

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Бланк задания должен быть вложен в раб
Работы без вложенного задания не проверяются.

1. [3 балла] Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 9261. Ответ необходимо представить в виде целого числа.
2. [5 баллов] Решите уравнение $\cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$.
3. [5 баллов] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(y/x^7)}, \\ y^2 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0. \end{cases}$$

4. [5 баллов] Сфера с центром O вписана в трёхгранный угол с вершиной S и касается его граней в точках K, L, M (все плоские углы трёхгранного угла различны). Найдите угол KSO и площадь сечения трёхгранного угла плоскостью KLM , если известно, что площади сечений трёхгранного угла плоскостями, касающимися сферы и перпендикулярными прямой SO , равны 1 и 16.
5. [5 баллов] Найдите все значения параметра a , при которых система

$$\begin{cases} |x + y + 5| + |y - x + 5| = 10, \\ (|x| - 12)^2 + (|y| - 5)^2 = a \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

6. [6 баллов] а) Две окружности одинакового радиуса 10 пересекаются в точках A и B . На первой окружности выбрана точка C , а на второй – точка D . Оказалось, что точка B лежит на отрезке CD , а $\angle CAD = 90^\circ$. На перпендикуляре к CD , проходящем через точку B , выбрана точка F так, что $BF = BD$ (точки A и F расположены по разные стороны от прямой CD). Найдите длину отрезка CF .
б) Пусть дополнительно известно, что $BC = 12$. Найдите площадь треугольника ACF .
7. [6 баллов] Найдите количество пар целых чисел (x, y) , удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \end{cases}$$

Ответ должен быть представлен в виде алгебраической суммы не более двух слагаемых.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) Разл. 9261 не прост. нк-ем:

$$9261 = 3^3 \cdot 7^3$$

8-значные числа ^{произв. цифр,} кратные кот. 9261 могут
быть составлены из 7; 7; 7; 3; 3; 3; 1; 1 или
из 9; 7; 7; 7; 3; 1; 1; 1. В I случае можно
составить $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1} = 560$

Во II случае $\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2} \cdot 4 \cdot 5 = 1120$

Всего: $560 + 1120 = 1680$

3) $\int (x^2 y^4)^{-\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x^2})}$

$x > 0$
 $y > 0$

$$2y^4 - xy - 2x^2 + 8x - 4y = 0 \Rightarrow (y - 2x)(y + x - 4) = 0$$

При $y = 2x$:

$$(16x^6)^{-\ln x} = (2x)^{\ln(\frac{2}{x^6})}$$

$$(2x)^{\ln 2 - \ln x^6} \cdot (16x^6)^{\ln x} = 1$$

$$2^{\ln 2 - 6 \ln x + 4 \ln x} \cdot x^{\ln 2 - 6 \ln x + 6 \ln x} = 1$$

$$2^{\ln 2 - 2 \ln x} \cdot 2^{\ln x} = 1 \Rightarrow 2^{\ln 2 - \ln x} = 1$$

$$\ln 2 - \ln x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y = 4$$

$$(2; 4)$$

При $y = 4 - x$:

$$x^{-2 \ln x - 4 \ln x} = y^{\ln y - 7 \ln x}$$

$$y^{\ln y - 3 \ln x} \cdot x^{2 \ln x} = 1$$

$$(4 - x)^{\ln(4 - x) - 3 \ln x} \cdot x^{2 \ln x} = 1$$

Пусть $x = 2$

$$2^{\ln 2 - 3 \ln 2} \cdot 2^{2 \ln 2} =$$

$$= 2^{3 \ln 2 - 3 \ln 2} = 2^0 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$y = 4 - 2 = 2$$

$$(2; 2)$$

$$2) \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos(7x+2x) - \cos(7x-2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + \sin(7x+2x) + \sin(7x-2x) = 0$$

$$-2\sin 7x \sin 2x - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x) + 2\sin 7x \cos 2x = 0$$

$$2\sin 7x(\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2}(\cos^2 2x - \sin^2 2x)(\cos 2x + \sin 2x) = 0$$

$$(\cos 2x - \sin 2x)(2\sin 7x - \sqrt{2}(\cos 2x + \sin 2x)) = 0$$

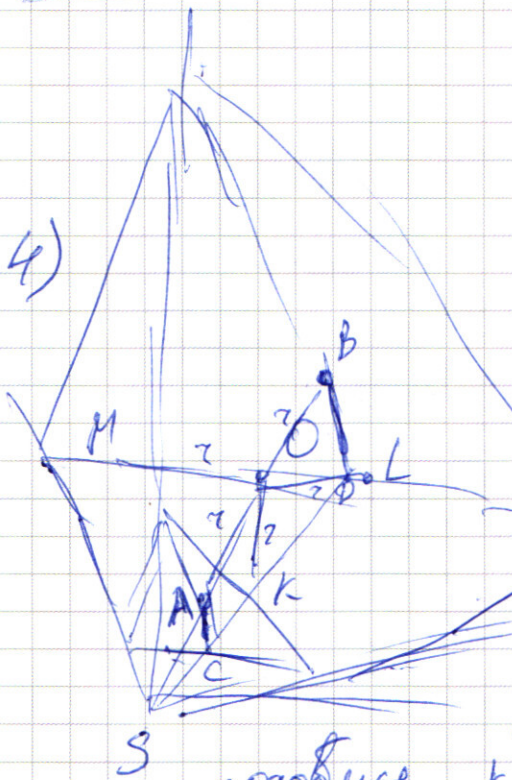
$$\cos 2x = \sin 2x$$

$$\sqrt{2}\sin 7x - \cos 2x - \sin 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z} \quad 1 \sin^2 7x = 1 + \sin 4x$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$$

$$\sqrt{2}\sin 2x = 0$$



Данные предельные
находятся в параллельных
пл-тах т.к. $\perp$ одной
прямой $SO \Rightarrow$ отрезки
пересекаются. пл-тей треуголь-
ников с кажд. из гран. 3-ехгр.
угла параллельны $\Rightarrow$ треуголь-
ники подобны.

$k =$ коэффициент подобия $k^2 = 16 \Rightarrow k = 4$

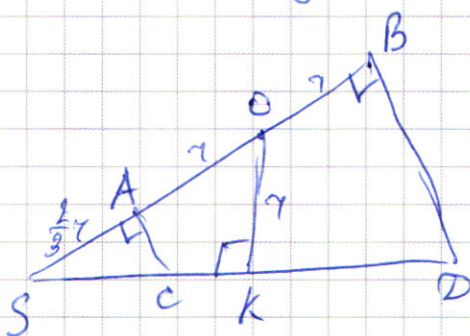
т.к. $\frac{BD}{AC} = 4$, т.к. $\Delta \perp SO \Rightarrow AC \perp SO$
 $BD \perp SO$

$$\frac{SB}{SA} = 4$$

$$SB - SA = 27 \Rightarrow 3SA = 27$$

$$\sin \angle KSO = \frac{OK}{SO}$$

$$SA = \frac{27}{3} = 9$$



$$\frac{OK}{SO} = \sin \angle KSO = \frac{9}{9+27} = \frac{1}{5}$$

$$\angle KSO = \arcsin \frac{1}{5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$4) \textcircled{1} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \Rightarrow y \geq 2^x + 6 \cdot 2^{33}$$

$$\textcircled{2} y < 76 + 2(2^{32} - 1)x \Rightarrow y < 76 - 2x + x \cdot 2^{33}$$

Каково решение при $x \textcircled{1} \textcircled{2}$:

$$\textcircled{2} - \textcircled{1}: x - (x - 6) \cdot 2^{33} + 76 - 2x - 2^x$$

$$\text{При } x = 6: 76 - 12 - 64 = 76 - 76 = 0 \Rightarrow x \geq 6$$

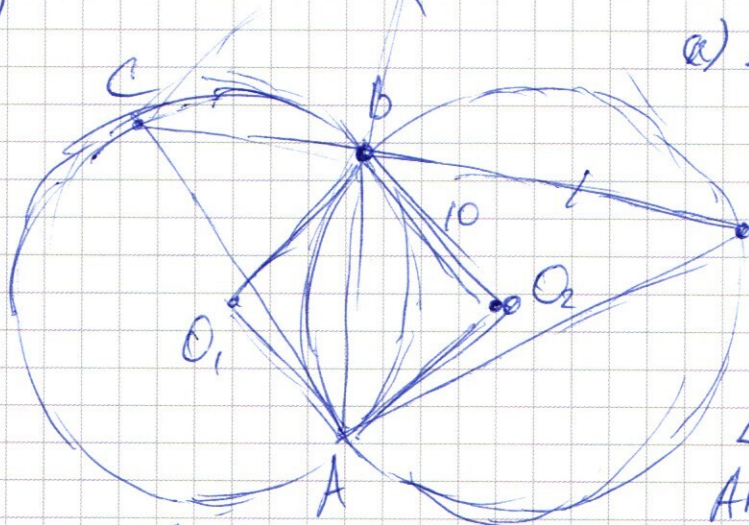
$$\text{При } x = 38: 32 \cdot 2^{33} + 76 - 76 - 2^{38} = 0 \Rightarrow x < 38$$

Из выше сказ. $\Rightarrow x \in [7; 37]$, где $x \in \mathbb{N}$

И посчитаем сумму количества решений при всех возм. x

$$\begin{aligned} & (1 + 2 + \dots + 31) \cdot 2^{33} + 76 \cdot 31 - 2(1 + 2 + \dots + 31) - \frac{2^{38} - 2^7}{2 - 1} = \\ & = 16 \cdot 31 \cdot 2^{33} + 34 \cdot 31 - \frac{128(2^{31} - 1)}{2 - 1} = 31 \cdot 2^{37} + 34 \cdot 31 - 2^{38} + 128 = \\ & \approx 29 \cdot 2^{37} + 1182 \end{aligned}$$

6)



$$\text{a) } \angle BO_1A = \angle BO_2A, \text{ так как}$$

$$\angle \gamma_1 = \angle \gamma_2; AB - \text{общая хорда}$$

$$\Rightarrow \angle ACB = \angle ADB = \angle AOB$$

$$= \frac{\angle AO_2B}{2} = \frac{180^\circ - \angle CAB}{2}$$

$$\angle = 45^\circ \Rightarrow AC = AD$$

$$\angle AO_1B = \angle AO_2B = 90^\circ$$

$$AB = \sqrt{2} \cdot r = 10\sqrt{2}$$

Т. кос-ов для $\triangle ACB$ и $\triangle ABD$ и т. Пифагора для $\triangle ACD$

$$\textcircled{1} AB^2 = CA^2 + CB^2 - \sqrt{2} CA \cdot CB$$

$$\textcircled{2} AB^2 = CA^2 + BD^2 - \sqrt{2} CA \cdot BD$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \quad 2AB^2 = 2AC^2 + CB^2 + BD^2 - \sqrt{2} AC(CB + BD)$$

$$\textcircled{3} CB + BD = AC\sqrt{2}$$

$$\text{из } \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ и } \textcircled{3} \Rightarrow 2AB^2 = 2AC^2 + CB^2 + BD^2 - 2AC^2$$

$$CB^2 + BD^2 = 2 \cdot 100 = 400$$

$$CF = \sqrt{CB^2 + BF^2} = \sqrt{CB^2 + BD^2} \quad \Rightarrow CF = \sqrt{400} = 20$$

$$\delta) \text{ и } BF = BD = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16$$

$$\sin \angle FCB = \frac{BF}{CF} = \frac{16}{20} \quad CF = 20$$

$$\sin \angle FCA = \sin(\angle FCB + 45^\circ) = \sin \angle FCB \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos \angle FCB =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{16}{20} + \frac{12}{20} \right) = \frac{7\sqrt{2}}{10}$$

$$S_{FCA} = \frac{1}{2} AC \cdot FC \cdot \sin \angle FCA \quad \Rightarrow S_{FCA} = \frac{1}{2} \cdot 14\sqrt{2} \cdot 20 \cdot \frac{7\sqrt{2}}{10} = 196$$

$$AC = CD \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 14\sqrt{2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) ① $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$(|x|-12)^2 + (|y|-5)^2 = a$ — 40 кр.: и нет рад. $\sqrt{a}$ $a \geq 0$
Рассм. ①:

При $x \in (-5; 5)$:

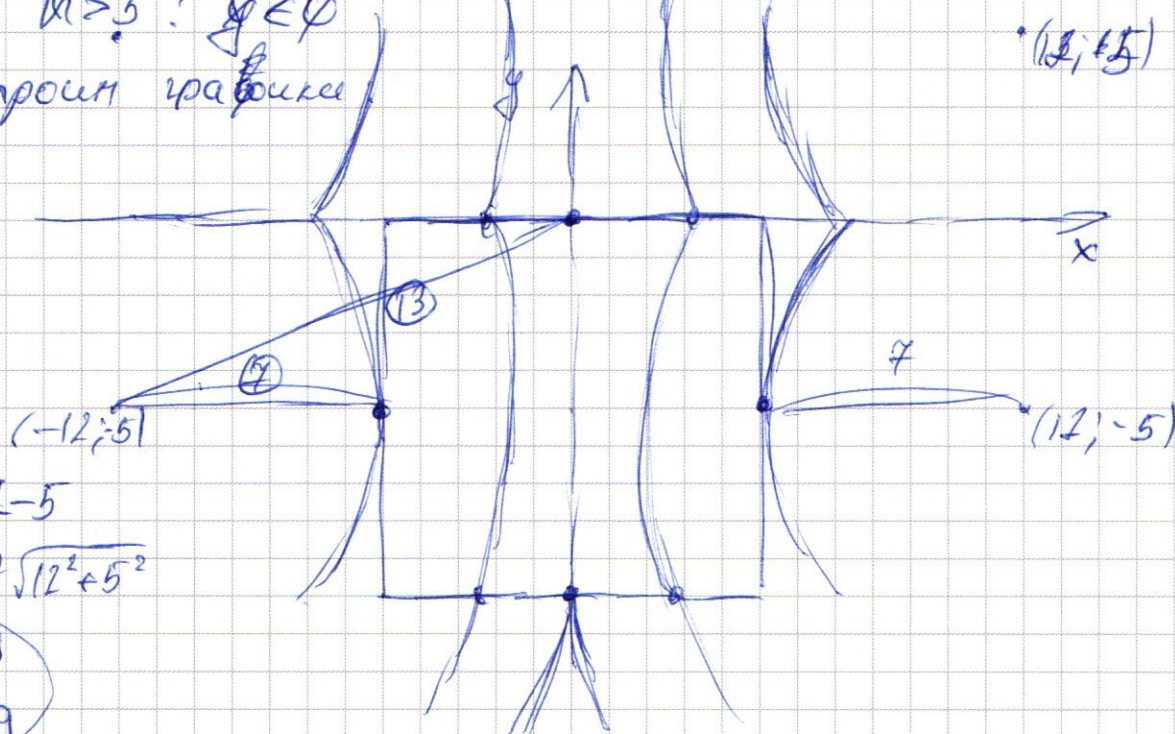
решением ур. $|x+y+5| + |y-x+5| = 10$

$y = 0$ $y = -10$

При $x = -5$ или $x = 5$: $y \in [-10; 0]$

При $|x| > 5$: $y \in \emptyset$

Построим график



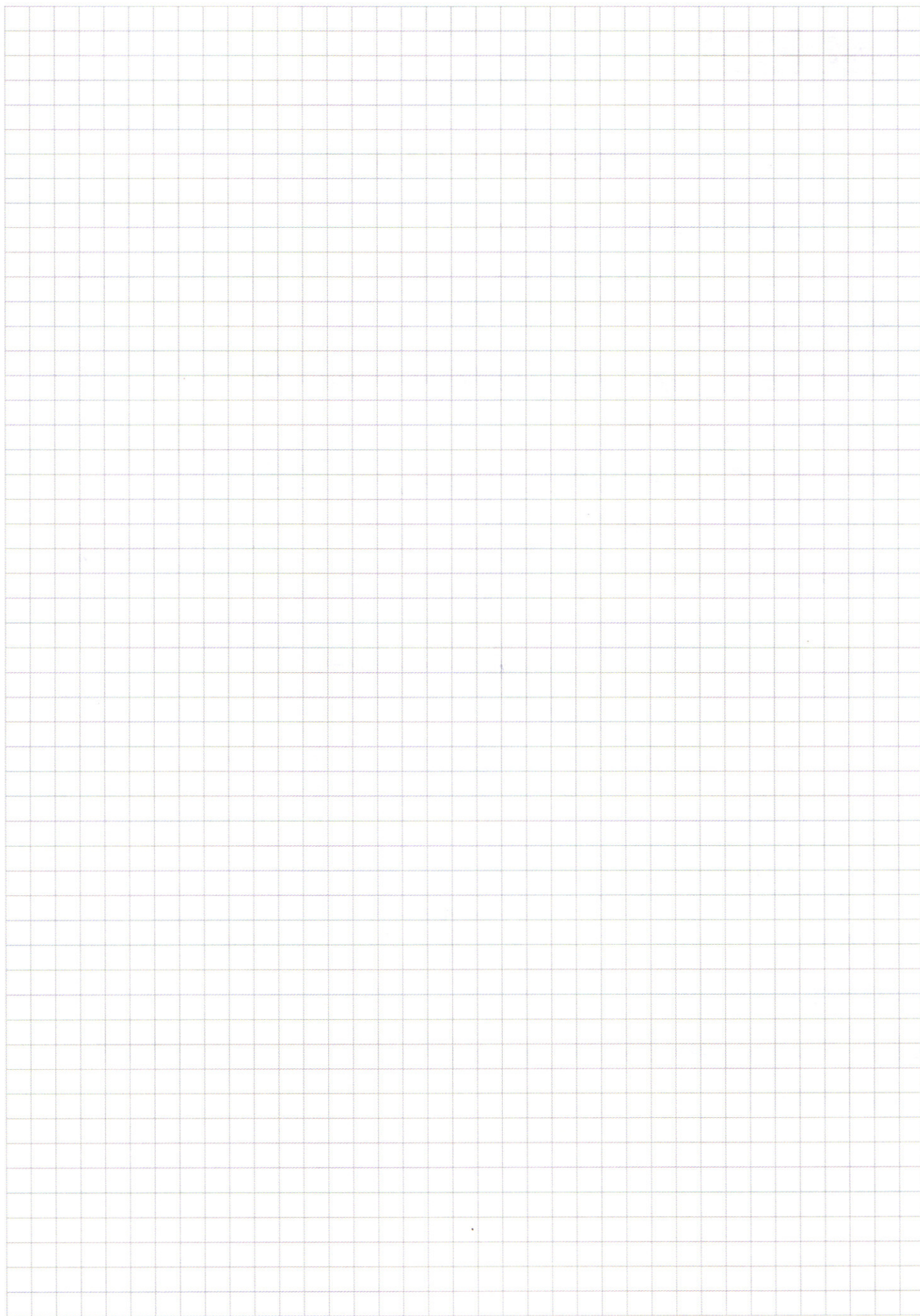
$\sqrt{a} = 12 - 5$

$\sqrt{a} = 12 \sqrt{12^2 + 5^2}$

$a = 49$

$a = 169$

При таких значениях a система имеет ровно 2 решения.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

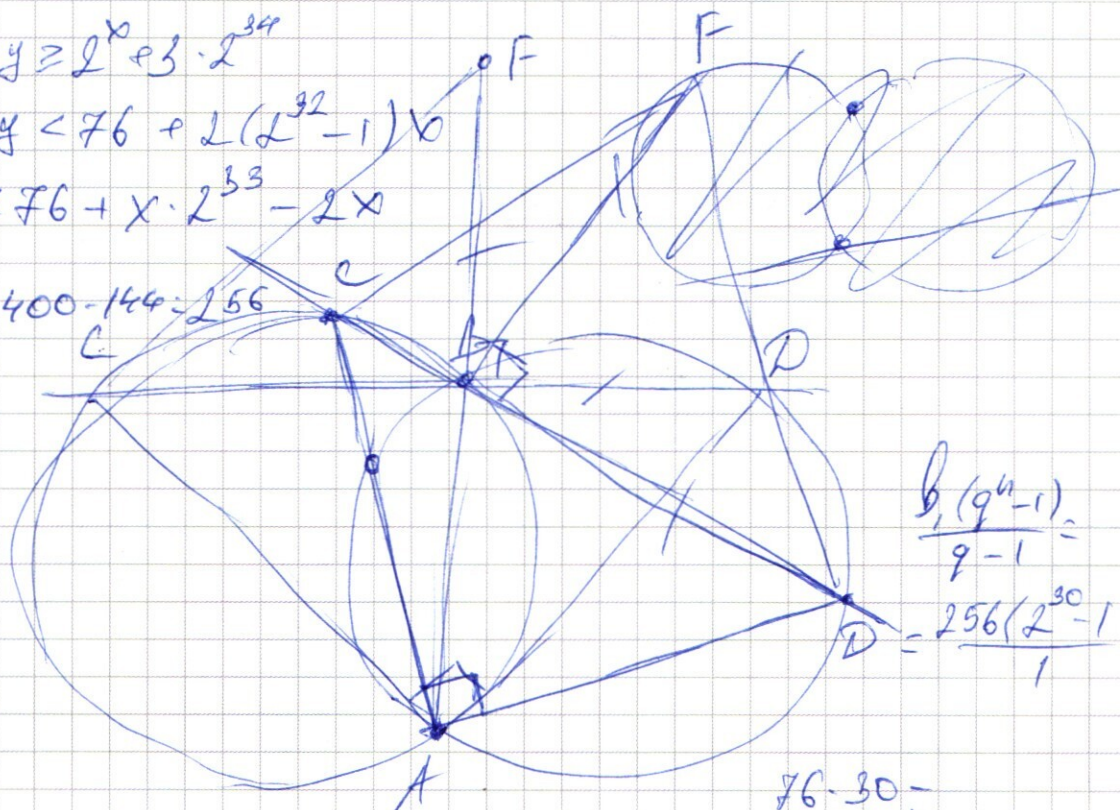
$$7) \begin{cases} y \geq 2^x + 3 \cdot 2^{34} \\ y < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x \\ y < 76 + x \cdot 2^{33} - 2x \end{cases}$$

$$y < 76 + 2(2^{32} - 1) \cdot x$$

$$y < 76 + x \cdot 2^{33} - 2x$$

$$BD^2 = 400 - 144 = 256$$

$$BD =$$



$$\frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1} = \frac{256(2^{30} - 1)}{1}$$

$$y \geq 2^x + 6 \cdot 2^{33}$$

$$y < 2(38 - x) + x \cdot 2^{33}$$

$$x = 6: \begin{cases} y \geq 64 + 6 \cdot 2^{33} \\ y < 64 + 6 \cdot 2^{33} \end{cases}$$

$$y < 64 + 6 \cdot 2^{33}$$

$$x = 7: \begin{cases} y \geq 128 + 7 \cdot 2^{33} \\ y < 62 + 7 \cdot 2^{33} \end{cases}$$

$$y < 62 + 7 \cdot 2^{33}$$

$$x \cdot 2^{33} (x - 6) \cdot 2^{33} + 76 - 2x - 2^x$$

$$\text{При } x = 7: 2^{33} + 62 -$$

$$\text{При } x = 38: 32 \cdot 2^{33} + 76 - 2x - 2^{38}$$

$$2 \quad 0$$

$$\begin{matrix} x = 8 \\ x = 37 \end{matrix}$$

$$76 \cdot 30 - (8 + 37) \cdot 30 = 31 \cdot 30$$

$$\frac{(1 + 32) \cdot 32}{2} = 33 \cdot 16 \cdot 2^{33}$$

$$330 + 198 = 528 \cdot 2^{33} + 990$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$1) 9261 = 9 \cdot 1029 = 9 \cdot 7 \cdot 147 = 9 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 3 \quad \cos^2 30^\circ - \sin^2 30^\circ = \cos 60^\circ$$

$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 11$$

$$9 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \quad \frac{9}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\leftarrow \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56 \quad \frac{5 \cdot 4}{2} = 20 \quad 112 = 2240 \quad x^{2 \ln x} \cdot y^{-4 \ln x} = y^{\ln y - 4 \ln x}$$

$$\cos(9x - 4x) - \cos(7x - 2x) =$$

$$56 \cdot 16 = 560 + 336 = 896 \quad \frac{y^{\ln y - 3 \ln x} \cdot x^{2 \ln x}}{x^{2 \ln x}} = 0$$

$$2) \cos 9x - \cos 5x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 9x + \sin 5x = 0$$

$$\cos 5x \cos 4x - \sin 5x \sin 4x - \sqrt{2} \cos 4x + \sin 5x \cos 4x + \sin 4x \cos 5x + \sin 5x = 0 - \cos 5x = 0 \quad (4-x) \ln(4-x) - 3 \ln x \cdot x^{2 \ln x} = 0$$

$$\cos 4x (\cos 5x + \sin 5x - \sqrt{2}) = \cos 7x \cos 2x - 2 \sin 7x \sin 2x$$

$$3) (y - 2x)(y + x - 4) = y^2 - xy - 2x^2 - 4y + 8x \quad \ln 2 - 3 \ln 2 \cdot 2 \ln 2 = 1$$

$$(y - 2x)(y + x - 4) = 0 \quad \sin 9x + \sin 5x = 2 \sin 7x \cos 2x$$

$$(x^2 y^4)^{\ln x} = y^{\ln(\frac{y}{x})}$$

$$x \neq 0 \quad \ln$$

$$\frac{y}{x} > 0$$

$$x > 0 \quad y > 0 \quad x \neq 1 \quad x \neq y$$

$$y = 2x: (16x^6)^{\ln x} = (2x)^{\ln \frac{2}{x^6}}$$

$$(16x^6)^{\ln x} = (2x)^{\ln 2 - \ln x^6}$$

$$(16x^6)^{\ln x} (2x)^{\ln 2 - \ln x^6} = 1$$

$$16 \ln x \cdot 6 \ln x \cdot \ln 2 - 6 \ln x \cdot x^{\ln 2 - 6 \ln x} = 1$$

$$2 \ln x + \ln 2 - 6 \ln x \cdot x^{\ln 2} = 1$$

$$2 \ln 2 - 2 \ln x \cdot \ln x = 1$$

$$2 \ln 2 - \ln x = 1$$

$$\ln 1 - \ln x = 0$$

$$x = 2$$

$$2 \sin 7x (\cos 2x - \sin 2x) - \sqrt{2} (\cos 2x - \sin 2x) (\cos 2x + \sin 2x)$$

$$y = 4 \quad (\cos 2x - \sin 2x) / (2 \sin 7x - \sqrt{2} \cos 2x - \sqrt{2} \sin 2x)$$

$$|x+y+5| + |y-x+5| = 10$$

$$x=1 \quad \begin{matrix} 33311 \\ 33131 \\ 33113 \end{matrix}$$

$$|y+6| + |y+4| = 10$$

$$x=0 \quad |y+5| = 5$$

$$y+5=5 \quad \begin{matrix} 31331 \\ 31133 \end{matrix} \quad xL$$

$$y+5=-5 \quad 13 \quad x3$$

$$x=4$$

$$|y+9| + |y+1| = 10$$

$$x=5$$

$$|y+10| + |y| = 10$$

$$x=-5$$

$$|y| + |y+10| = 10$$

$$x=6$$

$$x=1$$

$$x=10 \quad |y+4| + |y+15| + |y-5|$$

$$x=6$$

$$|y+11| + |y-1| =$$

$$\angle KSO = \arctan \frac{3}{5}$$

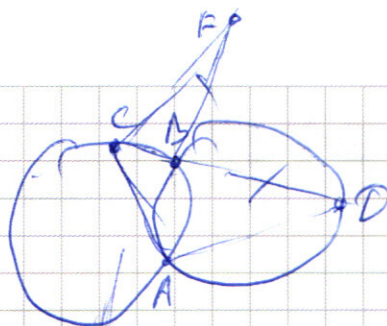
$$\frac{SA}{SB} = \frac{1}{4}$$

$$SB - SA = 27$$

$$3SA = 27$$

$$SA = \frac{2}{3}7$$

$$\frac{\sin \theta}{\cos \angle KSO} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{3}{5}$$



$$\sqrt{2} \sin 7x - \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \cos x \sin x$$

$$\sqrt{a}$$

$$a = 49$$

$$a = 169$$

$$2 \sin^2 7x = 1 + \sin 4x$$

$$\sqrt{2} \sin 7x - 1$$

