

Рег. №: МН-ТА-0008
Класс участия: II
Место проведения: г. Тамбов
Дата проведения: 22 февраля 2020 г.
Время начала (местное):

ШК
(заполняется секретарём)



Олимпиада школы

по математике
Название предмета

Заключительный этап 2020 г.

Анкета участника

Данная анкета предъявляется участником вместе с документом, удостоверяющим личность, при входе на олимпиаду. По окончании написания олимпиады анкета обязательно вкладывается в работу. Работа без предоставления анкеты недействительна и не проверяется. Анкета без подписей недействительна.

<u>Богданова</u> Фамилия	<u>Людмила</u> Имя	<u>Алексеевна</u> Отчество	<u>19.06.2001</u> Дата рождения	<u>17</u> Возраст
<u>Россия</u> Страна	<u>Тамбовская обл.</u> Регион	<u>г. Тамбов</u> Населенный пункт		
<u>паспорт</u> Документ, удостоверяющий личность	<u>6816</u> Серия	<u>939592</u> Номер	<u>29.06.2016</u> Дата выдачи	<u>680-003</u> Код подразделения
<u>Россия</u> Страна школы	<u>Тамбовская обл.</u> Регион школы	<u>г. Тамбов</u> Населенный пункт школы		
<u>11</u> Класс обучения	<u>МАОУ "Лицей №14 имени М.Я. Кузмина"</u> Полное название образовательного учреждения			
<u>+79204848009</u> Мобильный телефон	<u></u> Доп. телефон	<u>bog.l.a@yandex.ru</u> E-mail		

Согласие на обработку персональных данных

Я согласен(-на) на сбор, хранение, использование, распространение (передачу) и публикацию своих персональных данных, а также олимпиадных работ, в том числе в сети "Интернет". Я согласен(-на), что мои персональные данные будут ограничено доступны организаторам олимпиады для решения административных и иных рабочих задач. Я проинформирован(а), что под обработкой персональных данных понимаются действия (операции) с персональными данными в рамках выполнения Федерального закона №152 от 27 июля 2006 г., конфиденциальность персональных данных соблюдается в рамках исполнения Операторами законодательства Российской Федерации. Я согласен(-на) на получение информационных писем от организаторов олимпиады на E-mail, указанный при регистрации.

Я подтверждаю, что все указанные мной данные верны и в указанном виде будут использованы при печати дипломов олимпиады в случае их получения. Я согласен(-на) на передачу данных в государственный информационный ресурс о детях, проявивших выдающиеся способности, созданный во исполнение Постановления Правительства Российской Федерации № 1239 от 17 ноября 2015 г.

Я подтверждаю, что ознакомлен с Положением и Регламентом проведения олимпиады школьников «Физтех», а также с правилами оформления и условиями проверки работы.

«22» февраля г.

Подпись участника олимпиады

Богданова Елена Викторовна
ФИО законного представителя

мать
Степень родства

Подпись законного представителя

Анкета без подписи недействительна.
Анкета обязательно должна быть вложена в работу!

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс



ВАРИАНТ 7

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

Бланк задания должен быть вложен в работу.
Работы без вложенного задания не проверяются.

- √ 1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.

2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.

- √ 3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.

- √ 5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- $\frac{1}{2}$ 6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .

б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .

7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

1) Разложим число 9261 на простые множители:
 $9261 = 3^3 \cdot 7^3$

2) Нам нужно найти варианты разложения на множители, при которых каждый из них будет безмарковым числом, т.е. в нем нет цифр {1, 3, 9, 7}.

3) Вариантов возможных множителей всего 2!

1) $2 \cdot 1^4, 3 \cdot 3^4, 3 \cdot 7^4$

2) $2 \cdot 1^4, 1 \cdot 9^4, 2 \cdot 3^4, 3 \cdot 7^4$

Найдем число возможных комбинаций для каждого из этих вариантов.

$$4) 2 \cdot 1^4, 3 \cdot 3^4, 3 \cdot 7^4: \frac{8 \cdot 7}{2} + \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{36} = \frac{56}{2} + \frac{360}{36} = 28 + 10 = 38$$

$$= 560$$

$$\begin{array}{r} 28 \cdot 20 = 560 \\ + 1680 \\ \hline 2240 \end{array}$$

5) $2 \cdot 1^4, 1 \cdot 9^4, 3 \cdot 7^4, 2 \cdot 3^4$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{2} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 8 \cdot 21 \cdot 10 = 1680$$

6) Всего: $560 + 1680 = 2240$ вариантов.

Ответ: 2240.

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 y^4)^{-\text{лих}} = y^{\text{лих}} (y^{\div 3} x^{\div 4}) \quad (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \quad (2) \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{Запишем это} \\ \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ \frac{y}{x} > 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x > 0 \\ y > 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

1) Решим ур-е (1): $(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^2)}$

$$\frac{1}{x^{2\ln x} \cdot y^{4\ln x}} = \frac{y^{\ln y}}{y^{2\ln x}}$$

$x > 0, y > 0 \Rightarrow$ при представлении в виде дроби поперечных делителей не сократим.

$$\frac{y^{3\ln x}}{y^{3\ln x} - y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x}} = 0$$

$$y^{3\ln x} - y^{\ln y} \cdot x^{2\ln x} = 0$$

$$\frac{y^{-4\ln x}}{x^{2\ln x}} = y^{\ln y - \ln x^2}$$

$\times x^{2\ln x} \neq 0, \text{ т.к. } x > 0$
 $\div y^{\ln y - \ln x^2} \neq 0, \text{ т.к. } y > 0$

$$y^{-4\ln x - \ln y + \ln x^2} = x^{2\ln x}$$

$$y^{3\ln x - \ln y} = x^{2\ln x} \quad \text{прологарифмируем}$$

$$\log y^{3\ln x - \ln y} = \log x^{2\ln x}$$

$$(3\ln x - \ln y) \cdot \ln y = 2\ln x \cdot \ln x$$

$$(\ln y)^2 + 3\ln x \cdot \ln y - 2(\ln x)^2 = 0$$

$$D = 9(\ln x)^2 - 8(\ln x)^2 = (\ln x)^2$$

$$\ln y = \frac{-3\ln x \pm 1\ln x}{-2}$$

$$\begin{cases} \ln y = (3\ln x + 1\ln x)/2 \\ \ln y = (3\ln x - 1\ln x)/2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln y = 4\ln x : 2 \\ \ln y = 2\ln x : 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \ln y = 2\ln x \\ \ln y = \ln x \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = x \end{cases}$$

- решения первой системы.

2) Подставим их во 2-ю систему:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $y = x^2$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0 \quad | : x > 0 \text{ (из ур-я 1)}$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$(x-2) \left(x - \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \right) \left(x - \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \right) = 0$$

$$x = 2$$

$$\Rightarrow y = 4$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{9-\sqrt{17}}{2}$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} \text{ - лиш. корни, т.к. } x > 0$$

$$\begin{array}{r} -x^3 - x^2 - 6x + 8 \quad | \quad x-2 \\ \underline{-x^3 - 2x^2} \\ x^2 - 6x + 8 \\ \underline{-x^2 - 2x} \\ -4x + 8 \\ \underline{-4x + 8} \\ 0 \end{array}$$

$$x^2 + x - 4 = \left(x + \frac{1+\sqrt{17}}{2} \right) \left(x + \frac{1-\sqrt{17}}{2} \right)$$

2) $y = x$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$-2x(x-2) = 0 \quad | : x > 0$$

$$x = 4$$

$$y = 4$$

Ответ: $\left(x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}; y = \frac{9-\sqrt{17}}{2} \right)$ или $(x=2; y=4)$ или $(x=4; y=4)$

~5.

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10. & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 9 & (2) \end{cases}$$

1) Построим графики др-я (1)

$$1) y \geq x - 5$$

$$y = 0 \text{ при } x \leq 5$$

$$2) y \in (-x-5, x-5)$$

$$x = \pm 5$$

$$3) y \leq -5 - x$$

$$y = -10 \text{ при } x \leq 5$$

Треугольник и квадрат.

2) Треугольник $2-4-9$ по у-ю является окружностью с радиусом $\sqrt{5}$, симметрично относительно осей координат.

$$x = \pm 12, y = \pm 5$$

Изображение решений системы будет симметрично, т.е. нам достаточно найти только решение, что

Пусть $\sqrt{5} = 7$ ($a = 49$). Тогда есть 2 решения.

Пусть $\sqrt{5} = \sqrt{144+25} = \sqrt{169} = 13$ (Тогда $a = 169$, есть 2 решения).

ответ: 49; 169.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $AB_1 = 4AB$, $AC = 4AC_1$, $BC = 4BC_1$.

Пусть SH - край сферы, совпадающий с прямой SO , где $H \in (AB_1C_1)$, N - точка касания ABC и сферы, ($N \in SH$). Тогда $\frac{SN}{SH} = \frac{1}{4} \Rightarrow NH = 3SN$.

$NH = 2R$, т.к. $O \in NH$, N и H - лежат на сфере (т.е. NH - диаметр сферы).

Рассмотрим $\triangle SOH$. Он прямоугольный, т.к. O - точка касания.

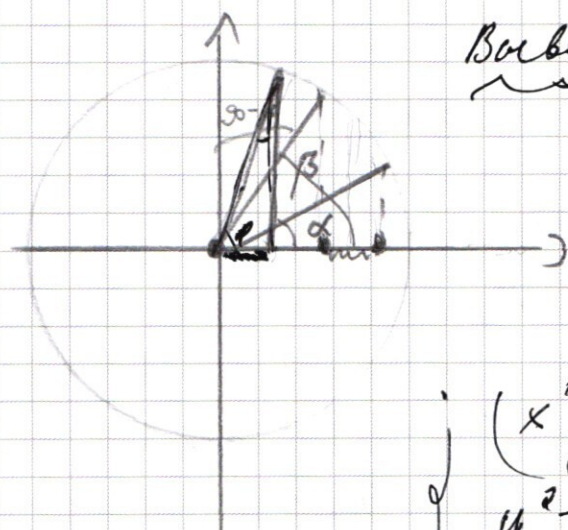
$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO} = \frac{R}{SN+O} = \frac{R}{R + \frac{NH}{3}} =$$

$$= \frac{R}{R + \frac{2R}{3}} = \frac{R \cdot 3}{5R} = \frac{3}{5}.$$

ответ: $\cos \angle KSO = \frac{3}{5}$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Вывод формулы разности косинусов.

$$\cos \alpha - \cos \beta = \cos \gamma - \sin(90^\circ - \gamma) =$$

$$\varphi = \alpha \text{ тогда } \cos(\alpha - \alpha) =$$

$$\begin{cases} (x^2 + y^2)^{-\ln x} = y^{\ln(y-x^2)} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad (x^{-\ln x}) + (y^{-\ln y}) = y^{\ln y - \ln x}$$

$$\left(\frac{1}{e}\right)^2 \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - \ln x}$$

$$\frac{1}{e^2 \cdot y} - \frac{e}{y^4} = 0$$

$$\frac{1}{(t-e)^2} - \frac{e^3}{e^2 t^4} = 0$$

$$t = e$$

$$\ln y = \ln x$$

$$D = e^2 - 4e^2 = -3e^2$$

заменим,
 $x \neq 0$
уменьшим
на $y^{\ln y}$
получим $y \leq 0$

$$(2) \quad y^2 - y(x+4) + 2x(x-4) = 0$$

$$\Delta = x^2 + 8x + 16 + 8x^2 - 32 = 9x^2 + 8x - 16$$

$$y = \frac{x+4 \pm \sqrt{9x^2 + 8x - 16}}{2}$$

Решим 2

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = x^{2(-\ln x)} \cdot y^{4(-\ln x)} = (x^{-\ln x})^2 \cdot (y^{-\ln x})^4 =$$

$$= \frac{1}{x^{\ln x^2} (y^{\ln x})^4} = y^{\frac{\ln y - \ln x^2}{y^{\ln x^2}}} = \frac{\ln y}{y^{\ln x^2}}$$

$$\frac{y^{\ln x^3 - y^{\ln y}}}{x^{\ln x^3} \cdot y^{\ln y}} = 0 \quad \left| \quad y^{\ln x^3} - y^{\ln y} = 0 \right.$$

$$\ln x^3 - \ln y = 0 \quad \left| \quad \frac{x^3}{y} = 1 \right.$$

$$\ln \left(\frac{x^3}{y} \right) = 0 \quad \left| \quad \frac{x^3}{y} = 1 \right.$$

$$x^6 - x^4 - 2x^2 + 8x - 4x^3 = 0$$

$$x^6 - x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^5 - x^3 - 4x^2 + 8) = 0$$

$$2x^2 - x + 4 = 0 \quad x^3 - x^3 = (x-x)(x^2 + 2x + 4)$$

$$x^2(x^3 - 4) - (4x^2 + 8x) = -2x(x+1)$$

$$9\sqrt{3} - 3\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 8 > 0$$

$$-3\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 16\sqrt{3} + 8 > 0$$

$$(x+1)((x-1)(x^3-4) - 2x) = (x+1)(x^4 - 4x - x^3 + 4 - 2x) = (x+1)(x^4 - x^3 - 6x + 4)$$

$$x^6 - x^4 - 2x^2 + 8x - 4x^3 = 0$$

$$x^6 - x^4 - 6x^2 + 8x = 0 \quad x = \pm \sqrt{3}$$

$$x(x^5 - x^3 - 6x + 8) = 0$$

$$6(-1-2) \vee (3+0) \vee 1 \vee 7$$

$$x(x(x^2-6) + (x^3-2x^3)) = x(x(x^2-6) - (x-2)(x^2+2x+4))$$

$$x^4 - x^2 - 6$$

2. итерация

$$x^2(6(3+9)) \vee 7$$

$$\Delta = 144 \vee 1 = 3$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{2} \vee 1 = -2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~9261~~ 9261 343 1029 343 49

9261 | 303
3084 | 3
1029 | 3
343 | 3
49 | 7

343 | 14
21 | 49
63

9261 | 3
308
26
24
21

3² = 81
4² = 16
2² = 4

9261 = 3⁴ · 7²

9261 | 81
81 | 113
116
81
251 343

3084
9261
1029
343
49
3

1 · 3⁴ · 7²
9261 = 3⁴ · 7²
1 · 3⁴ · 7² = 1 · 9 · 3 · 7²

251 343
1 27
+ 2 901
686
2 261

1 цифра 6 цифр

1) способ разложить 8-значное число на 4² - 2

8 11111111

выбрано 2-значное для 11 8-8

выбрано 3-значное для 11 5-5-4

выбрано 4-значное для 4- без вариантов

8 · 7 · 6 · 5 · 4

2) способ разложить 8-значное число на 3⁴ - 1

8 - 8

3⁴ - 7 · 6 · 5

1 · 3 - 4

7² без вариантов

8 · 7 · 6 · 5 · 4

3⁴ - 1
1 494
1 494
2 494

I

$$1) 4^2 - 2! \cdot \frac{8 \cdot 4}{2} = 28$$

соедин.

$$2) \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 5 \cdot 4 = 20 \quad 3 - "3"$$

$$3) \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 1 - 3 \cdot 4$$

3.2 1, 1, 3, 3, 3, 7, 7.
3, 3, 3, 3

соедин: $28 \cdot 20 = 560$

II 3, 1, 1, 3, 3, 7, 7.

$$1) 18^2 - 2! \cdot 88.$$

$$2) 12^2 - 2! \cdot \frac{6 \cdot 4}{2} = 216.$$

$$3) 12^2 - 2! \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 106.$$

$$4) 12^2 - 3! \cdot \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{6} = 16.$$

$$8 \cdot 21 \cdot 10 = 80 \cdot 21 = 1680 \quad \frac{1680}{108}$$

$$\frac{1680}{108} = 15.555...$$

$$\cos 9x - \cos 5x = \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = \cos 9x \cdot \cos 5x + \sin 9x \cdot \sin 5x$$

$$\sin 5x + \sin 5x = \sin 9x \cdot \cos 5x + \cos 9x \cdot \sin 5x$$

$$\cos 9x - \cos 5x + \sin 9x + \sin 5x = \cos 9x (\cos 5x + \sin 5x) + \sin 9x (\cos 5x + \sin 5x)$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \cos 5x + \sin 5x$$

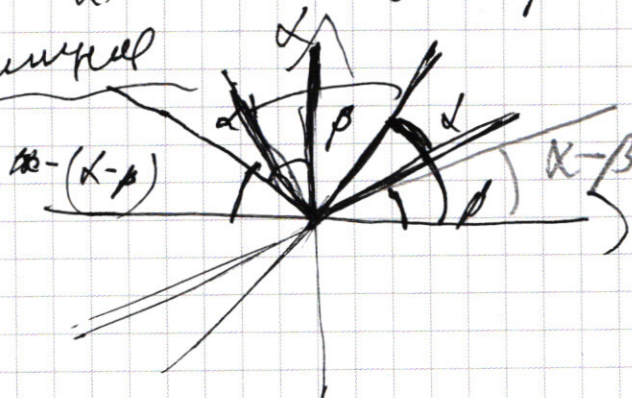
$$\cos 9x + \sin 9x = \cos 5x + \sin 5x$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \cos 5x + \sin 5x$$



показать
свойства косинуса

или другие



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y^{-4 \ln x - 2 \ln x} \cdot x = y^{2 \ln x} \cdot x$$

$$y^{-4 \ln x - \ln y + \ln x} = x$$

$$y^{3 \ln x - \ln y} = x$$

$$\frac{y^{3 \ln x - \ln y}}{y^{\ln y}} = x$$

$$y^{3 \ln x - \ln y} = x$$

$$\ln y^{3 \ln x - \ln y} = \ln x$$

$$(3 \ln x - \ln y) \ln y = \ln x$$

$$1) \quad 2 \ln^2 x = 3 \ln x \cdot \ln y - \ln^2 y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$D = 9 \ln^2 x - 8 \ln^2 x$$

$$\ln y = \frac{3 \ln x \pm |\ln x|}{2}$$

$$\ln y = 2 |\ln x|$$

$$\ln y = |\ln x|$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = 0$$

$$x^3 - x^2 - 6x + 8 = (x-2)(x^2 + x - 4)$$

$$x^2 + x - 4 = 0$$

$$D = 1 + 16 = 17$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x^2 + x - 8 = 0$$

$$D = 1 + 32 = 33$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{33}}{2}$$

$$(\sqrt{17} - 1)^2 = 17 - 2\sqrt{17} + 1 = 18 - 2\sqrt{17}$$

$$x^{\ln 2} = \ln 2$$

$$\ln 2 = \ln 2$$

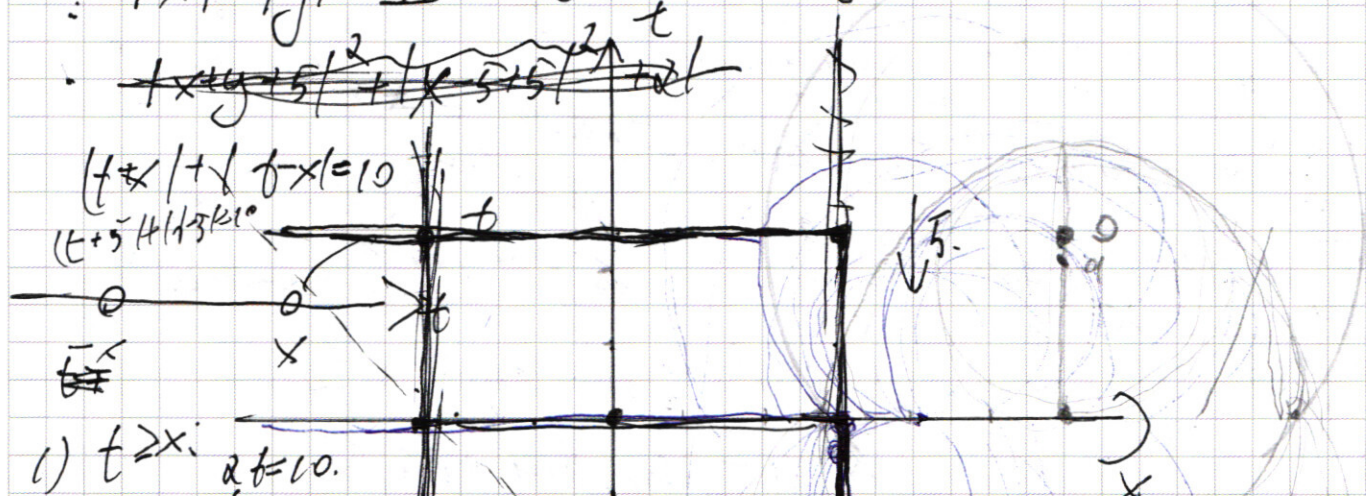
$$\ln 2 = \ln 2$$

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 \\ (x-12)^2 + (y-5)^2 = 9 \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = 3 + 5 + 5 = 13$$

$$\frac{3 + 20 + 12}{2} = 17.5$$

$$|x| - |y| = 5 \quad |y+5+x| + |(y+5)-x| = 10$$



1) $t \geq x$: $2t = 10$, $t = 5$, $x \leq 5$, $y = 5 - x$

2) $t < x$: $t = 0$, $x = 10$, $y = 5 - x = -5$

$$(x+y+5) + (y-x+5) = 10 \Rightarrow y = 5 - x$$

$$x + y \geq -5 \Leftrightarrow y \geq -5 - x$$

$2x = 10$, $x = 5$, $-5 - x \geq -10$, $y = -5 - x = -10$

$$1) (y+5) \leq -x$$

$$-x - y - 5 = 10$$

$$-x - y - 5 = 10 \Rightarrow y = -15 - x$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 9$$

$$x^2 - 24x + 144 + y^2 - 10y + 25 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 24x - 10y + 160 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 24x - 10y + 151 = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

