

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в ра
боты без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

Число 9261 при разложении на простые множители равно: $3^3 \cdot 7^3$. Значит искомое восьмизначное число делится составлено из цифр 3 и цифр 7 и ещё двух единиц (т.к. при умножении на 1 число не изменяется и $8 - 3 - 3 = 2$ - свободные позиции для 1). ~~Всего~~ Кол-во возможных ~~комбинаций~~ комбинаций размещения цифр 3 и цифр 7 в 6 позициях равно: $\frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ комбинаций, а размещений двух единиц по восьми позициям: $\frac{8!}{2!(8-2)!} = \frac{8 \cdot 7}{2} = 4 \cdot 7 = 28$.

Значит всего таких восьмизначных чисел равно: $28 \cdot 20 = 560$.

Ответ: 560

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})} & (1) \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 & (2) \end{cases}$$

$$1) x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}; y^{-4\ln x}$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x + 4\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

Прологарифмируем обе части уравнения:

$$\ln x^{-2\ln x} = \ln y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$-2\ln x \cdot \ln x = (\ln y - 3\ln x) \ln y$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

Решим уравнение относительно $\ln y$:

$$\ln y_{1,2} = \frac{3\ln x \pm \sqrt{9\ln^2 x - 8\ln^2 x}}{2}$$

$$\ln y_{1,2} = \frac{3\ln x \pm \ln x}{2}$$

$$\ln y_1 = 2\ln x \quad \ln y_2 = \ln x$$

$$y_1 = x^2$$

$$y_2 = x$$

$$a) \begin{cases} y = x^2 \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

$$x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

По схеме Горнера:

1	-1	-6	8
2	1	1	-4

$$x(x-2)(x^2 - \cancel{x} + 4) = 0$$

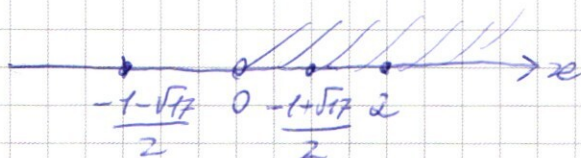
$$x(x-2)(x^2 + x + 4) = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2 + x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2} \quad x_2 = \frac{-1 - \sqrt{17}}{2}$$



Значим при

$$x = 2; y = 4.$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; y = \frac{1 - 2\sqrt{17} + 17}{4} = \frac{9 - \sqrt{17}}{2}.$$

$$\begin{cases} y = x \end{cases}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$x^2 - x^2 - 2x^2 + 8x - 4x = 0$$

$$-2x^2 + 4x = 0$$

$$x(2x - 4) = 0$$

$$x = 0; 2x - 4 = 0$$

$$x = 2.$$

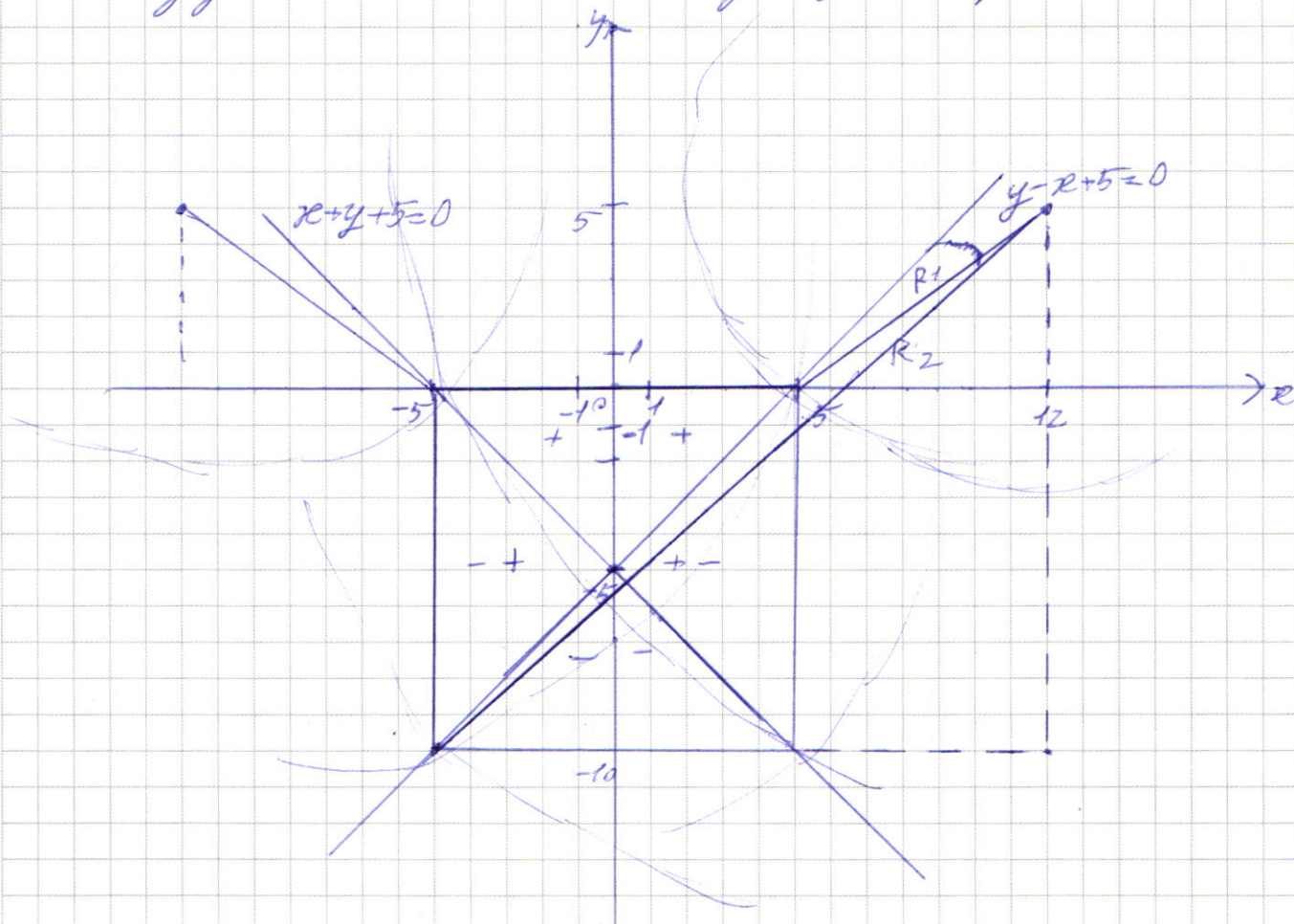
Значим при $x = 2; y = 2.$

$$\text{Ответ: } (2; 2), (2; 4), \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; \frac{9 - \sqrt{17}}{2} \right),$$

N 5

$$\begin{cases} |x+y+5| + |y-x+5| = 10 & (1) \\ (|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

Представим на плоскости графики: $x+y+5=0$ и $y-x+5=0$ — для того, чтобы определить знаки модулей ^{уравнения (1)} на соответствующих областях.



Знаки в областях, где оба модуля положительны:

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y+5 + y-x+5 = 10$$

$$2y = 0$$

$$y = 0, \text{ а } x \in \mathbb{R}.$$

В области, где первый модуль отрицательной, а второй положительной:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5, \text{ а } y \in \mathbb{R}.$$

В силу симметрии получаем график - квадрат,
с центром в точке $(0; -5)$.

Уравнение (2) задаёт 4 окружности, симметричные
относительно центра квадрата:

в первой ^{четверти} с центром в $(12; 5)$,

во второй в $(-12; 5)$, в третьей в $(-12; -5)$,

в четвертой ~~(12; 5)~~ $(12; -5)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2}$.

Известно, что система будет иметь решение тогда,
когда окружность только пересекла квадрат 4×40
миллиметров, когда она пересекла квадрат в един-
ственной противоположной точке.

Найдём радиус окр. при первом пересечении с
квадратом, из графика видно, что

$$R_1 = \sqrt{5^2 + 12^2} \text{ (по теореме Пифагора)}.$$

$$R_1 = \sqrt{169}.$$

Найдём радиус окр. при последнем пересечении с
квадратом:

$$R_2 = \sqrt{17^2 + 15^2}$$

$$R_2 = \sqrt{514}.$$

Значит $R \in (\sqrt{74}; \sqrt{514})$, тогда $\sqrt{a} \in (\sqrt{74}; \sqrt{514}) \Rightarrow a \in (74; 514)$.

(Повидно, что в точках $(-5; 0)$, ~~$(5; -10)$~~ и симметричных им окружности пересекутся в квадрате ровно в двух точках).

Ответ: $a \in (74; 514)$.

N2

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 9x - \cos 5x = -2 \sin 7x \sin 2x$$

$$\sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$-2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x)$$

$$\sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \left(\sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) \right) = 0$$

$$\cos 2x - \sin 2x = 0; \quad \sin 7x - \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x / \cos 2x; \quad \sin 7x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x$$

$$\tan 2x = 1$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 7x = \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$7x + \frac{\pi}{4} + 2x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\frac{51}{8} + \frac{51}{2}n$; $\frac{51}{20} + \frac{251}{5}n$; $\frac{51}{12} + \frac{251}{9}n$, $n \in \mathbb{Z}$.

№ 7

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Представим систему в виде:

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2^{33} - 2x$$

Заметим, что при $x \geq 0$ левая часть неравенства будет расти, а правая уменьшаться, тогда удовлетворено только $x < 0$.

П.ч. $y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$ и $y < 76 + 2^{33} - 2x$, то неравенство $76 + 2^{33} - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34}$ тем более должно выполняться, тогда

$$76 - 2x > 2^x + 3 \cdot 2^{34} - 2^{33}$$

$$76 - 2x > 2^x + 5 \cdot 2^{33}$$

При $x \leq 0$ $2^x < 1$, а $76 < 5 \cdot 2^{33}$, тогда ~~оно~~

$$76 - 2x > 5 \cdot 2^{33} + 2x$$

$75 < 76 - 2x < 76$, при любых $x < 0$, тогда представим

$x = a + b$, где $a + 2b + 5 \cdot 2^{33} \geq 0$, а $a + 2a < 75$, тогда

$$b \geq 5 \cdot 2^{32}, a > -37,5. \text{ Тогда } x = -5 \cdot 2^{32} + 37,5,$$

значит $x \in (-5 \cdot 2^{32} + 37,5; -\infty)$, тогда

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \Rightarrow y \geq 1 + 3 \cdot 2^{34} \quad \text{и}$$

$$y < 76 + 2^{33} + 5 \cdot 2^{33} + 70, \text{ так как } x \text{ неограничен, то}$$

-2 , то $y \in [1+3 \cdot 2^{34}; +\infty)$. $\neq$ пар (x, y) ещё больше.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y \geq 3 \cdot 2^{34} + 2^x \\ y < 76 + 2^{33} - 2x \end{cases} \quad [x \in \mathbb{Z}]$$

Поскольку $3 \cdot 2^{34} > 76 + 2^{33}$, то $x < 0$

$$76 + 2^{33} - 2x - 3 \cdot 2^{34} - 2^x \geq 0$$

$$76 + 5 \cdot 2^{33} - 2x - 2^x \geq 0$$

$$76 - 2x - 2^x \geq 5 \cdot 2^{33}$$

Положим $x = -2^{36}$, тогда

$$76 + 2^{36} - 2^{-2^{36}} \geq 5 \cdot 2^{33}$$

$$76 + \frac{1}{2^{2^{36}}} \geq 2^{33}(5 - 2) = +3 \cdot 2^{33}$$

$$2 + 3 \cdot 2^{34} - 76 + 2^{33} + 2^{36}$$

$$2 + 5 \cdot 2^{33} - 76 - 2^{36}$$

$$2 + 3 \cdot 2^{33} - 76$$

$$2^x \cdot 5 \cdot 2^{33} \leq (y - 2^{33}) < 76 - 2x$$

$$2x \geq 5 \cdot 2^{33}$$

$$x \geq 5 \cdot 2^{32}$$

$$\cos 2x = 0$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \pm 1$$

$$x = \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

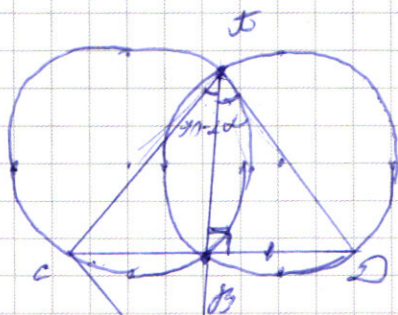
$$1) \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k = \frac{\pi}{4}$$

$$2) \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k = \frac{3\pi}{4}$$

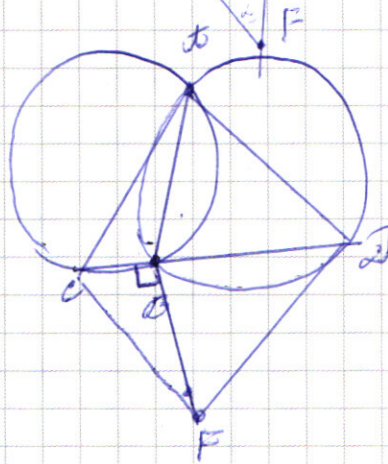
$$3) \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k = \frac{\pi}{2}$$

№

№ 6



$$OD = \sqrt{2}$$



$$\frac{BD}{\sin \alpha} = 2R$$

$$y \approx 2^{-2^{33}} \approx \frac{1}{2^{2^{33}}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & (y^2 - 4x^2) + x^2 + 4(2x - y) - xy = 0 \\ & - (2x - y)(2x + y) + x(x - y) + 4(2x - y) = 0 \\ & \rightarrow (2x - y)(2x + y + 4) + x(x - y) = 0 \end{aligned}$$

$$y^2 - xy - x^2 - x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y - x) + 2x^2(y - x) - 2xy + 8x - 4y = 0$$

$$(y - x)(y + 2x) - 2xy + 8x - 4y = 0$$

$$(2^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y) - \ln x^7}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = \frac{y^{\ln y}}{y^{\ln x^7}}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2\ln x} \cdot y^{-4\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7 - 4\ln x}$$

$$x^{-2\ln x} = y^{\ln y - 3\ln x}$$

$$-2\ln x \ln x = (\ln y - 3\ln x) \ln y$$

$$-2\ln^2 x = \ln^2 y - 3\ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x = 0$$

$$D = 9\ln^2 x - 8\ln^2 x =$$

$$= \ln^2 x (9\ln^2 y - 8)$$

$$\ln^2 x > 0$$

$$\ln y_{1,2} = \frac{3\ln x \pm \ln x}{2}$$

$$\ln y_1 = 2\ln x \quad \ln y_2 = \ln x$$

$$y = x^2$$

$$y = x$$

$$1) x^4 - x^3 - 2x^2 + 8x - 4x^2 = 0$$

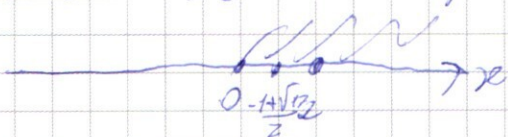
$$x^4 - x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$x(x^3 - x^2 - 6x + 8) = 0$$

1	-1	-6	8
2	1	1	-4
			0

$$x^2 + x - 4 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

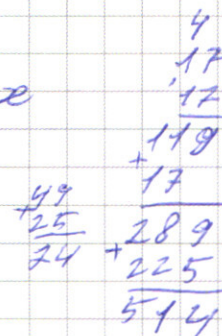
$$x(x - 2)(x^2 + x - 4) = 0$$



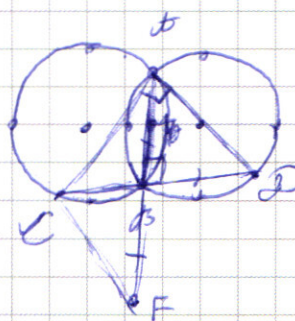
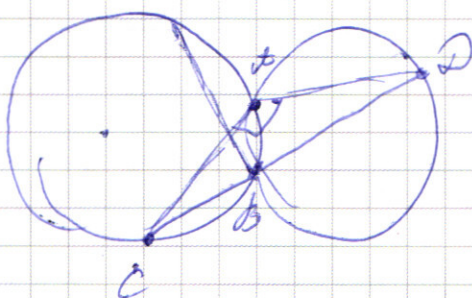
$$x = \left(\frac{-1 + \sqrt{17}}{2}; 2 \right)$$

$$y = \left(\frac{18 - 2\sqrt{17}}{2}; 4 \right) \Rightarrow \left(\frac{9 - \sqrt{17}}{2}; 4 \right)$$

~~$$\cos 2x (\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x)$$~~



№6



$$\begin{array}{r} 76 \overline{) 2} \\ \underline{6} 38 \overline{) 2} \\ \underline{18} 19 - \\ \underline{16} 18 \\ \underline{0} \\ 76 = 4 \cdot 19 \end{array}$$

✓ 7

$$2^2 \cdot 19 + 2^{37} - 2R > 2^R + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^2 \cdot 19 - 2R - 2^x > 6 \cdot 2^{33} - 2^{33} = 5 \cdot 2^{33}$$

$$2^2 \cdot 19 - 2x - 2^x > 5 \cdot 2^{33}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r} 926 \overline{) 9} \\ \underline{9} \\ 026 \\ \underline{18} \\ 81 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1029 \overline{) 3} \\ \underline{1029} \\ 343 \\ \underline{343} \\ 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \underline{13} \end{array}$$

33, 343

3, 73

KT

$$3^3 \cdot 7^3 = 333 \cdot 77711$$

$$\frac{8.7}{2} = 28$$

42

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + 8\sin 9x + 8\sin 5x = 0$$

$$\sin(7x+2x) = \sin 7x \cos 2x + \sin 2x \cos 7x$$

~~CAPR~~

$$\sin(7x - 2x) = \sin 7x \cos 2x - \cos 7x \sin 2x$$

$$8\mu 9x + 8\mu 5x = 28\mu 7x \text{ CDs } 2x$$

$$\cos 7x = \cos(7x + 2x) = \cos 7x \cos 2x - \sin 7x \sin 2x$$

$$\cos(7x - 2x) = \cos 7x \cos 2x + \sin 7x \sin 2x$$

$$\cos 92^\circ - \cos 52^\circ = -2 \sin 72^\circ \sin 20^\circ$$

$$-28\mu\text{Hz} \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 28\mu\text{Hz} \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

$$2 \sin^2 x (\cos^2 x - \sin^2 x - 2 \sin x \cos x) = \sqrt{2} \cos 4x$$

~~$$2 \sin 7x (\cos x - \sin x)^2 = \sqrt{2} \cos 4x$$~~

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 5x - \sin 5x)$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\cos 2x = 8 \sin^2 x$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2x &= 1, \operatorname{tg} \cos x = 0 \\ 2x &= \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{2} k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

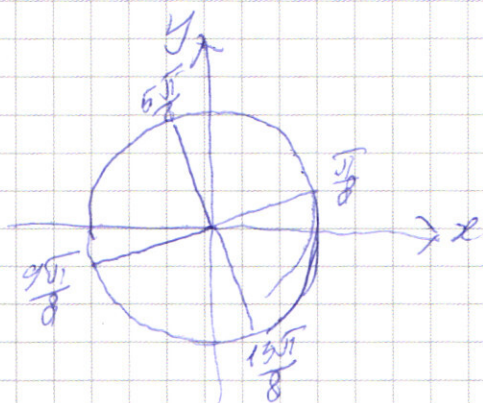
$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \operatorname{tg}^2 x &= 1 \\ \operatorname{tg} x &= \pm 1 \\ x &= \pm \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin 7x &= \sin \frac{\pi}{4} \cos 2x + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x \\ \sin 7x &= \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7x &= \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 5x &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x &= \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x &= \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi}{5} k, k \in \mathbb{Z} \\ x &= \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{9} k, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$



$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \left(\frac{y^4}{x^2} \right)}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 2(2x - y) = 0$$

$$-(2x - y)^2 = -(4x^2 - 4xy + y^2)$$

$$(y^2 - xy - 2x^2) = y^2 - 4xy - 4x^2 + 3xy + 2x^2 = (y - 2x)^2$$

$$(y - \sqrt{2}x)(y + \sqrt{2}x) + 8x - 2y - 4y = 0$$

$$x(8 - y) + 3x - 4y = 3x$$

$$x(8 - y) + 4(8 - y) = 32$$

$$(x + 4)(8 - y) = 32$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y - x) - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y(y - x) + 2x^2$$

$$y^2 - 2x^2 + 4(2x - y) - xy = 0$$