

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФ

Бланк задания должен быть вложен в р
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln y - \ln x^7}$$

$$y^2 + xy - 4y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y(y+x-4) - 2x^2 - 2xy + 8x = 0$$

$$y(y+x-4) - 2x(x-y+4)$$

$$y^2 - xy - 4y - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - xy - 4y - x^2 - x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 + y(-x-4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x+4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 + 8x(x+4) = (x+4)(x+4+8x) = (x+4)(9x+4)$$

$$y_{1,2} =$$

$$\cancel{x^2 + 8x + 16 + 8x^2 + 32x} = 9x^2 + 40x + 16$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-4); 2x$$

$$(3x-4)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 + 8x(x-4) = 9x^2 - 24x + 16$$

$$D_1 = 144 - 144 = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-(x+4) \pm \sqrt{3x-4}}{2} = \frac{-(x+4) \pm 3x-4}{2} = \frac{-x-4-3x+4}{2} = \frac{-4x}{2} = -2x$$

$$\frac{2x}{2} = x$$

~~$x^2 y^4$~~

$$\boxed{y = -2x}$$

$$a^{\log_c a}$$

$$16(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(-2x^7)}$$

$$(x^2 (-2x)^4)^{-\ln x} = (-2x)^{\ln\left(\frac{-2x}{x^7}\right)}$$

$$(16 \cdot x^6)^{-\ln x} = (-2x)^{\ln(-2x) - \ln(x^7)}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (-2x)^{\ln(-2x) - 7\ln x}$$

$$(16x^6)^{-\ln x} = (-2x)^{\ln(-2) - 7\ln x}$$

$$x^2 \cdot (-\ln x) \cdot y^4 (-\ln x) = y^{\ln y} \cdot y^{-\ln x^7}$$

$$(x^2)^{-\ln x} \cdot (16x^4)^{-\ln x} = (-2x)^{(\ln(-2) + \ln x)} \cdot (-2x)^{-7\ln x}$$

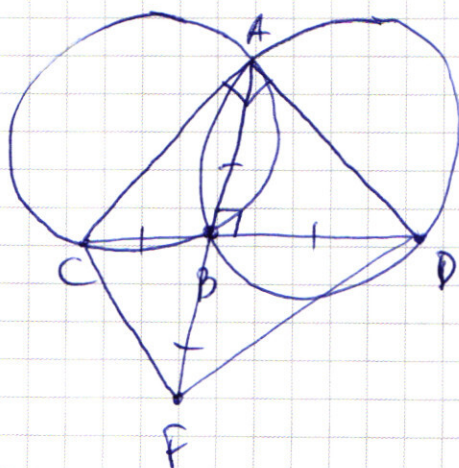
$$-\ln x \cdot \ln x^2 y^4 = \ln y \cdot (\ln y - 7\ln x)$$

$$-\ln x (2\ln x + 4\ln y) = \ln^2 y - 7\ln x \ln y$$

$$-2\ln^2 x - 4\ln y \ln x = \ln^2 y - 7\ln x \ln y$$

$$\ln^2 y - 3\ln x \ln y + 2\ln^2 x$$

$$R_1 = R_2 = R = 10$$



$$AB^2 = CB \cdot BD$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ \hline 3087 & 3 \\ \hline 1029 & 3 \\ \hline 43 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 1029 & 3 \\ \hline 9 & 342 \\ \hline 12 & \\ \hline -12 & \\ \hline 9 & \end{array}$$

$$2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ \hline 3087 & 3 \\ \hline 1029 & 3 \\ \hline 343 & 7 \\ \hline 49 & 7 \\ \hline 7 & \end{array}$$

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3 = 21^3$$

$$343 = 7^3$$

$$\begin{array}{r} 441 \\ \times 21 \\ \hline 1441 \\ 882 \\ \hline 9261 \end{array}$$

$$(C_8^3 + C_5^3)$$

$$C_9$$

$$\begin{array}{cccccccc} \cup & \cup & \cup & \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{array}$$

$$\text{beg } 9$$

$$\rightarrow$$

$$8 \cdot 87 \cdot C_6^3 + C_8^3 + C_5^3$$

$$\cos 9x + \sin 9x = \cos 5x - \sin 5x + \sqrt{2} \cos 4x$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cdot (\cos^2 2x - \sin^2 2x) = 0$$

$$2 \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \cdot \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$(x^2 - y^4)^{-\ln y} = y^{\ln(\frac{y}{x+1})}$$

~~$$(y^2 - 4y + 4) - 2x^2 + 8x - 8 = 0$$~~

~~$$(y-2)^2 - 2(x^2 - 4x + 4) = 4$$~~

~~$$(y-2)^2 - 2(x-2)^2 = 4$$~~

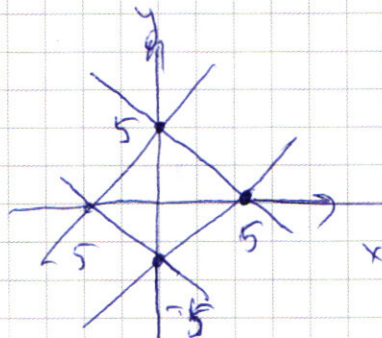


~~8/8~~

$$|x| + |y| = 2$$

$$x + y \geq 5$$

$$y \geq 5 - x$$



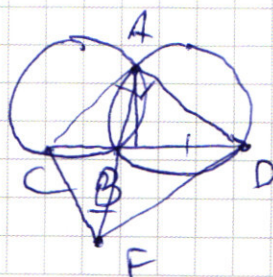
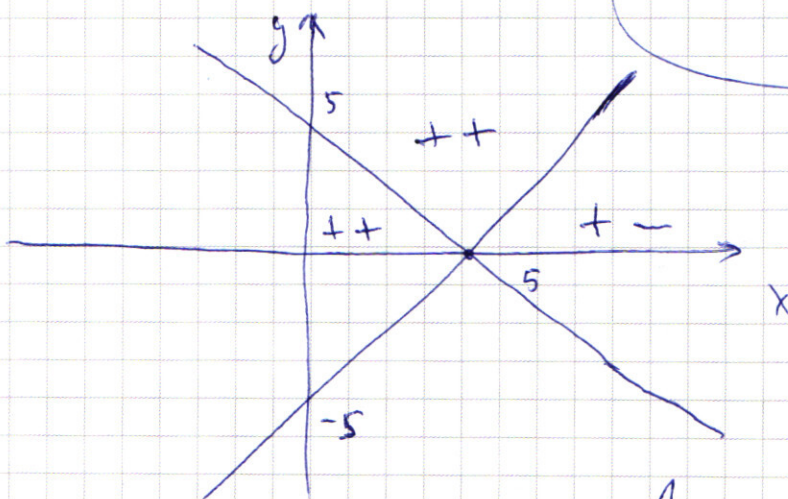
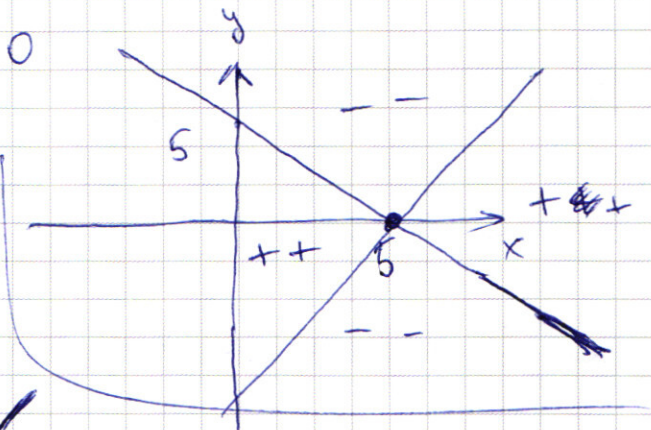
$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x+y \geq 5$$

$$y-x \geq 5$$

$$y \geq 5 - x$$

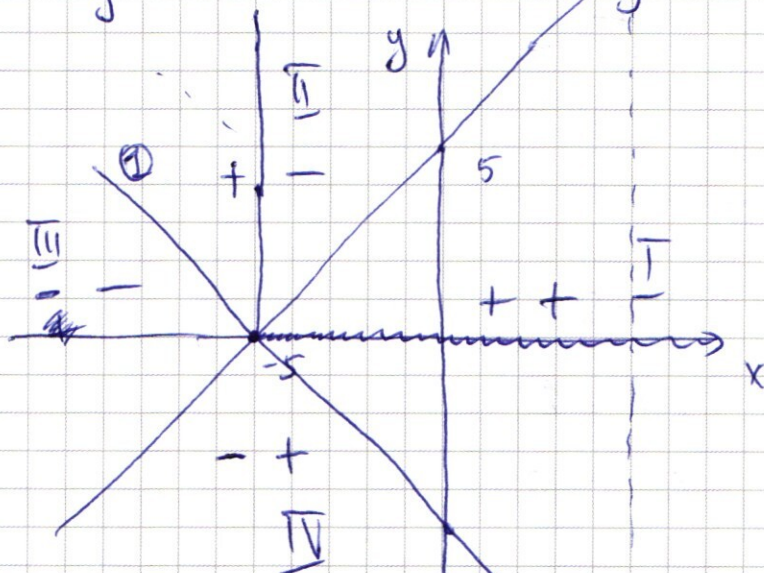
$$y \geq 5 + x$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. 1) $x + y + 5 = 0$

$$y = -x - 5$$

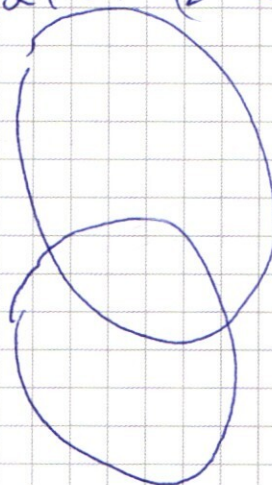


$$2) \quad y - x + 5 = 0$$

$$y = x - 5$$

$$2^x + 2^{35} + 2^{34}$$

$$2(34 + 2^{32})$$



$$\text{I } x+y+5+y-x+5=10$$

$$2g = 0$$

$$y = 0$$

$$\text{II } \cancel{x+y+5} - \cancel{y+x-5} = 10$$

$$2x = 10$$

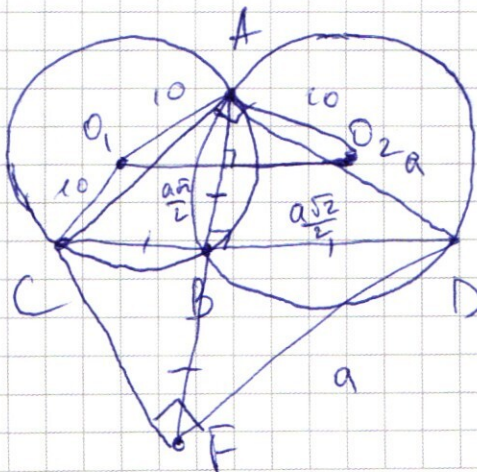
$$K = 5$$

III $-x - \cancel{y} - \cancel{y} + \cancel{y} - x + \cancel{y} = 10$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

$$R_1 = R_2 = 10$$



$$2^x + 2^{35} + 2^{34} < 76 + 2^{33} - 2x$$

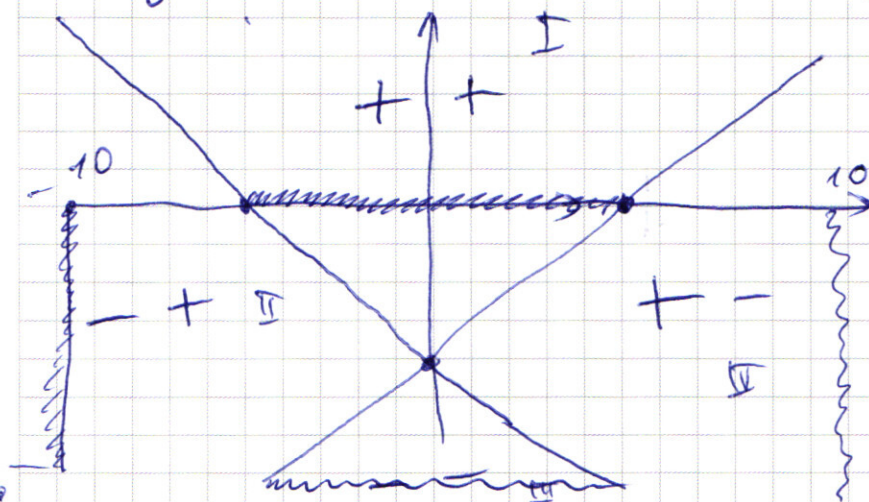
$$2^x + 2^x \leq 2 \cdot 3$$

$$1) |x+y+5| = 0$$

$$y = -5 - x$$

$$2) |y - x + 5|$$

$$y = +x - 5$$



$$I \quad y = 0$$

$$II \quad -x - y - 5 + y - x + 5 = 10$$

$$-2x = 10$$

$$x = -5$$

$$III \quad -x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y = 20$$

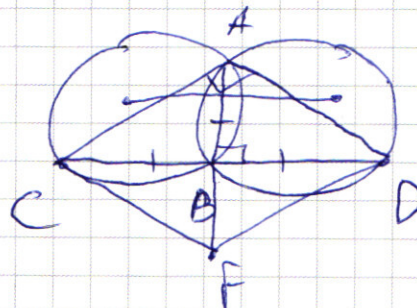
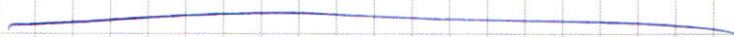
$$y = -10$$

$$IV: \quad x + y + 5 + x - y - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 257 \\ 225 \\ \hline 314 \end{array}$$

257



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-2 \cdot \sin 7x \cdot \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x = 0$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cdot \cos 4x = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

$$2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$\sqrt{2} \sin 2x = \cos 1 \sin \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right) + \sin 2x$$

$$\frac{2 \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x}{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right)}{2 \sin \frac{\pi}{4} \sin 2x}$$

$$\sin 4x$$

$$2 \sin 4x$$

$$-\ln x$$

$$\ln \frac{y}{x^7} = \ln y - \ln x^7$$

$$= \ln y - 7 \ln x$$

$$(x^2 y^7)^{-\ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$$

$$x^{2 \cdot (-\ln x)} \cdot y^{7(-\ln x)} =$$

$$y(y-x-4)$$

$$-x(y+x+8)$$

$$\sin 7x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 4x \right)$$

$$\sin 7x = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 4x \right)$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 4x \right)$$

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} + 2x = \frac{\pi}{4} + 4x$$

$$y^2 - xy - 4y = y(y-x-4)$$

$$2xy - x^2 - 8x = x(y-x-4)$$

$$2 \cdot 2^{32} - 2 =$$

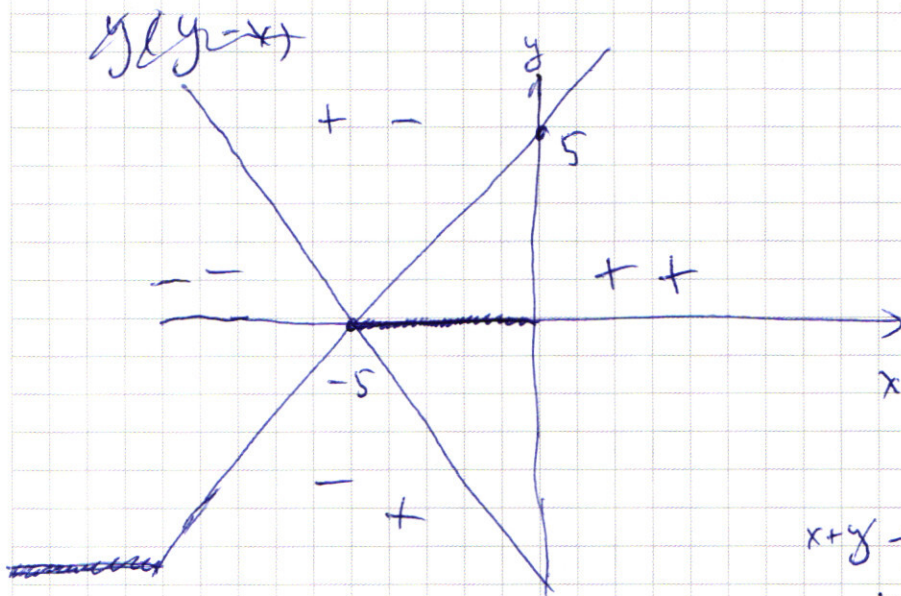
$$= 2^{33} - 2$$

$$y^2 + xy - 4y - 2x^2 + 8x - 2xy = 0$$

$$y(y + x - 4) - 2x(x + 4 - y) = 0$$

$$y^2 - 4y = y(y - 4) + xy = y(y - 4 + x) - 2x^2 + 8x = -2x(x - 4 + y) - xy = -2x(x - 4 + \frac{y}{2})$$

$$2(34-x)+2$$



$$x + y = -5$$

$$y = -x - 5$$

$$y - x = -5$$

$$y = x - 5$$

$$x + y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$x = 5$$

$$-x - y - 5 - y + x - 5 = 10$$

$$-2y = 20$$

$$y = -10$$

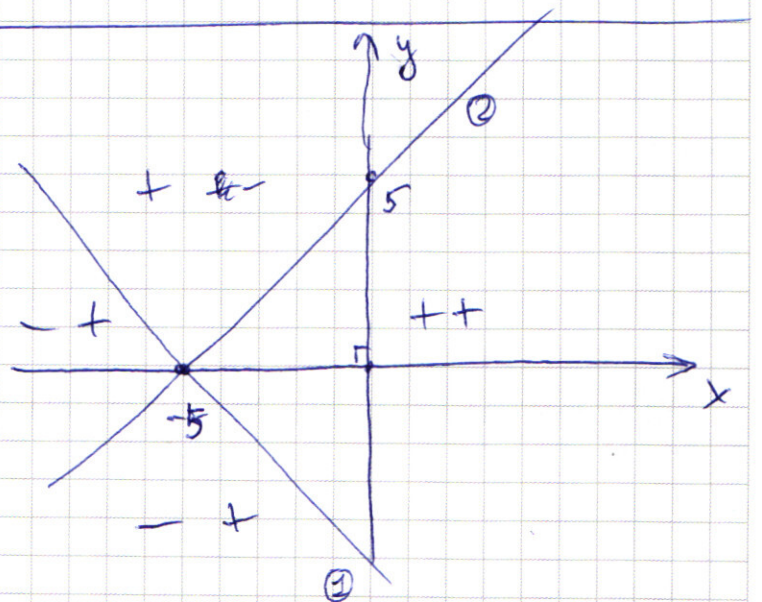
$$1) y = -(x + 5) = -x - 5$$

$$2) y = -(-x + 5) = x - 5$$

$$2x^2 + 2x - 11x$$

$$2x^2 + 2x - 11x$$

$$2x^2 + 2x - 11x$$



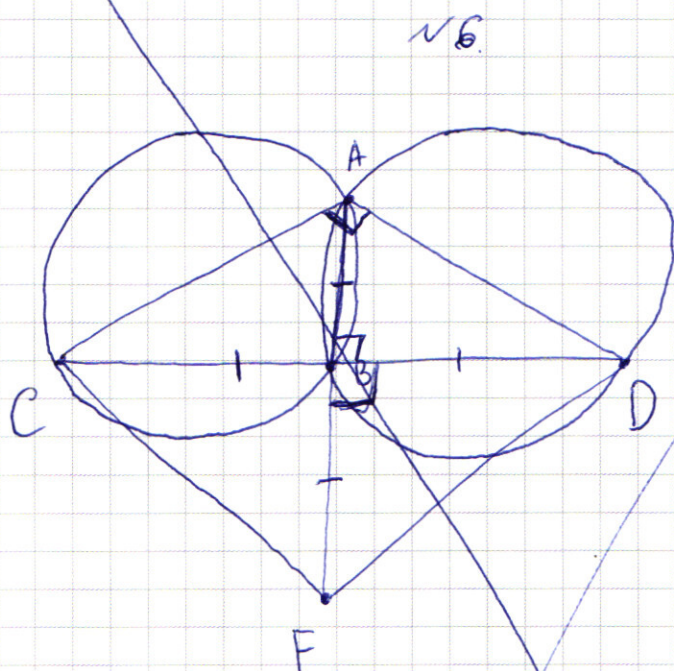
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} y \geq 2^x + 2^{35} + 2^{34} \\ y < 2 \cdot 34 + 2^{33} - 2x \end{cases} \\
 & \begin{cases} y \geq 2^x + 2^{35} + 2^{34} \\ y < 2^{33} - 2(x - 34) \end{cases} \\
 & \begin{cases} y \geq 2^x + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 2^{33} - 2(x - 34) \end{cases} \\
 & 2^{33} - 2(x - 34) > y \geq 2^x + 6 \cdot 2^{33} \\
 & 2^{33} - 2(x - 34) - 2^x - 6 \cdot 2^{33} \geq 0 \\
 & -2(x - 34) - 2^x - 5 \cdot 2^{33} \geq 0 \\
 & -2(x - 34) - (2^x + 5 \cdot 2^{33}) \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{cases} y \geq 2^x + 2^{35} + 2^{34} \\ y < 2 \cdot 38 + 2^{33} \cdot x - 2x \end{cases} \\
 & 2 \cdot 38 + 2^{33} \cdot x - 2x > 2^x + 2^{35} + 2^{34} \\
 & 2(38 - x) > 2^x + 2^{35} + 2^{34} - 2^{33}x \\
 & 2(38 - x) > 2^x + 2^{33}(6 - x)
 \end{aligned}$$

$$y \geq 2^x + 2^{35} + 2^{34}$$

$$y \leq 76 + (2^{33} - 2) \cdot x$$



- 1) $CB = BD$ (т.к. окружности равны; $CD \parallel$ линии центров)
 2) $AB = CB = BD$ (т.к. $\angle CAD = 90^\circ$ по условию)

- 3) $AB = BD = BF = CB \Rightarrow ADFC$ - квадрат. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ABD$ - равност. $\Rightarrow \angle BAD = \angle BDA = 45^\circ$

- 4) $\triangle ABD$: по т. Синусов:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = 2R = 20 \text{ (т.к. } \triangle ABD \text{ вписан в окружность радиуса } R)$$

$$AB = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot 20 = 20\sqrt{2}$$

- 5) $\triangle CBF$: по т. Пифагора:

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{400 \cdot 2 + 400 \cdot 2} = \sqrt{1600} =$$

$= 40.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(e-1)(y-x^2)(e-1)(y-x)=0 \quad | : (e-1)^2 \neq 0$$

$$(y-x^2)(y-x)=0$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $y = -2x$ (по (2) уравнению)

$$(-2x-x^2)(-2x-x)=0 \quad | : (-1)^2 \neq 0$$

$$(x^2+2x) \cdot 3x=0$$

$$x(x+2) \cdot 3x=0 \quad | : 3 \neq 0$$

$$x^2(x+2)=0$$

$$x=0 \Rightarrow y=0$$

$$x=-2 \text{ не подх. в силу } D(y)$$

2) $y = x-4$

$$(x-4-x^2)(x-4-x)=0 \quad | : (-1) \neq 0$$

$$(x^2+x-4)=0 \quad | : (-1) \neq 0$$

$$x^2+x-4=0$$

$$D=1+16=17$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$x = \left[\begin{array}{l} \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < 0 \text{ не подх. в силу } D(y) \\ \frac{-1+\sqrt{17}}{2} > 0 \text{ подх.} \end{array} \right.$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} \Rightarrow y = \frac{-1+\sqrt{17}}{2} - 4 = \frac{-9+\sqrt{17}}{2} < 0 \Rightarrow \text{Эта точка}$$

следует не реализоваться также в силу $D(y)$.

Ответ: (0, 0).

$$x^2 - x + 4 = 0$$

$$D = 1 - 4 \cdot 4 = -15 < 0 \Rightarrow \text{нет корней.}$$

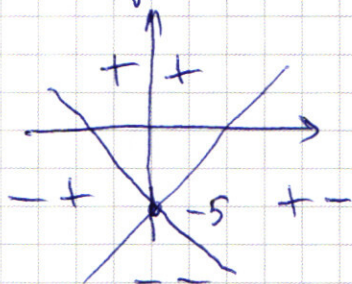
Ответ: (0, 0)

и 5.

$$(1) \begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10 & a: 2 \text{ реш.} \end{cases}$$

$$(2) (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = 9$$

(1) Первое уравнение задаёт 4 отрезка (соединённых), а именно (это можно понять, если ^{квадрат} равно раскрыть модули) т.е. для этого нужно рассмотреть 4 случая:



левый знак - знак первого модуля; правый - знак второго модуля.

$$++: y = 0$$

$$+-: x = -5$$

$$-+: x = -5$$

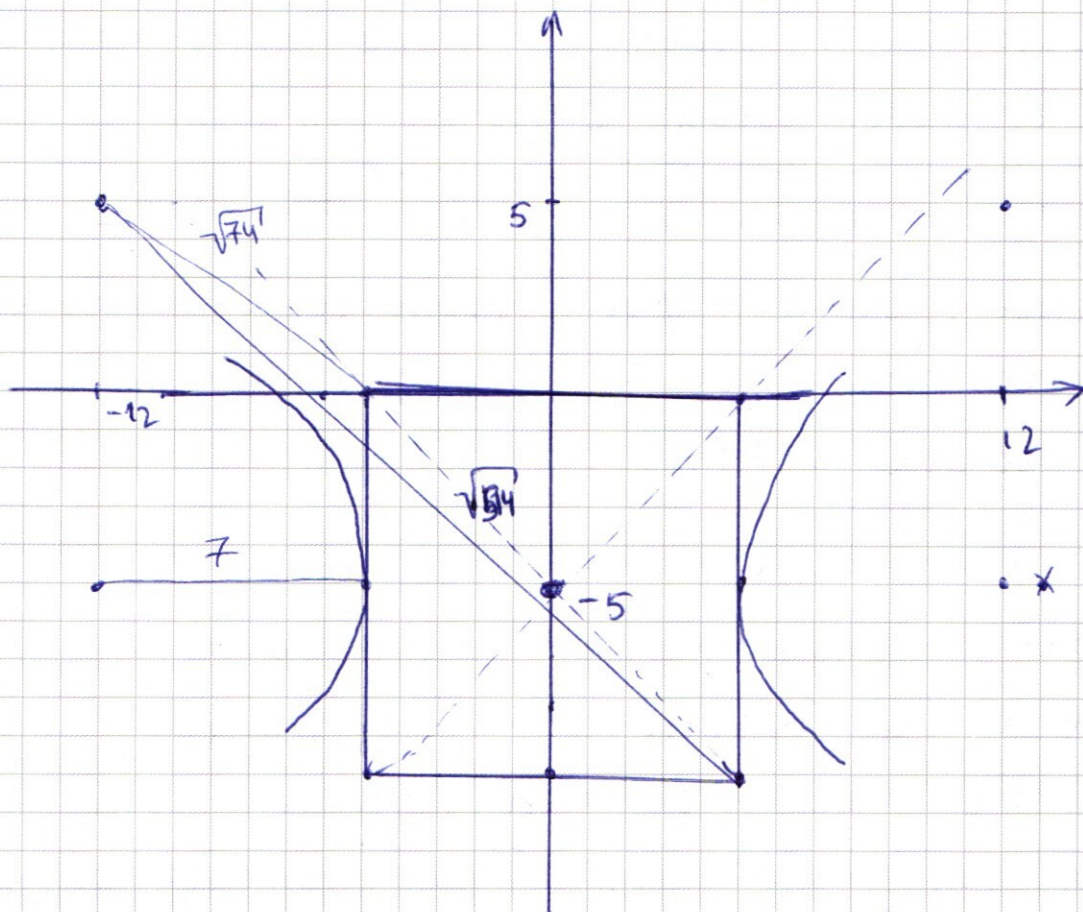
$$--: y = -10$$

$$+-: x = 5$$

(2) Это уравнение задаёт 4 окружности. Это можно понять, рассматривая все случаи для x и y (равняю x и y с 0 в разных случаях) Получим 4 окружности.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Давайте всё это изобразим:



Пунктир использован для построения квадрата.

Если a меньшее, то решений нет.

Решения будут, когда a достигнет 49 (в этом случае нижние окружности коснутся, а верхние — нет (т.к. расстояние от их центров до ближайшей точки квадрата равно $\sqrt{74} > \sqrt{49} = 7$))

Далее при увеличении a количество решений будет только увеличиваться, и снова 2 решения мы получим, когда 2 вершины окружности коснутся углов квадрата (правая верхняя окр. коснется левого нижнего угла квадрата) (и наоборот). Тогда R для них будет равен:

$$\sqrt{17^2 + 15^2} = \sqrt{289 + 225} = \sqrt{514} \Rightarrow a = 514.$$

Заметим, что при таком R ни одна окружность не будет иметь общих точек с квадратом.

Также стоит отметить, что в силу симметрии относительно прямой $x=0$ не будет такого, что четность количества пересечений вершин окружностей ~~будет всегда одна~~ и квадрата разная. Также и с нижними. Поэтому можно сказать, что других решений нет.

Ответ: 49; 514.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

Цифры, которые могут быть в наших восьмизначных числах: 3, 7, 9, 1. Другие числа в нём быть не могут, т.к. они не присутствуют в разложении числа 9261 на множители.

Рассмотрим 2 случая:

- 1) Цифра 9 есть в числе; $9 = 3^2$, следовательно эта девятка будет равносильна, т.к. две девятки $\Rightarrow 9^2 = 3^4 > 3^3$ (невозможно). Ставим 9 на любое из 8 мест; тройку на любое из оставшихся 7 мест; семерки расставляем в оставшиеся 3 места; остальные — единицы.

$$\text{Получаем: } 8 \cdot 7 \cdot C_6^3 = 56 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 56 \cdot 20 = 1120 \text{ (вариантов) — если есть '9'}$$

- 2) Если цифры 9 нет; в этом случае все считаемые нами варианты будут точно не совпадать с предыдущими (уже посчитанными в 1-м случае)

В таком случае: расставляем шара — на тройки на любое из 8 мест, затем расставляем единицы на любое из 5 мест (3 места уже занято тройками), а остальное — единицами.

~~Получаем: $C_8^3 + C_5^3 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{4 \cdot 5}{4 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 56 + \frac{20}{2}$~~

Получаем: $C_8^3 \cdot C_5^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} \cdot \frac{5!}{3! \cdot 2!} =$
 $= \frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}{2} = 28 \cdot 20 = 560$

Складываем полученное в 1 и 2 случаях:

$$1120 + 560 = 1680 \text{ (способов)} - \text{всего.}$$

Ответ: 1680.

н2.

$$\begin{aligned} \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x &= 0 \\ -2 \cdot \sin 7x \cdot \cancel{\cos 2x} \sin 2x - \sqrt{2} \cdot \cos 4x + 2 \cdot \sin 7x \cdot \cos 2x &= 0 \\ 2 \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} \cdot (\cos^2 2x - \sin^2 2x) &= 0 \\ 2 \cdot \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x) &= 0 \\ (\cos 2x - \sin 2x) (2 \sin 7x - \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x)) &= 0 \quad \text{"0"} \\ \begin{cases} \cos 2x - \sin 2x = 0 & \text{(однозначное; } \cos 2x \text{ и } \sin 2x \neq 0 \text{ однозначн.)} \\ 2 \sin 7x = \sqrt{2} (\cos 2x + \sin 2x) & | : \sqrt{2} \neq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 1 - \operatorname{tg} 2x = 0 \\ \sqrt{2} \cdot \sin 7x = \sin(\frac{\pi}{2} - 2x) + \sin 2x \end{cases} \end{aligned}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin 7x = 2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$\sqrt{2} (2 \cdot \sin \frac{\pi}{4} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2})$$

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2x = 1 \end{cases}$$

$$\sin 7x = \cos \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right)$$

$$\begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \quad | : 2 \end{cases}$$

$$\sin 7x = \sin \left(\frac{\pi}{4} + 2x \right)$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \text{ или}$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z};$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} 7x = \frac{\pi}{4} + 2x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$7x + \frac{\pi}{4} + 2x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$x = \frac{3\pi}{20} + \frac{2}{5} \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi n}{9}, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln \left(\frac{y}{x^7} \right)} \quad \sqrt[3]{}$$

$$(2) \begin{cases} y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \end{cases}$$

Рассмотрим (2) уравнение, как квадратное относительно y :

$$y^2 - y(x+4) - 2x^2 + 8x = 0$$

$$y^2 - y(x+4) - 2x(x-4) = 0$$

По теореме Виета находим корни:

$$\begin{cases} y_1 = -2x \\ y_2 = x - 4 \end{cases}$$

Подумаем, что получится при этих x (2) уравнение имеет решения.

Теперь рассмотрим первое уравнение системы:

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

1) Если $y \neq -2x$:

$$D(y): \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{y}{x^7} > 0 \quad (\text{т.к. } x > 0 \Rightarrow \text{и } y > 0) \\ x > 0 \\ y > 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \nearrow \\ \searrow \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{переход} \\ \text{равносистем.} \end{matrix}$$

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^7})}$$

Прологарифмируем обе части по основанию e , ~~мысленно~~ на $D(y)$ это равноср. преобраз-е.

$$-\ln x (\ln x^2 y^4) = \ln(\frac{y}{x^7}) = \ln y$$

$$-\ln x (2 \ln x + 4 \ln y) = (\ln y - 7 \ln x) \ln y$$

$$-2 \cdot \ln^2 x - 4 \ln y \cdot \ln x = \ln^2 y - 7 \ln x \cdot \ln y$$

$$\ln^2 y - 3 \ln x \cdot \ln y + 2 \ln^2 x = 0$$

$$(\ln y - 2 \ln x)(\ln y - \ln x) = 0$$

Рационализируем:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Всего пар:

$$76 + 2 \cdot (2^{32} - 1) \cdot x + 3$$

$$= 76 + (2^{33} - 2)x - 2^x - 3 \cdot 2^{34} = 3 \cdot 2^{34} + 2^{33} \cdot x - 2x - 2^x + 76 = 2^{33}(4 + x) - 2x - 2^x + 76$$

при $x \in [7, 37]$:

Получаем: $682 \cdot 2^{33} - 2 \cdot 682 - (2^7 + 2^8 + \dots + 2^{37})$
(по формуле суммы арифм. пр.)

$$(4 \cdot 31 + \frac{7+37}{2} \cdot 31 = 682 + 124 = 806)$$

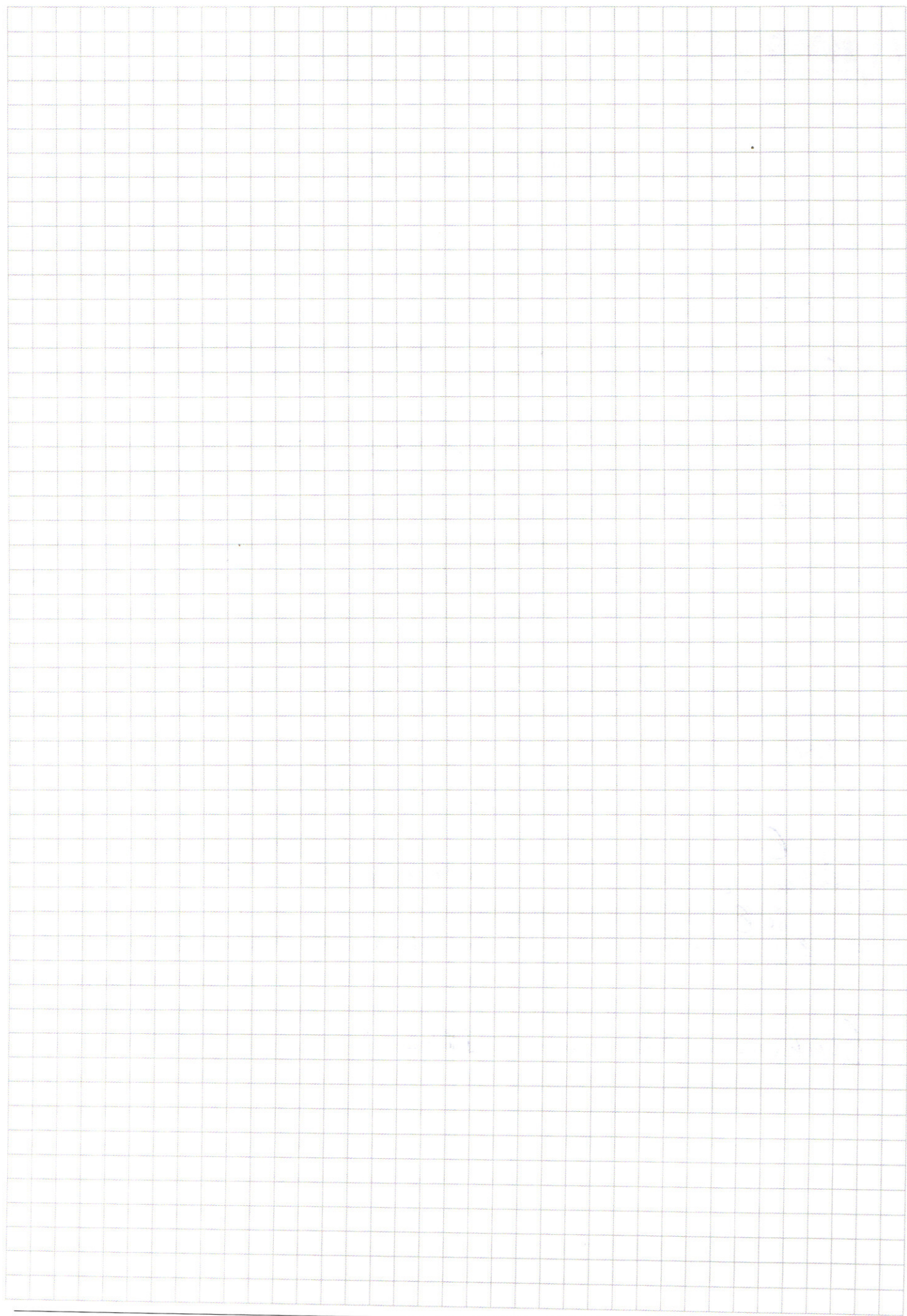
$$\textcircled{= 806} \quad 682 \cdot 2^{33} - 1364 - (2^{34} - 127) + 76 =$$

$$= 806 \quad 682 \cdot 2^{33} - 2^{34} - 1364 + 127 + 76 =$$

$$= 806 \quad 682 \cdot 2^{33} - 2 \cdot 2^{33} - 1161 = 804 \quad 680 \cdot 2^{33} - 1161$$

(всего пар)

Ответ: $804 \quad 680 \cdot 2^{33} - 1161$.



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x \end{cases}$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2 \cdot (2^{32} - 1)x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{33} < 76 + (2^{33} - 2)x$$

$$2^x + 6 \cdot 2^{33} - 76 - 2^{33}x + 2x < 0$$

$$2^{33}(6 - x) - 76 + 2^x + 2x < 0$$

Рассмотрим это нерав. во при $x = 6$:
(т.к. при $x < 6$ оно точно неверно)

$$-76 + 2^6 + 12 < 0$$

$0 < 0 \rightarrow$ неверно $\Rightarrow x = 6$ не подходит.

Рассмотрим следующий x ; $x = 7$:

$$-2^{33} - 76 + 2^7 + 14 < 0 \rightarrow \text{верно} \Rightarrow x = 7 \text{ подходит.}$$

При каких x неравенство переста-
ет быть верным?

Рассмотрим $x = 38$: (т.к. при $x < 38$ оно, очевидно, верно)

$$2^{33} \cdot (-32) - 76 + 2^{38} + 76 < 0$$

$$-2^{38} + 2^{38} < 0 \rightarrow \text{неверно} \Rightarrow \text{при } x \geq 38$$

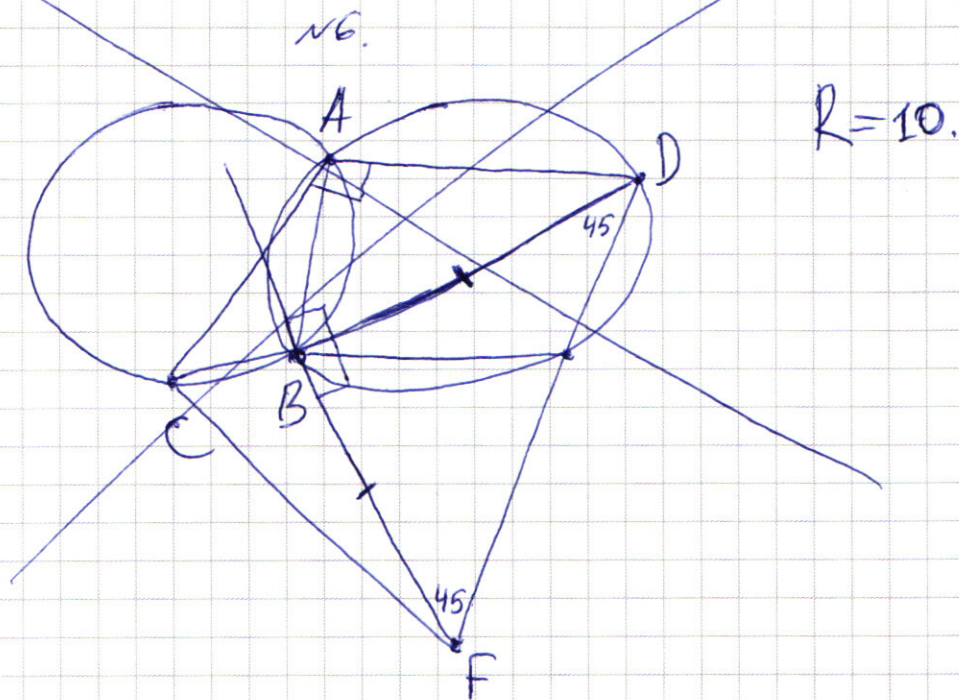
неравенство не выполняется

Получаем все значения x : $x \in [7; 37]$

при этом для каждого x найдётся y .

Количество пар (x, y) чисел: $37 - 7 + 1 = 31$

Ответ: 31



По условию y найдётся для каждого x ?

$x = 7$:

$$76 + 2(2^{32} - 1) \cdot 7 > y \geq 2^7 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$14 \cdot 2^{32} + 69 > y \geq 3 \cdot 2^{34} + 128$$

$$\text{Кол. } y = 14 \cdot 2^{32} + 69 - 12 \cdot 2^{32} - 128 = 2^{33} - 59$$

$x = 8$:

$$76 + 2^4 \cdot (2^{32} - 1) > y \geq 2^8 + 3 \cdot 2^{34}$$

$$60 + 2^{36} > y \geq 256 + 3 \cdot 2^{34}$$

Количество y в общем виде:

$$76 + 2(2^{32} - 1)x - 2^x \geq 3 \cdot 2^{34} =$$

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} < 2 \cdot 3^4 + 2^3 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$34 \cdot 2 + 2^3 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34}$$

$$2^{35} + 2^{34} + 2^x$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

$$2(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{31})x$$

$$(1 + 2 + 4 + \dots + 2^{32} - 1)x$$

$$\wedge$$

$$76 + (2^{33} - 2)x$$

~~Wrong~~

$$x=8: \quad 2^{36} - 16 + 76$$

$$2^{36} + 60$$

$$2^x + 2 \cdot 2^{34} < 2(2^{32} - 1)x + 76 \quad x=16$$

$$x=32$$

$$y \leq 76 + (2^{33} - 2)x \quad 76 \leq 2^{33}x \quad x=x$$

~~Wrong~~

$$y \geq 2^x + 3 \cdot k^2$$

$$y < 76 + 2(k-1)x$$

$$2^x + 3k^2 < 76 + 2(k-1)x$$

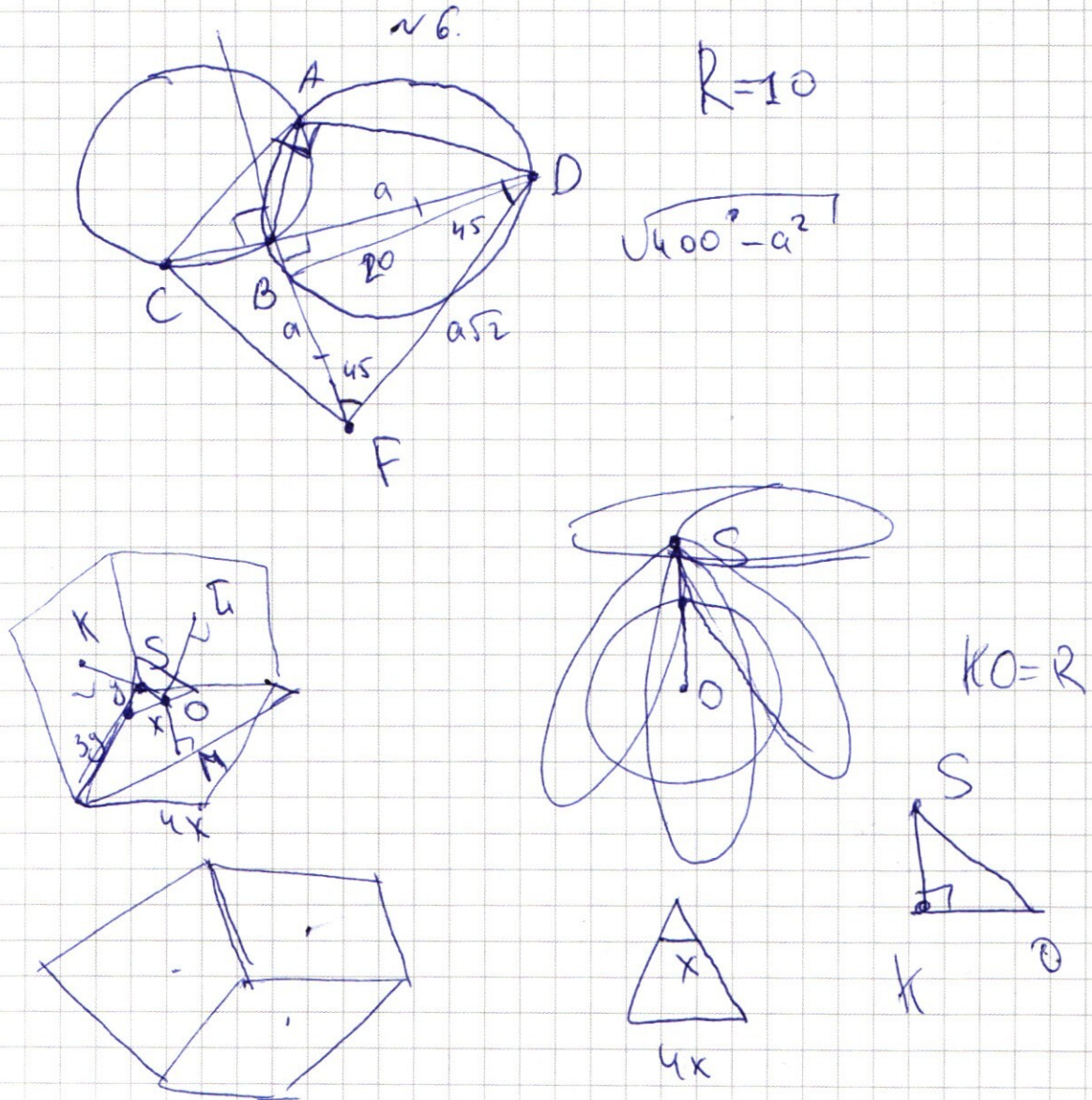
$$k = 2^{32}$$

$$k^3 + k^2 + 2^x <$$

$$< 76 + (k^2 - 1)x$$

$$\begin{array}{r} 1364 \\ - 203 \\ \hline 1161 \end{array}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$2^x + 2^{35} + 2^{34}$$

$$76 + 2^{33}x - 2x$$

$$70 + 2 \cdot 3 + 2$$