

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

- ✓1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
- ✓2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
- ✓3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

- ✓4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
- ✓5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

- ✓6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
- б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
- ✓7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

Разложим число 9261 на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 9261 & 3 \\ 3087 & 3 \\ 1029 & 3 \\ 343 & 7 \\ 49 & 7 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

т.к. 9261 - произведение цифр какого-то из
составных чисел, то всякая цифра этого
числа является либо 1 либо произведением
единицы на одно или несколько простых множителей,
цифрой во всех комбинациях является лишь $3 \cdot 3 = 9$,

т.е. возможны 2 случая:

I случай: число состоит из трёх 3, трёх 7 и двух 1, всего вариантов

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 2} = 280 \text{ вариантов}$$

3 цифры 3, 3 цифры 7, 2 цифры 1

II случай: число состоит из одной 3, одной 9, трёх 7 и трёх 1, всего вариантов

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6} = 560 \text{ вариантов}$$

3 цифры 3, 1 цифра 9, 3 цифры 7, 3 цифры 1

Итого $280 + 560 = 840$ вариантов, т.е. таких чисел.

Ответ: 840

№2.

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0 \quad (*)$$

$$2 \sin 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + 2 \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\sqrt{2} (\cos^2 2x - \sin^2 2x) - 2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = 0 \quad (**)$$

$$(\cos 2x - \sin 2x) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin 2x - \sin 7x \right) = 0 \quad (***)$$

$\Rightarrow$ (уравнение)

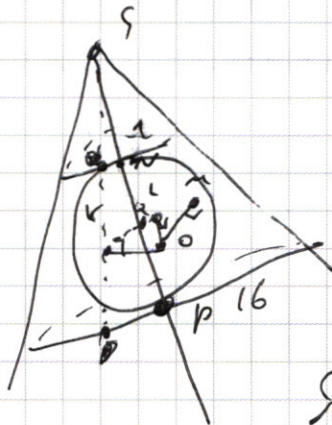
$$\begin{cases} \sin 2x = \cos 2x \\ \sin 7x = \sin(2x + \frac{\pi}{4}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x = 2x + \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 7x = \pi - 2x - \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ 5x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ 9x = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

гребенные уравнения совпадают с приведенным выше, т.е. разные значения

Ответ: $\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{20} + \frac{2\pi k}{5}, k \in \mathbb{Z}; \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi k}{9}, k \in \mathbb{Z}$

и 4.



1) Заметим что кас. сферы плоскости образуют пирамиды, которые подобны (заключенная из точки S с котр. 4) т.е. площади относятся как квадраты котр. подобия. ~~т.е. площади~~

Пл. к. плоскости кас. и $\perp SO$, то точки

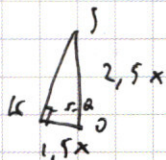
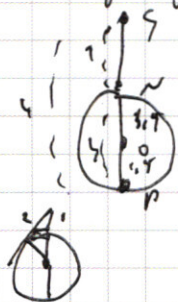
касания этих плоскостей лежат на SO (пусть эти точки N и P совп.)

пусть $SN = 1x$ и тогда $SP = 4x$, тогда

$NP = 3x$ это диаметр сферы т.е. радиус равен $R = 1,5x$

тогда искомый угол $\angle KSO = \arcsin \frac{1,5}{2,5} = \arcsin \frac{3}{5}$

$KS = 2x$ (по т. Пифагора для $\triangle KSO$)



2) пусть KS и SO перпендикулярны кас. в Q а SO перпендикулярно в D, тогда

~~по т. Пифагора для $\triangle KSO$ $SO = \sqrt{KS^2 - KS^2}$~~

опустим из точки K перпендикуляр KQ на SO, тогда

~~по т. Пифагора для $\triangle KSO$ $SO = \sqrt{KS^2 - KS^2}$~~ $\triangle KSO = \frac{1}{2} KQ \cdot 2,5x = \frac{1}{2} 2x \cdot 1,5x \Rightarrow KQ = 1,2x$

$\Rightarrow$ по т. Пифагора для $\triangle KQS$ $SQ = \sqrt{4x^2 - 1,44x^2} = 1,6x = ?$ (см. см. см.)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

27 (укажите) ~~в~~ ^{сфере} плоскости $\perp$ 50 мпу Q (5 км) отстоит к вертикали
сечения (плоскости 1) по $\frac{1,6^2}{1^2} = 2,56$ (у меня не получается)
но с погреш 1,6.

Ответ: $\arcsin \frac{3}{5}$ и 2,56

и 5.

1) Рассмотрим числа $p = x + y$ и $t = y - x$;

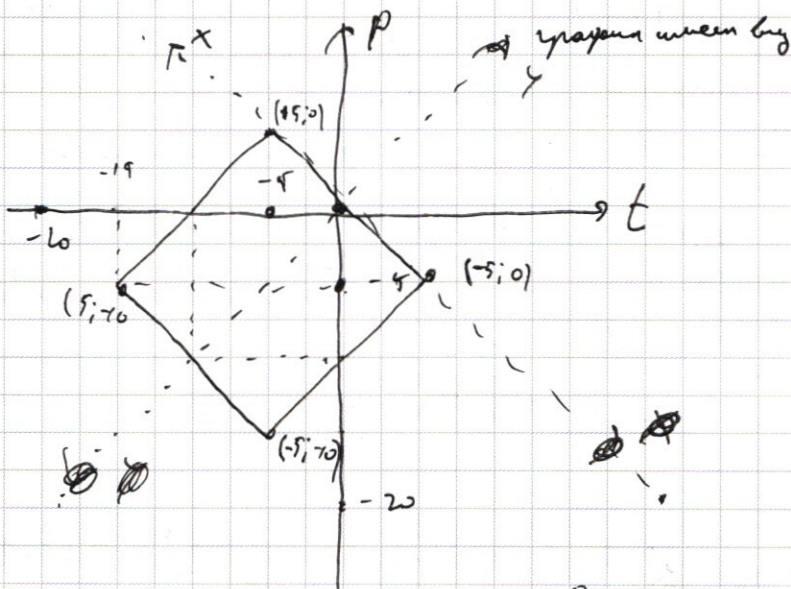
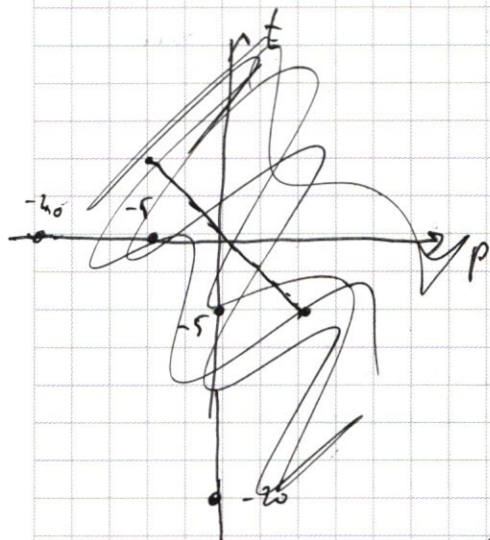
потому в оси p и t уравнение $|p + 5| + |t + 5| = 10$

при $p > -5$ и $t > -5$ $p + t = 0$

при $p < -5$ и $t < -5$ $-p - 5 - t - 5 = 10$
т.е. $p + t = -20$

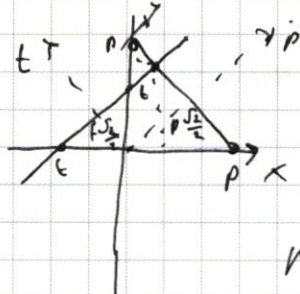
при $p < -5$ и $t > -5$ $5 - p + t + 5 = 0$ $t - p = 10$

при $p > -5$ и $t < -5$ $p - t = 10$



Заметим, что при
заданных p и t
однозначно заданы x и y
по пересечению

$$x + y = p \text{ и } y - x = t$$



по м.с. оси p и t наклонены на 45° к y и x

и чтобы нарисовать точку, достаточно точки в оси p и t

разделить на $\sqrt{2}$ (из равностороннего $\triangle$) и нарисовать

или y и x на рисунке выше: тогда уравнение
(упрощенное) имеет вид квадрата с вершинами: $(-5, 0)$ $(5, 0)$ $(5, -10)$ $(-5, -10)$.
(или, след. сф.)

(продолжение)

2) ~~б) рассматриваем уравнение~~ $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$

или в первой четверти: $(x-12)^2 + (y-5)^2 = a$ окружности (центр ~~(12, 5)~~ $(12, 5)$)

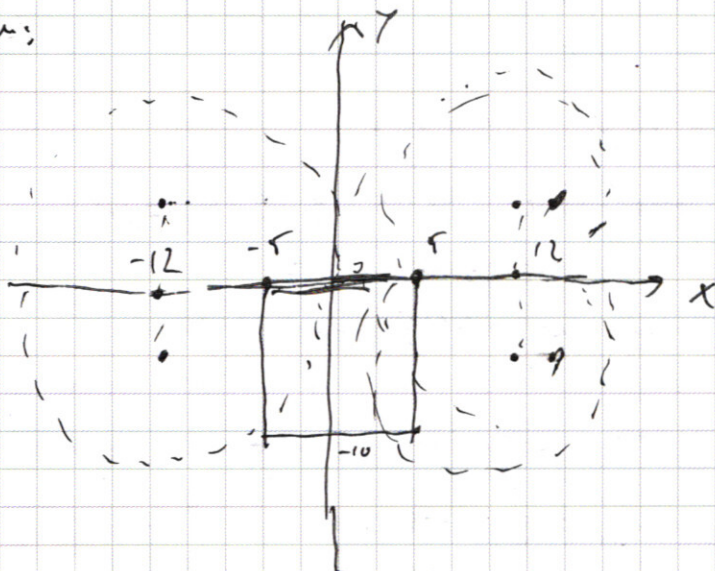
или во второй четверти: $(x+12)^2 + (y-5)^2 = a$ ~~пор. (5, -12)~~ ~~к рас. а.~~

в третьей: $(x+12)^2 + (y+5)^2 = a$ центр ~~(-12, -5)~~ $(-12, -5)$

в четвертой: $(x-12)^2 + (y+5)^2 = a$ центр ~~(12, -5)~~ $(12, -5)$

~~решение системы уравнений~~

Ищем:



решение системы - пересечения квадрата с окружностями.

Вершины окружностей не имеют знаковых точек а для решения:

решения системы 2 или окр. нас. квадрата (линейные стороны)

или точки пересечения совпадают $\Rightarrow$ лежат на Oy

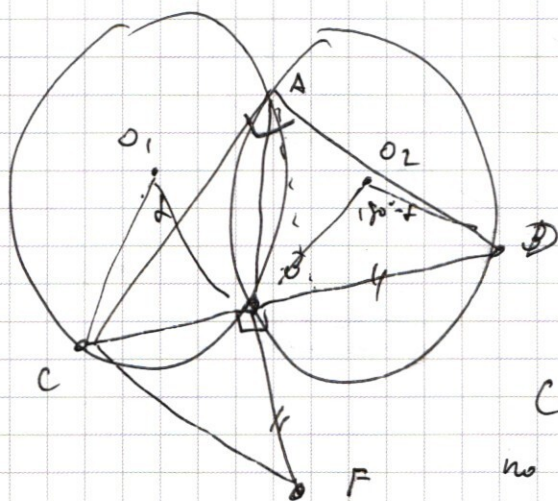
$$a = r^2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 12-5=7 \end{bmatrix} \quad (\text{Другие случаи не, всегда 2 + точки пер. с.б.})$$

Ответ: 12 и 7.

~~$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2^{32} \cdot (-1) \cdot x \Leftrightarrow 2^x + 2 \cdot (1-2^4) \cdot x \cdot 7 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 2^{34}$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6.



а) пусть $\angle CO_1B = \alpha$

тогда $\angle CAB = \frac{1}{2} \angle CO_1B = \frac{\alpha}{2}$

$\angle BAD = 90^\circ - \angle CAB = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$

$\angle BO_2D = 2\angle BAD = 180^\circ - \alpha$

по т. кос. для $\triangle CO_1B$:

$$CB^2 = 100 + 100 - 2 \cos \alpha \cdot 100 = 200(1 - \cos \alpha)$$

по т. кос. для $\triangle BO_2D$:

$$BD^2 = 100 + 100 - 2 \cos(180^\circ - \alpha) = 200(1 + \cos \alpha)$$

по т. Пифагора для $\triangle CBF$:

$$CF^2 = CB^2 + BF^2 = 200(1 - \cos \alpha) + 200(1 + \cos \alpha) = 2 \cdot 200 = 400 \Rightarrow CF = 20$$

Ответ: $CF = 20$

б) ~~$CB = 12 \Rightarrow CB^2 = 144 = 200(1 - \cos \alpha) \Rightarrow \cos \alpha = \frac{56}{200} = \frac{7}{25}$~~

Заметим что окружности равны и $\angle ACB$ и $\angle ADB$ оп. на одну дугу (AB) и поэтому равны и равны 45°

$$\cos \angle FCB = \frac{BC}{FC} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin \angle FCB = \frac{4}{5} \Rightarrow BF = 16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CD = BC + BD = 12 + 16 = 28 \Rightarrow AC = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 28 = 14\sqrt{2}$$

$$\sin \angle ACF = \sin \angle ACB \cos \angle FCB + \sin \angle FCB \cos \angle ACB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{\triangle ACF} = \frac{1}{2} \cdot \sin \angle ACF \cdot AC \cdot CF = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{2}}{10} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 = 336$$

Ответ: 336

N7.

1) найдем все x при которых система имеет решение:

$$2^x + 3 \cdot 2^{34} \leq y < 76 + 2(2^{32} - 1)x = 7$$

$$\Rightarrow 2^x + 3 \cdot 2^{34} < 76 + 2(2^{32} - 1)x$$

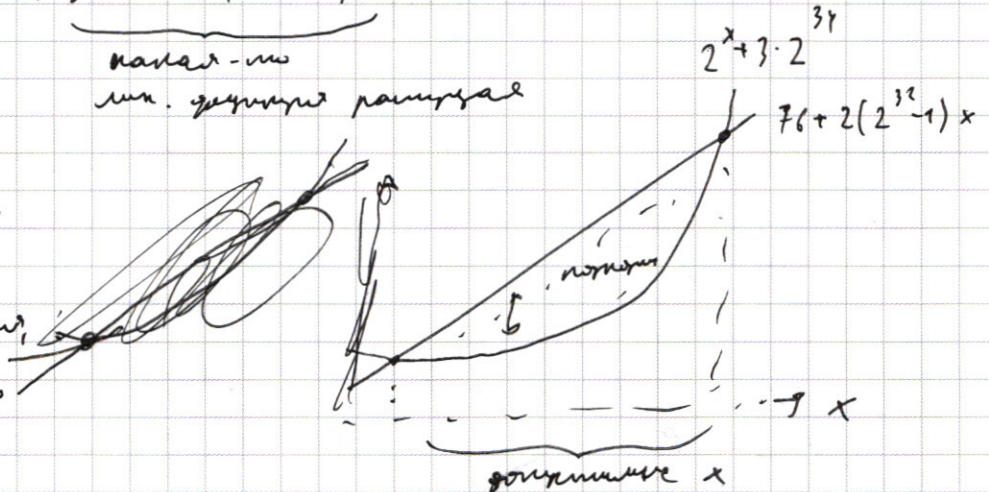
какая-то
функция
нарастающая
до ∞

какая-то
линейная функция

график имеет вид:

весь график пересечен,

т.е. функция строго
выпукла вниз.



на ~~на~~ точки пересечения:

$$x=6: 2^6 + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 6 \cdot 2^{33} - 12$$

$$64 = 64 \text{ нш.}$$

$$x=38: 2^{38} + 3 \cdot 2^{34} = 76 + 38 \cdot 2^{33} - 76$$

$$(32 + 6) 2^{33} = 38 \cdot 2^{33} \text{ нш.}$$

по условию

т.е. $x \in [7; 37]; x \in \mathbb{Z}$

теперь для x можно выбрать любой целый y лежащий между значениями
всего не для произвольного x_i :

$$76 + 2(2^{33} - 1)x_i - 2^{x_i} - 3 \cdot 2^{34}$$

приведем:
чтобы получить все парн

$$\sum_{i=7}^{37} (76 - 3 \cdot 2^{34} + 2(2^{33} - 1)x_i - 2^{x_i}) = 31 \cdot (76 - 3 \cdot 2^{34}) + \sum_{i=7}^{37} (2(2^{33} - 1)x_i - 2^{x_i})$$

$$+ \sum_{i=7}^{37} 2(2^{33} - 1)x_i - \sum_{i=7}^{37} 2^{x_i} =$$

арифметич.
прогрессия
(начи 1)

геометр.
прогрессия
(начи 2)

арифметич.
с разности $2^{33} - 1$

$$= 31(76 - 3 \cdot 2^{34}) + 2(2^{33} - 1) \cdot \frac{(7 + 37) \cdot 31}{2} + 2^7 \cdot \frac{(2^{33} - 1)}{1} =$$

(или след. способ)

сумма арифмет. прогр.

сумма геом. прогр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(продолжение)

$$= 31 \cdot 76 - 31 \cdot 3 \cdot 2^{34} + 22 \cdot 31 \cdot 2^{34} - 2 \cdot 22 \cdot 31 + 16 \cdot 2^{34} - 128 =$$

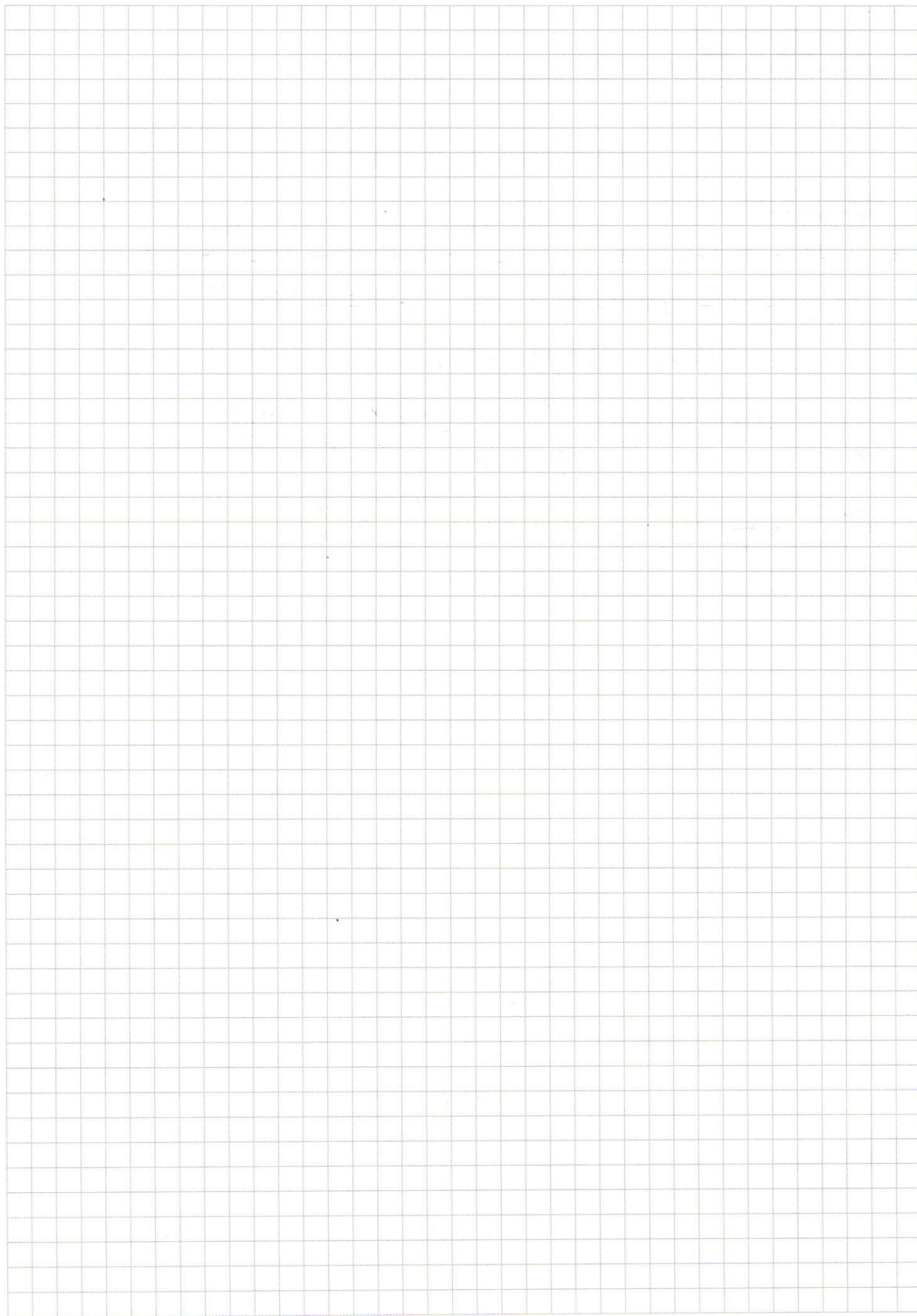
$$= 32(31 - 4) - (25 \cdot 31 - 16) 2^{34} = 32 \cdot 27 - 759 \cdot 2^{34}$$

Ответ: $32 \cdot 27 - 759 \cdot 2^{34}$

~ 3.

$$(x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})} \Rightarrow x^2 y^4 = \frac{\log_2 x}{\log_2 e} = y^{\frac{\log_2 \frac{y}{x^2}}{\log_2 e}} \Rightarrow$$

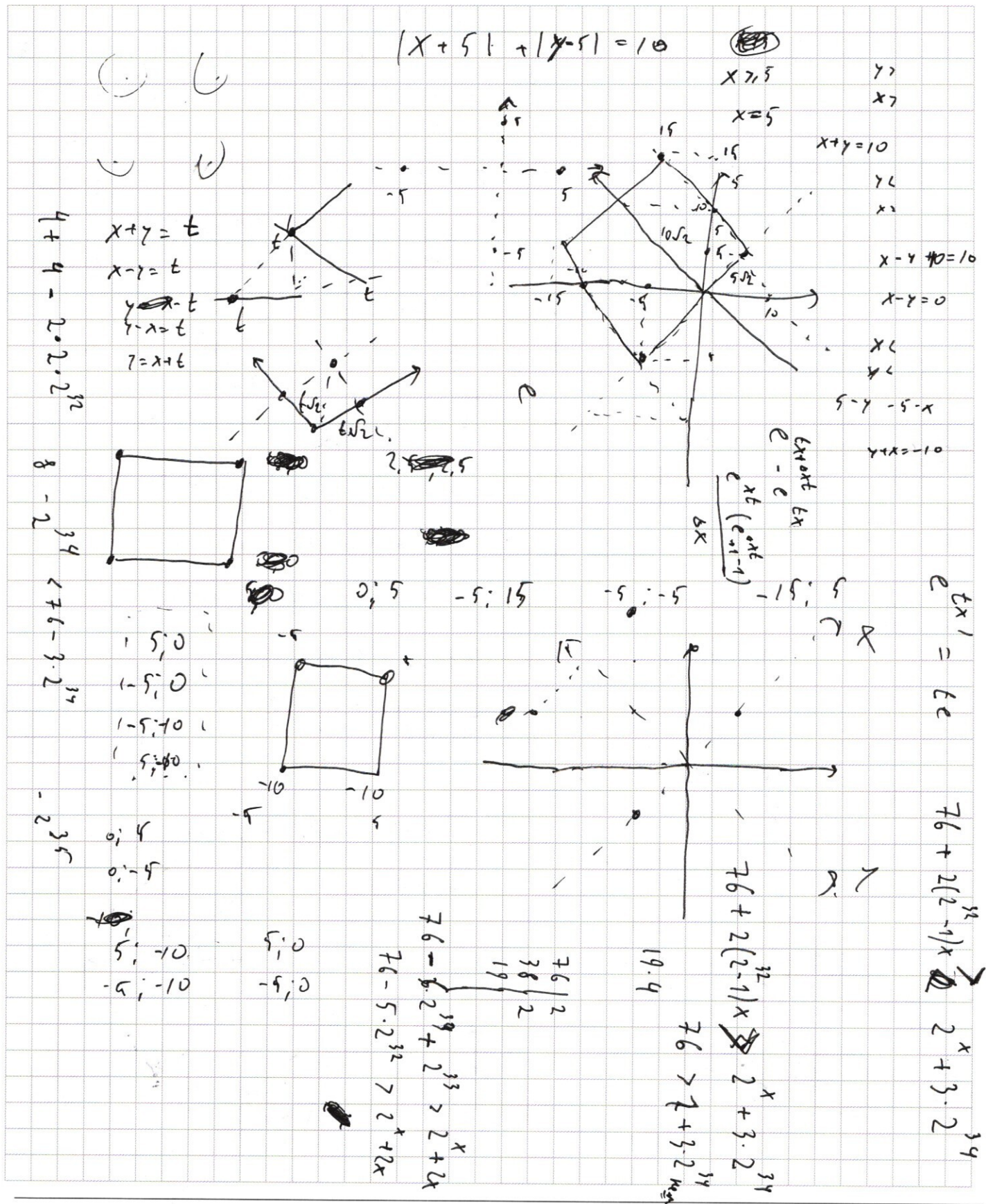
$$\Rightarrow x^{-2 \log_2 x} \cdot \frac{1}{x^4} = \frac{y}{x^7} ; x=0 \Rightarrow x^{-2 \log_2 x} = \frac{y}{x^3}$$



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\begin{array}{r} 9261 \cdot 3 \\ 3087 \cdot 3 \\ 1029 \cdot 3 \\ 343 \cdot 7 \\ 17 \\ 7 \\ 1 \\ 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3087 \\ 9261 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ 343 \\ 27 \\ 2101 \\ 686 \\ 8961 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1343 \\ 1029 \end{array} \quad \begin{array}{r} 1029 \\ 3087 \\ 9261 \end{array} \quad \begin{array}{r} 343 \cdot 7 \\ 28 \\ 63 \end{array}$$

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (n-k)$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 6 \cdot 2}$$

$$8 \cdot 7 \cdot 5$$

$$\begin{array}{r} 56 \\ 5 \\ 17 \\ 28 \\ 84 \end{array} \quad \frac{560}{2} = 280$$

$$\frac{3}{36} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{8}{36}$$

$$\frac{1}{20} \quad \frac{8}{20}$$

$$\frac{1}{5}$$

$$2,5 \cdot a = 3$$

$$a = \frac{6}{5}$$

$$1,2$$

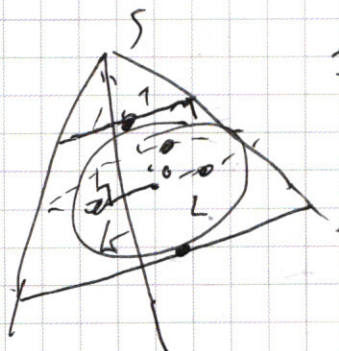
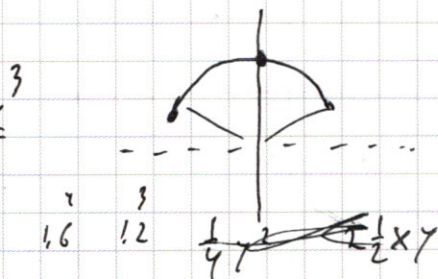
$$2,4$$

$$\frac{5 \cdot 6}{2 \cdot 5}$$

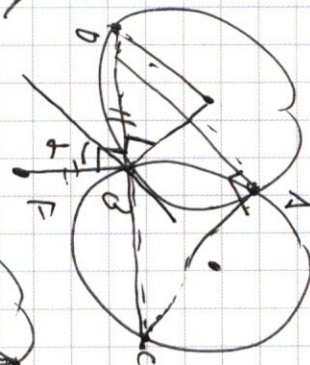
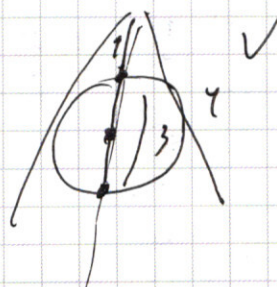
$$4 - 1,44 =$$

$$= 2,56$$

$$\begin{array}{r} 6,4 \\ \times 6,4 \\ \hline 256 \end{array}$$



$$\frac{16}{16}$$



$$\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{2} \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$-\frac{1}{2} \sin 7x \sin 2x - \sqrt{2} \cos 4x + \frac{1}{2} \sin 7x \cos 2x = 0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos 4x + \frac{1}{2} (\cos 2x - \sin 2x) \cdot \sin 7x = 0$$

$$(\cos^2 2x - \sin^2 2x) \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) = 0$$

$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sqrt{2} \cos 2x + \sqrt{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 7x = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (x^2 + y^2)^{-\ln x} = y^{\ln \frac{y}{x^2}} \end{array} \right.$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$-x(y + 2x)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{44 \cdot 31}{2} = (22 \cdot 31)$$

$$\begin{array}{r} 76 \\ - 44 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ - 22 \\ \hline 5 \end{array}$$

$$31 \cdot 19$$

$$\begin{array}{r} 425 \cdot 31 - 16 \\ 100 \quad 3100 \\ - \quad 64 \\ \hline 3036 \end{array}$$

$$-\log_e x$$

$$759$$

$$\begin{array}{r} 31 \\ \times 24 \\ \hline 155 \\ + 62 \\ \hline 775 \\ - 16 \\ \hline \end{array}$$

$$\log_e x = \frac{\log_2 x}{\log_2 e}$$

$$y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0$$

$$y^2 - x(y + 2x)$$

$$y(y - x) - 2x^2 + 4x - 4(y - x)$$

$$(y - 4)(y - x)$$

$$\begin{array}{r} 2 \quad 1 \\ 4 \quad 2 \\ 8 \quad 3 \\ 16 \quad 4 \\ 32 \quad 5 \\ 2^3 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 64 \quad 6 \\ 128 \quad 7 \end{array}$$

$$32 \cdot 31 - 128 = 32 \cdot 4$$

$$32 \cdot$$

$$\begin{array}{c} 2^2 \\ 2^3 \\ 2^4 \\ 2^5 \\ 2^6 \\ 2^7 \\ 2^8 \\ 2^9 \end{array}$$

$$2^8 - 2$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ \times 759 \\ \hline 7036 \end{array}$$



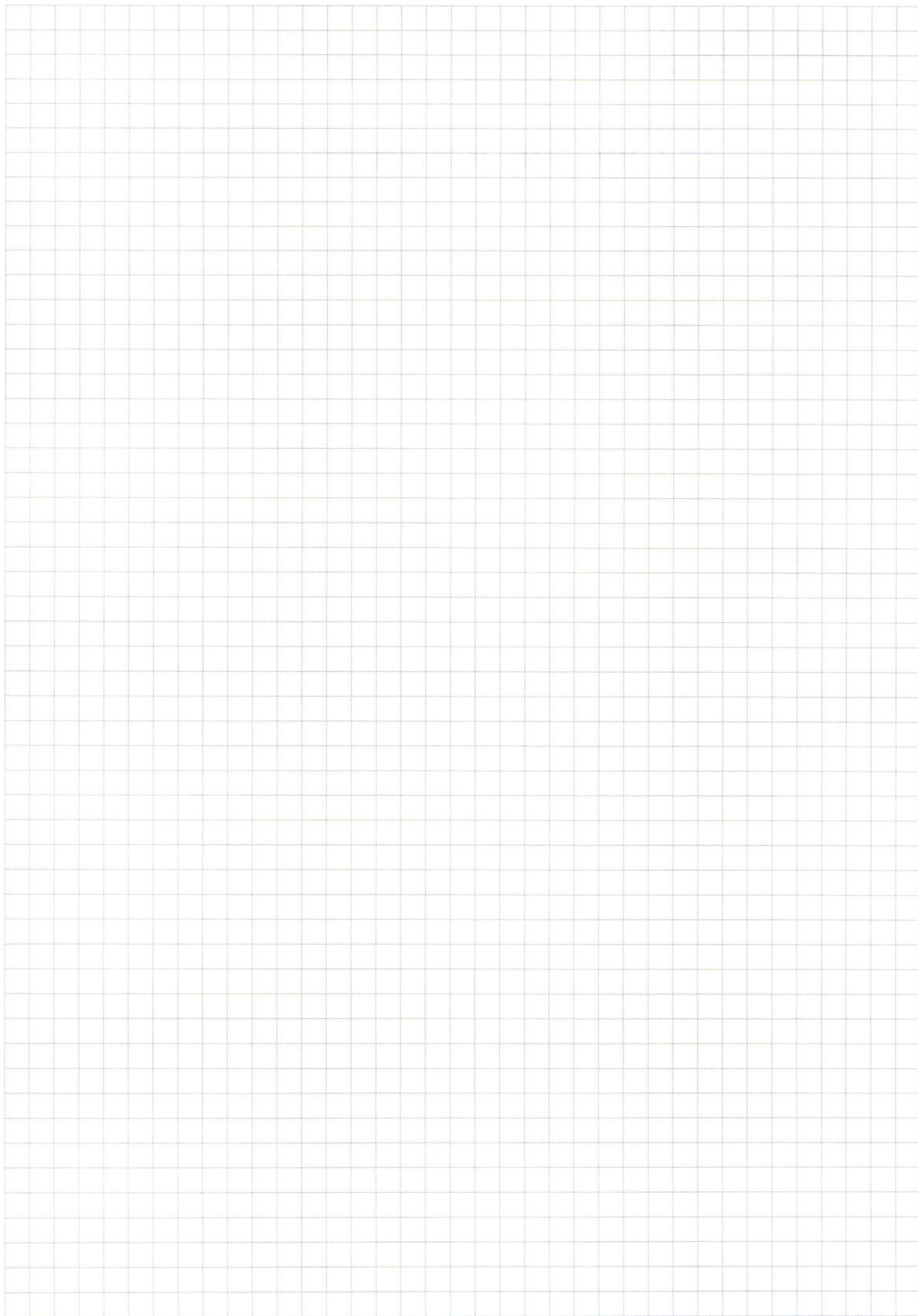
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)



☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)