pi (1 - \sqrt{2} \cos 5\pi) - \cos 5\pi = \sin(-9\pi) (1 - \sqrt{2} \sin 5\pi) + - \sin(-5\pi)$$

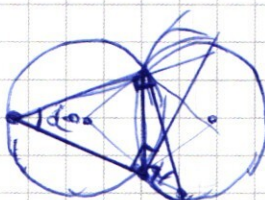
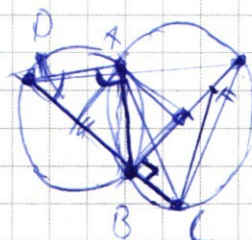
$$\cos 9\pi - \cos 5\pi - \sqrt{2} \cos 9\pi \cos 5\pi = \sin(-9\pi) + \sin(-5\pi) + \sqrt{2} \sin(-9\pi) \cdot \sin(-5\pi)$$

$$\cos 9\pi - \cos 5\pi - \sqrt{2} \cos 9\pi \cos 5\pi = \cos\left(9\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right) + \sqrt{2} \cos\left(9\pi + \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(5\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$356 \cdot 2 = 712$$

$$20^2 - 12^2 = 4^2 (5^2 - 3^2) =$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



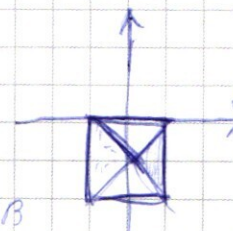
$$\cos 9\pi - \cos 5\pi - \sqrt{2} \cos 4\pi + \sin 9\pi + \sin 5\pi = 0$$

$$\cos 9\pi + \sin 5\pi = \sqrt{2} \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin 9\pi - \cos 5\pi = \sqrt{2} \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos 4\pi$$

$$2 \cos \frac{\pi}{4} \cos 2\pi$$



$$\sin A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}$$

$$|\pi + y + 5| + |y - \pi + 5| = 10$$

$$y - \pi - 5$$

$$y - \pi - 5$$

$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

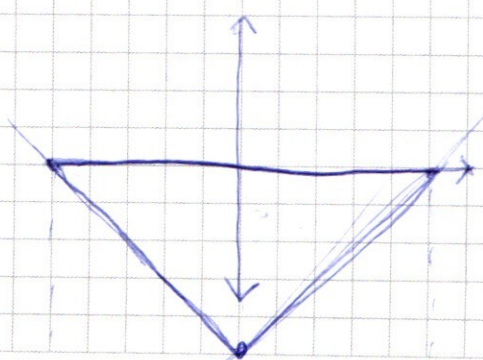
$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

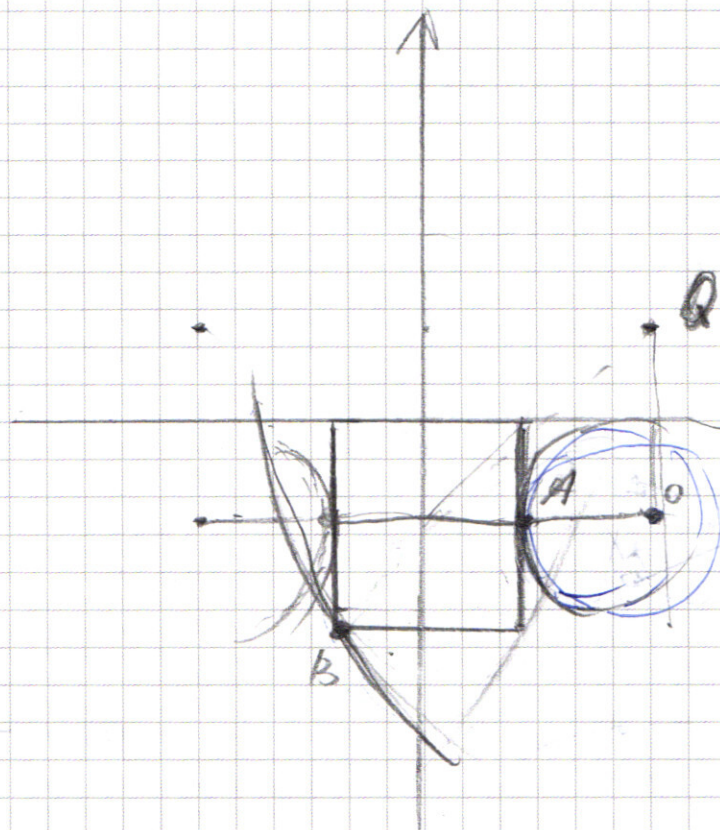
$$y > \pi - 5$$

$$y > -\pi - 5$$

$$y > \pi - 5$$



$$76 + 2(2)$$



$$a = p^2$$

$$Q(12; 5)$$

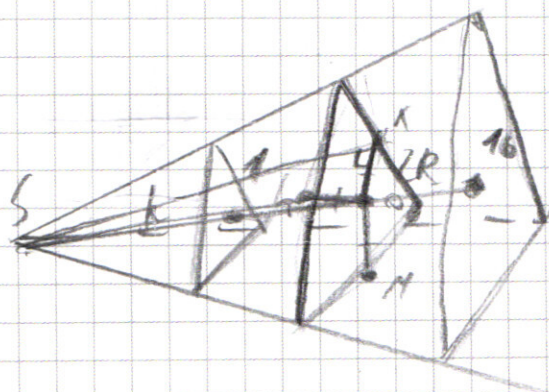
$$B(-5; -10)$$

$$Q B^2 = 19^2 + 15^2 = 289 + 225 = 514$$

$$O(12; -5) \quad OA^2 = 49$$

$$A(5; -5)$$

$$\begin{cases} a = 514 \\ a = 49 \end{cases}$$



$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{h}{h+2R} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3}$$

$$\frac{h}{h+2R} = \frac{1}{4}$$

$$4h = 4h + 8R \quad h + 2R$$

$$3h = 2R$$

$$h = \frac{2}{3}R$$

$$\frac{R}{h+R} = \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + 50^\circ)} = \frac{3}{5} + 1 = \frac{8}{5}$$

$$n = 6.7 \quad x = 3.4$$

$$26 + x(2^{33} - 2) > x^2 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^5 \cdot 2^{34} + 2^0 > 8 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^5 \cdot 2^{34} + 1 > 64 + 2^{34}$$

